Topologie, SS2015
M. Hortmann

Blatt 7

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen							
1a	b	c	2	3	4	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	4 Punkte=100%	

Aufgabe 1
Auf dem komplexen Vektorraum $\mathbb{C}^n$ gibt es das "kanonische hermitische Produkt", welches durch $<z,w>:=\sum_{i=1}^{n_i} z_i \overline{w_i}$ erklärt ist. Durch $\|z\|^2:=<z,z>$ wird die übliche euklidische Norm erklärt.

Ein komplexer Vektorraum ist in kanonischer Weise auch ein reeller Vektorraum, indem man die Multiplikation mit Skalaren von komplexen auf reelle Skalare einschränkt. Man hat damit einen kanonischen Isomorphismus $\mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}, (z_1, \ldots, z_n)=(x_1+y_1 i, \ldots, x_n+y_n i) \mapsto (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$
Der Realteil des hermitischen Produkts ist dann ein Skalarprodukt auf dem reellen Vektorraum, und Vektoren der Länge 1 bezüglich des hermitischen Produkts sind identisch mit Vektoren der Länge 1 bezüglich des Skalarprodukts.

Insbesondere sind Vektoren der Länge 1 im $\mathbb{C}^2$ bezüglich des hermitischen Produkts zu identifizieren mit Vektoren der Länge 1 im $\mathbb{R}^4$ via $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 i \\ b_1+b_2 i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ [1], also mit Elementen der Sphäre S^3.

Fassen wir demnach S^3 als Teilmenge von $\mathbb{C}^2$ auf:

a) Wieso ist durch $(a,b) \mapsto (2\operatorname{Re} a\overline{b}, 2\operatorname{Im} a\overline{b}, |a|^2-|b|^2)$ eine surjektive (stetige) Abbildung $\pi: S^3 \to S^2$ gegeben? (Sie gehen also aus von $|a|^2+|b|^2=1$.)

b) Die Aussagen " $\pi(x)=\pi(y)$ ", und " x, y liegen im selben (komplex-)eindimensionalen Unterraum von $\mathbb{C}^2$ " sind äquivalent.

1 denn es gilt ja $a\overline{a}+b\overline{b}=a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2$

c) Für alle $y \in S^2$ gilt: Es gibt eine stetige bijektive Abbildung $S^1 \to \pi^{-1}(\{y\})$.
Freiwillige Sonderaufgabe: Warum ist diese automatisch ein Homömorphismus?

Man kann es also so sagen: Die S^3 zerfällt in disjunkte Kreise, und die Menge dieser Kreise ist homömorph zur S^2.

Aufgabe 2

Sei
$\gamma_1 : [0,1] \to S^2$ die konstante Abbildung $t \mapsto$ Südpol und
$\gamma_2 : [0,1] \to S^2$ die konstante Abbildung $t \mapsto$ Nordpol

Man gebe eine Formel für eine stetige Abbildung $H : [0,1] \times [0,1] \to S^2$ an mit
$H(*,0) = \gamma_1$, $H(*,1) = \gamma_2$ und $\forall s \in [0,1]$: $H(0,s) = H(1,s)$.

(Kein Trick, nur hinschreiben.)

Aufgabe 3

Ergänzung zum Stetigkeitsbegriff:
Sei *M*, *N* metrische Räume, $f : M \to N$ sei eine Abbildung.
f heißt gleichmäßig stetig, wenn $\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x, y \in M: \; d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$.
D.h. δ hängt nur von ϵ und nicht von *x* ab. Offenbar sind gleichmäßig stetige Abbildungen stetig.

Man setze jetzt voraus, daß *M* kompakt sei und *f* stetig und folgere, daß *f* gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 4

Kleine Übung zum Umgehen mit der Produktopologie:
Seien *M*,*N* topologische Räume, *N* sei Hausdorff und $f : M \to N$ sei eine Abbildung:
Man definiert $\text{Graph}(f) := \{(x,y) \in M \times N \mid y = f(x)\}$.

Man zeige jetzt:
Ist f stetig, so ist *f* genau dann stetig, wenn Graph(*f*) abgeschlossen ist.