Topologie, SS2015
M. Hortmann

Blatt 3

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen										
1a	b	2a	b	3a	b	4a	b	5	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	6 Punkte=100%	

Aufgabe 1
a) Geben Sie ein Beispiel für eine stetige Abbildung, bei der nicht alle abgeschlossenen Teilmengen der Urbildmenge auf abgeschlossene Teilmengen der Bildmenge abgebildet werden. (Beweis)
b) Geben Sie ein Beispiel für eine stetige Abbildung, die nicht offen ist, d.h. bei der nicht alle Bildmengen offener Menge offen sind. (Beweis)

Aufgabe 2 (abgeschlossene Hülle)
Sei M ein topologischer Raum, $A, B \subset M$ seien Teilmengen.

a) Gilt immer $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$?
b) Gilt immer $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$?

Falls ja, beweisen Sie es, falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 3
Sei M,N topologische Räume, $f : M \to N$ sei stetig.

a) Sei weiterhin $L \subset M$ eine Teilmenge von M, versehen mit der durch M vererbten Relativtopologie. Zeigen Sie: die Einschränkung von f auf L , d.h. die Abbildung $f_{|L} : L \to N$ ist stetig.

b) Es gelte $f(M) \subset K \subset N$. Damit läßt sich f auch als Abbildung $M \to K$ auffassen[1]. Wieso ist diese Abbildung stetig, wenn wir von der durch N induzierten Relativtopologie auf K ausgehen?

1 Die Einschränkung einer Abbildung auf Teilmengen des Definitionsbereichs ist immer möglich, und man hat mit $f_{|L}$ eine Standardnotation dafür. Für eine Verkleinerung (falls möglich) oder Vergrößerung des Wertebereichs gibt es keine Standardnotation.

Aufgabe 4

Sei $N := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Nordpol der Einheitssphäre $S^2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$.

Die stereographische Projektion $\varphi : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2$ ist so definiert:

Man lege eine Gerade durch den Nordpol und den Punkt $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S^2$. Dann gibt es genau einen Punkt der Form $\begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$ auf dieser Geraden. Man setze $\varphi(P) := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

a) Finden Sie Formeln für φ und φ^{-1} , d.h. drücken Sie u,v als Funktionen von x,y,z , und auch umgekehrt x,y,z als Funktionen von u,v aus.

b) Wieso ist φ ein Homöomorphismus?

Bemerkung: Die stereographische Projektion läßt sich analog in höherdimensionalen Räumen definieren.

Aufgabe 5

Wir hatten den reellen projektiven Raum $\mathbb{P}^n$ definiert als Menge der Geraden durch den Nullpunkt in $\mathbb{R}^{n+1}$, bzw. als Menge der eindimensionalen Unterräume von $\mathbb{R}^{n+1}$. Die kanonische Projektion $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$ bildet einen vom Nullpunkt verschiedenen Punkt gerade auf den durch ihn erzeugten eindimensionalen Unterraum ab.

Man versieht $\mathbb{P}^n$ mit der durch die kanonische Projektion definierten Finaltopologie.

Zeigen Sie, daß $\mathbb{P}^n$ mit dieser Topologie ein Hausdorff-Raum ist.