Topologie, SS2015
M. Hortmann

Blatt 4

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen									
1	2a	b	3a	3bi	bii	4	5	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	1	1	5 Punkte=100%	

Aufgabe 1:
Erinnern Sie sich an die Definition von "Abgeschlossene Hülle".
Sei $f: M \to N$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Zeigen Sie:
f ist stetig genau dann, wenn $\forall A \subset M: \quad f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

Aufgabe 2:
a) Warum ist das offene Intervall $]0,1[\subset \mathbb{R}$ nicht kompakt? (Beweis)

b) Zeigen Sie: M ist Hausdorff genau dann wenn für jedes $x \in M$ gilt: $\{x\} = \bigcap_{\substack{U \text{ offen} \\ x \in U}} \overline{U}$.

Aufgabe 3:
Sei M ein Hausdorff-Raum.
Die Hausdorff-Eigenschaft kann man auch so beschreiben: zwei verschiedene Punkte lassen sich durch offene Umgebungen trennen. Zeigen Sie nun:

a) Eine kompakte Menge und ein außerhalb liegender Punkt lassen sich durch offene Umgebungen trennen, d.h. zu $K \subset M$ kompakt und $x \in M \setminus K$ gibt es offene Mengen $U, V \subset M$ mit $K \subset U, x \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.

Anschließend könnte man auch genauso zeigen: Zwei disjunkte kompakte Mengen lassen sich durch offene Mengen trennen.

b) Sei M sogar ein metrischer Raum, $A \subset M$ abgeschlossen und $x \notin A$. Man zeige:
i) $\quad r_x := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\} > 0$
ii) $\quad A$ und x lassen sich durch offene Mengen trennen.

Ein topologischer Raum mit der Eigenschaft, daß sich Punkte und abgeschlossene Mengen trennen lassen, heißt **regulär**; man sagt auch, er erfülle das Trennungsaxiom T3. In diesem Sinne sind also metrische Räume regulär.

Auf ähnliche Weise läßt sich zeigen: zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen eines metrischen Raums lassen sich durch offene Mengen trennen. Ein Hausdorffraum mit dieser Eigenschaft heißt **normal**; man sagt auch, er erfülle das Trennungsaxiom T4. Metrische Räume sind also in diesem Sinne normal.
Fast alle Räume, die man in der Analysis betrachtet, sind normal.
Ich verweise auf "Counterexamples in Topology" für ein Beispiel eines nicht normalen Raums. Auch das Buch von Munkres enthält Beispiele.

Aufgabe 4:
Erinnern Sie sich an die Definition von **Häufungspunkt**:
Ist M ein topologischer Raum, $T \subset M$ und $x \in M$, so heißt x Häufungspunkt von T, wenn jede offene Umgebung von x mindestens einen von x verschiedenen Punkt $y \in T$ besitzt.

Sei M ein Hausdorffraum und $K \subset M$.
Man sagt, K sei **Frechet-kompakt**, wenn jede unendliche Teilmenge $T \subset K$ mindestens einen Häufungspunkt besitzt.

Zeigen Sie: K ist kompakt $\Rightarrow$ K ist Frechet-kompakt.

Aufgabe 5:
Für $k \in \mathbb{Z}$ setze $U_k :=]k-1, k+1[= U_1(k)$. $(U_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ist also eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}$.

Konstruieren Sie stetige Funktionen $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so daß
$\forall x \notin U_k : f_k(x) = 0$ und $\forall x \in \mathbb{R} : \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k(x) = 1$.

(Könnten Sie die Frage noch beantworten wenn die f_k hätten differenzierbar oder sogar unendlich oft differenzierbar sein sollen?)

Machen Sie sich erstmal ein Bild!
Später führen wir in "parakompakten Räumen" eine entsprechende Konstruktion für beliebige Überdeckungen durch: sehr nützlich beim "Zusammenkleben" lokal gegebener Objekte. (Stichwort: Teilung der 1)