Topologie, SS2015
M. Hortmann

Blatt 10

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen									
1a	b	c	dα	dβ	2	3a	b	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	1	1	5 Punkte=100%	

Man erinnere sich die Definitionen:

Zwei stetige Abbildungen $f, g: Y \to X$ zwischen topologischen Räumen *X*,*Y* heißen homotop, wenn es eine stetige Abbildung $H: Y \times [0,1] \to X$ gibt mit $\forall x \in Y: \ H=(x,0)=f(x),\ H(x,1)=g(x)$.
Die Abbildung *H* heißt dann Homotopie zwischen *f* und *g* bzw. von *f* nach *g*.

Stetige Abbildungen $f:[0,1]\to X$ nennt man auch Wege.
Bei Homotopien von Wegen ist es oft sinnvoll zu verlangen, daß diese den gleichen Anfangs- und Endpunkt haben. Hat man also zwei solche Wege $f, g:[0,1]\to X$ mit $f(0)=g(0)=x_0$ und $f(1)=g(1)=x_1$, so nennt man sie weghomotop, wenn sie homotop sind und die Homotopie überall den Anfangs- und Endpunkt respektiert, also $\forall s \in [0,1]: \ H(0,s)=x_0$ und $H(1,s)=x_1$.

Homotopie und Weghomotopie sind Äquivalenzrelationen. Man schreibt $f \simeq g$ bzw. $f \simeq_w g$

Sind *f*, *g* Wege in *X* mit $f(0)=x_0$, $f(1)=g(0)=x_2$, $g(1)=x_3$, so lassen sich die Wege in geometrisch intuitiver Weise hintereinanderschalten, indem man setzt
$(g*f)(t) := \begin{cases} f(2t) & \text{für} \quad t \le 1/2 \\ g(2t-1) & \text{für} \quad t \ge 1/2 \end{cases}$. Man rechnet nach, daß mit $f_1 \simeq_w f_1$ und $g_1 \simeq_w g_2$ auch $g_1 * f_1 \simeq g_2 * f_2$ und daß auf der Homotopieebene auch das Assoziativgesetz gilt: Sind also h_1, h_2 weitere Wege mit $h_1(0)=h_2(0)=x_3$ und $h_1(0)=h_2(0)=x_4$ und ist $h_1 \simeq_w h_2$ so gilt auch $(h_1 * g_1) * f_1 \simeq_w h_2 * (g_2 * f_2)$.

Eine surjektive stetige Abbildung $\pi: E \to B$ heißt (diskrete) Überlagerungsabbildung, wenn es zu jedem $b \in B$ eine offene Umgebung $V(b)$ gibt, so daß die Urbildmenge $\pi^{-1}(V)$ sich als disjunkte Vereinigung $\bigcup_{i \in I} U_i$ offener Teilmengen von *E* schreiben läßt, wobei die Abbildungen $\pi_{|U_i}: U_i \to V$ sämtlich Homömorphismen sind. Die Urbildmenge $\pi^{-1}(\{b\})$ heißt Faser über *b*.

Aufgabe 1:

a) Die Zusammenstückelung von $g*f$ aus g und f ist etwas willkürlich. Man hätte ja auch definieren können $(g\odot f)(t) := \begin{cases} f(3t) & \text{für} \quad 0 \le t \le 1/3 \\ g\left(\frac{3t-1}{2}\right) & \text{für} \quad 1/3 \le t \le 1 \end{cases}$.

Zeigen Sie: $g*f$ und $g\odot f$ sind weghomotop.

b) Zeigen Sie, daß ein beliebiger Weg in $\mathbb{R}$ mit Anfangspunkt 0 und Endpunkt 1 homotop zur Identität auf [0,1] ist.

c) Zeigen Sie, daß ein beliebiger Weg in [0,1]mit Anfangspunkt 0 und Endpunkt 1 weghomotop zur Identität auf [0,1] ist.

d) Topologische Eigenschaften eines Weges sollten nicht von seiner Parametrisierung abhängen. Ist $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ mit $\varphi(0)=0$ und $\varphi(1)=1$ ein Homöomorphismus und $f:[0,1]\to X$ ein Weg, so nennt man $\tilde{f} := f\circ\varphi$ eine Umparametrisierung von f.

Für Wege f,g in X setze man: $f\sim g$ genau dann wenn f ist eine Umparametrisierung von g.

α) Man zeige, daß es sich dabei um eine Äquivalenzrelation handelt.
β) Setzen Sie das Ergebnis von c) voraus um zu zeigen daß $f\sim g \Rightarrow f\simeq_w g$.

Aufgabe 2

Sei $\pi: E\to B$ eine Überlagerungsabbildung, B sei zusammenhängend, $x_0\in B$.
Man zeige: Ist die Faser über x_0 , also die Menge $\pi^{-1}(\{x_0\})$, zweielementig , so auch die Faser über jedem anderen Punkt von B .

Aufgabe 3

Sei $\pi: E\to B$ eine Überlagerungsabbildung.
a) Man zeige: π ist offen, d.h. $\forall U\subset E$ offen: $\pi(U)$ ist offen in B.
b) Ist jede Faser von über B endlich und ist B kompakt, so ist auch E kompakt[1].

1 Zeigen Sie: jede offene Überdeckung von E besitzt eine endliche Verfeinerung. Daraus folgt dann natürlich, daß sie eine endliche Teilüberdeckung besitzt.