Topologie, SS2015
M. Hortmann

Blatt 5

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen										
1a	b	c	2a	b	c	d	4a	b	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	½	½	1	1	5 Punkte=100%	

Aufgabe 1:
Ein topologischer Raum heißt total unzusammenhängend, wenn die einzigen nicht-leeren zusammenhängenden Teilmengen einpunktig sind.

a) Man zeige: $\mathbb{Q}$ (mit der gewöhnlichen Topologie) ist total unzusammenhängend[1].

Sei im folgenden (M,d) ein ultrametrischer Raum, wie z.B. $\mathbb{Q}$ mit der zu einer Primzahl $p \in \mathbb{N}$ gegebenen Metrik d_p [2] . Man zeige:
b) Offene Kugeln sind abgeschlossen.
c) Die einzigen nicht-leeren zusammenhängenden Teilmengen von M sind einpunktig![3]

Aufgabe 2:
Ein metrischer Raum (M,d) heißt vollständig, wenn in ihm jede Cauchyfolge konvergiert. Dabei heißt eine Folge (x_n) in M Cauchyfolge, wenn $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0 : \mathrm{d}(x_n, x_m) < \epsilon$. Sie heißt konvergent, wenn es ein $a \in M$ gibt, so daß $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \mathrm{d}(x_n, a) < \epsilon$. Man nennt a auch den Grenzwert der Folge, zeigt, daß dieser eindeutig bestimmt ist und schreibt $a = \lim_{n \to \infty} x_n$.

a) Zeigen Sie: Der Raum $\mathbb{Q}$ mit der Metrik d_p ist nicht vollständig.

b) Ausgehend von einer Folge (a_n) in $\mathbb{Q}$ bilde man die durch $s_n := \sum_{i=1}^{n} a_i$ gebene Partialsummenfolge und zeige: Ist (a_n) eine Nullfolge bzgl. d_p (also $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$), so ist (s_n) eine Cauchyfolge bzgl. d_p .

c) Warum ist $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ in ($\mathbb{Q}, \mathrm{d}_p$) keine Nullfolge?

d) Man gebe eine Nullfolge in ($\mathbb{Q}, \mathrm{d}_p$)an, deren Elemente alle von 0 verschieden sind.

1 In der Vorlesung war gezeigt worden: $\mathbb{Q}$ ist unzusammenhängend.
2 Siehe Blatt 2 Aufg. 1 . Man benutze das Resultat von Blatt 2 Aufg. 1b)
3 Hinweis: Benutze das Ergebnis von b)

Aufgabe 3: (freiwillige Sonderaufgabe)

Betrachten Sie die Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \to]-1,1[$ gegeben durch $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$.

Wieso wird durch $\mathrm{d}(x,y) := |\varphi(x) - \varphi(y)|$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert?
Wieso ist die durch diese Metrik definiert Topologie auf $\mathbb{R}$ gleich der gewöhnlichen Topologie?

Aufgabe 4:

a) Benutzen Sie folgendes Ergebnis vom letzten Aufgabenblatt: In einem kompakten Hausdorffraum besitzt jede unendliche Teilmenge mindestens einen Häufungspunkt. Folgern Sie daraus: Ein kompakter metrischer Raum ist vollständig.

Bemerkung: Vollständige metrische Räume sind nicht unbedingt kompakt, z.B. $\mathbb{R}$. Man kann aber zeigen: Ist ein metrischer Raum vollständig bzgl. aller Metriken, die seine Topologie erzeugen, so ist er kompakt.

Es müßte dann also eine Metrik auf $\mathbb{R}$ geben, die dieselbe Topologie erzeugt wie die gewöhnliche und die nicht vollständig ist.

b) Nehmen Sie z.B. die Metrik d aus Aufgabe 3 und geben Sie eine Cauchyfolge an, die nicht konvergiert. (Beweis!)