Topologie, SS2015
M. Hortmann

Blatt 9

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen						
1a	b	c	d	e	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	3 Punkte=100%	

1. Čech-Kohomologie

Sei $\mathcal{U}=(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine offene Überdeckung des zusammenhängenden Hausdorffraums M.

Für $\alpha_0,\ldots,\alpha_k\in A$ setze man $U_{\alpha_0\ldots\alpha_k}:=U_{\alpha_0}\cap\ldots\cap U_{\alpha_k}$.
Zu jedem Tupel $\alpha_0,\ldots,\alpha_k\in A$ mit $U_{\alpha_0\ldots\alpha_k}\neq\emptyset$ sei nun eine stetige Funktion $f_{\alpha_0\ldots\alpha_k}:U_{\alpha_0\ldots\alpha_k}\to\mathbb{Z}$ so gegeben, daß $f_{\alpha_0\ldots\alpha_k}\equiv 0$, sobald ein Index doppelt vorkommt und $f_{\alpha_{\sigma(0)}\ldots\alpha_{\sigma(k)}}=\epsilon_\sigma f_{\alpha_0\ldots\alpha_k}$, wenn Indizes permutiert werden. Eine solche Kollektion von Funktionen $f_{\alpha_0\ldots\alpha_k}$ nennt man eine (alternierende) Čech-k-Kokette mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$, eine einzelne Funktion $f_{\alpha_0\ldots\alpha_k}$ eine Komponente der Kokette $(f_{\alpha_0\ldots\alpha_k})$. Die Menge der k-Koketten bezeichnet man mit $\check{C}^k(\mathcal{U},\mathbb{Z})$.
Man k-Koketten in natürlicher Weise komponentenweise addieren, und damit ist der Raum $\check{C}^k(\mathcal{U},\mathbb{Z})$ [1] in natürlicher Weise eine abelsche Gruppe.

Weil M zusammenhängend war, läßt sich $\mathbb{Z}$ in natürlicher Weise mit der Gruppe der stetigen Funktionen $\{f:M\to\mathbb{Z}\}$ identifizieren, und diese wieder als Untergruppe von $\check{C}^0(\mathcal{U},\mathbb{Z})$ auffassen, indem man einer Funktion $f:M\to\mathbb{Z}$ für jedes $\alpha\in A$ ihre Einschränkung f_α auf U_α zuordnet.

Man definiert jetzt Gruppenhomomorphismen $\delta^k:\check{C}^k(\mathcal{U},\mathbb{Z})\to\check{C}^{k+1}(\mathcal{U},\mathbb{Z})$, indem man für $f\in\check{C}^k(\mathcal{U},\mathbb{Z})$ und $\alpha_0,\ldots,\alpha_{k+1}\in A$ mit $U_{\alpha_0\ldots\alpha_{k+1}}\neq\emptyset$ setzt: $(\delta^k f)_{a_0\ldots a_{k+1}}:=\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i f_{\alpha_0\ldots\widehat{\alpha_i}\ldots\alpha_{k+1}}$.
Dabei bedeutet wie üblich die Notation $\alpha_0\ldots\widehat{\alpha_i}\ldots\alpha_{k+1}$, daß man den „Index mit Hut“ wegläßt. Die Funktionen auf der rechten Seite sind jedenfalls auf der Menge $U_{\alpha_0\ldots\alpha_{k+1}}$ definiert und können daher auf dieser addiert bzw. subtrahiert werden.
Falls für alle $\alpha_0,\ldots,\alpha_{k+1}\in A$ gilt daß $U_{\alpha_0\ldots\alpha_{k+1}}=\emptyset$, so setzt man $(\delta^k f):=0$

1 Gibt es für ein k keine nicht-leeren Durchschnitte $U_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$ mehr, so setze man $\check{C}^k(\mathcal{U},\mathbb{Z}):=0$.

a) Man zeige für $k \geqslant 0: \delta^{k+1} \circ \delta^k = 0$ [2].

Man nennt Koketten der Form $\delta^{k-1} f$ *k*-Koränder und solche für die $\delta^k f = 0$ gilt *k*-Kozykel .

Die Aussage in a) bedeutet, daß Koränder Kozykel sind. Man sieht jetzt auch, daß die 0-Kokette (f_α) , die einer ganzen Zahl bzw. einer globalen Funktion $f: M \to \mathbb{Z}$ zugeordnet ist, ein 0-Kozykel ist, denn es ist ja $(\delta^0 f)_{\alpha\beta} = f_\beta - f_\alpha$, und diese Differenz ist Null, wenn f_α, f_β die Einschränkungen der global definierten Funktion f auf die Mengen U_α, U_β sind. Umgekehrt sieht man auch sofort, daß ein 0-Kozykel auf diese Weise von einer globalen Funktion herkommt.

Man setzt $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) := \ker \delta^0$ und für $k \geqslant 1$ $\check{H}^k(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) := \ker \delta^k / \operatorname{Im} \delta^{k-1}$ und spricht von der *k*-ten Čechschen Kohomologiegruppe zur Überdeckung $\mathcal{U}$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$. Weil wir M als einfach zusammenhängend vorausgesetzt hatten, ist dann $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) := \ker \delta^0 = \mathbb{Z}$.

---

b) $\mathcal{U} := \{]k - 3/2, k + 1/2[\mid k \in \mathbb{Z} \}$ ist eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}$ durch offene Intervalle der Länge 2. Zeigen Sie, daß $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$ einelementig ist, d.h. in diesem Fall, daß jede 1-Kokette ein Korand ist.

c) Sei S^1 der Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$ und $U_0 := S^1$ -{(1,0)} und $U_1 := S^1 \setminus \{(-1,0)\}$ und $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$. Zeigen Sie, daß $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$ isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist.

d)

$$\begin{tikzcd}
C_{k-1} \arrow[r, "\partial^{k-1}"] \arrow[d, "\varphi_{k-1}"] & C_k \arrow[r, "\partial^k"] \arrow[d, "\varphi_k"] & C_{k+1} \arrow[d, "\varphi_{k+1}"] \\
D_{k-1} \arrow[r, "\delta^{k-1}"'] & D_k \arrow[r, "\delta^k"'] & D_{k+1}
\end{tikzcd}$$

sei ein kommutatives Diagramm von Homomorphismen abelscher Gruppen, die Zeilen seien halbexakt, d.h. es gelte: $\partial^k \circ \partial^{k-1} = 0$ und $\delta^k \circ \delta^{k-1} = 0$. Man setze $H^k(C) := \ker \partial^k / \operatorname{Im} \partial^{k-1}$, entsprechend auch $H^k(D)$, und zeige, daß der durch $\overline{\varphi_k}(\bar{x}) := \overline{\varphi_k(x)}$ definierte Gruppenhomomorphismus $\overline{\varphi_k}: H^k(C) \to H^k(D)$ wohldefiniert ist, also unabhängig vom Repräsentanten $\bar{x} \in \ker \partial^k$ ist.

e) Sei $C_{k-1} \xrightarrow{\partial^{k-1}} C_k \xrightarrow{\partial^k} C_{k+1}$ eine halbexakte Sequenz von Homorphismen abelscher Gruppen. Es seien Homomorphismen $\theta_k: C_k \to C_{k-1}$ gegeben, so daß auf C_k gilt: $\mathrm{id} = \partial^{k-1} \circ \theta_k + \theta_{k+1} \circ \partial^k$. Wieso ist dann die Sequenz sogar exakt?

d) und e) lassen sich anwenden auf Čech-Kozykelgruppen, indem man Abbildungen zwischen den Kozykelgruppen einer Überdeckung und Kozykelgruppen einer Verfeinerung konstruiert. Durch Limesbildung bezüglich der Verfeinerungen gelangt man dann zu den Čech-Kohomologiegruppen, die nur noch vom gegebenen Raum aber nicht mehr von einer Überdeckung abhängen.

Dies wird in der Vorlesung noch erläutert.

2 In der Vorlesung haben wir dies für *k*=2 durchgeführt.