Topologie, SS2015
M. Hortmann

Blatt 8

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen								
1a	b	2a	b	c	3a	b	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	1	5 Punkte=100%	

Aufgabe 1:
Ein Hausdorffraum X heißt lokalkompakt, wenn gilt:
$\forall x \in X\, \forall U(x)$ offen $\exists V(x)$ offen, $K \subset X$ kompakt: $V \subset K \subset U$, oder, was äquivalent ist:
$\forall x \in X\ \forall U(x)$ offen $\exists V(x)$ offen: $\overline{V} \subset U$ und $\overline{V}$ kompakt.

a) Ausgehend von dieser Definition zeige man:
X ist genau dann lokalkompakt, wenn eine offene Überdeckung existiert, so daß jede offene Menge aus dieser Überdeckung Teilmenge einer kompakten Teilmenge ist.

b) X sei lokalkompakt und besitze eine abzählbare Basis für seine Topologie[1].
Man zeige: es gibt eine offene Überdeckung $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von X mit
$\forall n \in \mathbb{N}: \overline{U_n} \subset U_{n+1}$ und $\overline{U_n}$ kompakt. [2].

Aufgabe 2

Seien X,Y topologische Räume, dabei sei X hausdorffsch.

Auf dem Raum der stetigen Abbildungen $\mathscr{C}(X,Y)$ definiert man die "kompakt-offene Topologie":
Für $K \subset X$ kompakt und $U \subset Y$ offen setzt man dazu $S(K,U) := \{ f \in \mathscr{C}(X,Y) \mid f(K) \subset U \}$.
Die Menge $\mathscr{S} := \{ S(K,U) \mid K \subset X$ kompakt, $U \subset Y$ offen$\}$ nehmen wir als Subbasis einer Topologie auf $\mathscr{C}(X,Y)$, der sog. "kompakt-offenen Topologie".

a) Man zeige: Ist Y hausdorffsch, so auch $\mathscr{C}(X,Y)$ mit der kompakt offenen Topologie.
b) Man betrachte die Abbildung $\Phi: \mathscr{C}(Y,Z) \times \mathscr{C}(X,Y) \to \mathscr{C}(X,Z)$, die gegeben ist durch $(g,f) \mapsto g \circ f$ und zeige: Ist Y hausdorffsch und lokalkompakt, so ist Φ stetig.

---

1 Man sagt, X erfülle das *zweite Abzählbarkeitsaxiom*.
2 Ist $\overline{U} \subset V$ kompakt, so schreibt man auch $U \subset\subset V$.

c) Sei K ein kompakter Hausdorffraum. Der Banachraum $\mathscr{C}(K)=\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ der stetigen reellwertigen Funktionen auf K ist versehen mit der Norm $\|f\|:=\sup_{x\in K}|f(x)|$.

Man zeige: die durch diese Norm bzw. die induzierte Metrik gegebene Topologie auf $\mathscr{C}(K)$ ist identisch mit der kompakt offenen Topologie auf $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$.

Aufgabe 3

Kontext: "Teilung der Eins":
Benutzen Sie Ihre Kenntnisse aus der Analysis um zu zeigen:

a) Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x):=\begin{cases} 0 & x\leq 0 \\ \exp(-\frac{1}{x}) & x>0 \end{cases}$ ist beliebig oft differenzierbar.

b) Können Sie auch eine Funktion $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ konstruieren, die beliebig oft differenzierbar ist und für die gilt: $\forall x\in\mathbb{R}:\ x<0\to g(x)=0$ und $x>1\to g(x)=1$.
In b) soll es nur um die Konstruktion gehen, nicht die Differenzierbarkeitsnachweise im Einzelnen.