

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

| Namen | | | | | | | | | |
|-------|----|---|---|---|----|---|---|---------------|------------|
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| 1 | 2a | b | 3 | 4 | 5a | b | c | Summe | bearbeitet |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 Punkte=100% | |
| | | | | | | | | | |

Aufgabe 1:

Seien M ein Hausdorffraum, $A, B \subset M$, A zusammenhängend und $A \subset B \subset \bar{A}$.
Man zeige: B ist zusammenhängend.

Aufgabe 2:

Die Hausdorffräume M, N seien zusammenhängend.

- a) Sei $x \in M$. Man zeige, daß die Teilmenge $\{x\} \times N$ in $M \times N$ zusammenhängend ist.
b) Man zeige, daß der Produktraum $M \times N$ zusammenhängend ist.

(Hinweis zu b): Benutzen Sie ggf. den Satz, daß eine Vereinigung zusammenhängender Mengen, deren Durchschnitt nicht-leer ist, zusammenhängend ist.)

Aufgabe 3:

Sei $n \geq 1$ Man zeige: Die Einheitssphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist wegzusammenhängend.

Aufgabe 4:

Es sei $A \subset \mathbb{R}^2$ eine abzählbare Teilmenge und $L := \mathbb{R}^2 \setminus A$. Man zeige: L ist wegzusammenhängend.
(Hinweis: Wie viele Geraden im \mathbb{R}^2 gehen durch einen Punkt?)

Aufgabe 5:

Seien M, N zwei total geordnete Mengen.

Auf $M \times N$ erhält man die *lexikographische Ordnung* durch
 $(m_1, n_1) \leq (m_2, n_2) \Leftrightarrow m_1 < m_2$ oder $(m_1 = n_1$ und $n_1 \leq n_2)$

- a) Man zeige: dies ist tatsächlich eine Ordnung auf $M \times N$ und sogar eine totale Ordnung.
b) Auf jeder total geordneten Menge M mit mindestens zwei Elementen bilden die Intervalle
 $]a, b[:= \{x \in M \mid a < x < b\}$, zusätzlich falls M ein Minimum besitzt die $L_a := \{x \in M \mid x < a\}$,
zusätzlich falls M ein Maximum besitzt die $R_a := \{x \in M \mid x > a\}$ die Basis einer Topologie (τ , der sog. Ordnungstopologie, vgl. \mathbb{R}).
c) Man gehe aus von der gewöhnlichen Ordnung auf \mathbb{R} und zeige: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der durch die lexikographische Ordnung gegebenen Ordnungstopologie ist nicht zusammenhängend.