**Topologie, SS2015**
**M. Hortmann**

**Blatt 2**

**bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen**

| **Namen** | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | |
| 1a | b | c | 2a | b | c | 3a | b | 4 | **Summe** | **bearbeitet** |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 Punkte=100% | |
| | | | | | | | | | | |

## Aufgabe 1

Sei $p\in\mathbb{N}$ eine Primzahl. Man kann jede rationale Zahl $0\neq x\in\mathbb{Q}$ in der Form $x=p^k\frac{m}{n}$ schreiben, wobei $m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}, n\in\mathbb{N}$ nicht durch p teilbar sind. m,n und $k\in\mathbb{Z}$ sind dann eindeutig bestimmt. Man setze $|x|_p:=2^{-k}$, $|0|_p:=0$ und zeige

a) $\forall x,y\in\mathbb{Q}:\ |x+y|_p\leq\max\{|x|_p,|y|_p\}$

Man zeigt auch leicht (kein Teil der Aufgabe):
$\forall x\in\mathbb{Q}:\ |x|_p=0\ \Leftrightarrow\ x=0$ und $\forall x,y\in\mathbb{Q}:\ |x\cdot y|_p=|x|_p\cdot|y|_p$ ; außerdem gilt natürlich
$\forall x,y\in\mathbb{Q}:\quad \max\{|x|_p,|y|_p\}\leq|x|_p+|y|_p$ .
Damit ist durch $d_p(x,y):=|x-y|_p$ eine Metrik auf $\mathbb{Q}$ gegeben, für die eine Verstärkung der Dreiecksungleichung gilt:

$$\forall x,y,z\in\mathbb{Q}:\ d_p(x,z)\leq\max\{d_p(x,y),d_p(x,z)\}.$$

Ein metrischer Raum mit einer solchen "ultrametrischen Ungleichung" heißt "ultrametrischer Raum". Die oben für jede Primzahl $p$ definierten Ultrametriken auf $\mathbb{Q}$ sind ein wichtiges Werkzeug der Zahlentheorie. Für uns sind ultrametrische Räume eine wichtige Beispielklasse in der Topologie mit oft seltsam erscheinenden Eigenschaften. Zeigen Sie zum Beispiel:

b) Ist $(M,d)$ ein ultrametrischer Raum und seien $U:=U_\epsilon(x)$, $V:=U_\delta(y)$ zwei offene Kugeln in $M$ mit $U\cap V\neq\emptyset$. Dann gilt $U\subset V$ oder $V\subset U$ .

c) Sei $p$=3. Welche natürlichen Zahlen liegen in der offenen Kugel $U_{1/2}(5/2)$ ?

Hier noch einmal die Definition von "Basis einer Topologie":
Sei $X$ eine Menge und $\mathscr{B} \subset \mathfrak{P}(X)$.
$\mathscr{B}$ heißt Basis einer Topologie auf $X$, wenn
1. $\forall x \in X\ \exists U \in \mathscr{B}: x \in U$ 2. $\forall U, V \in \mathscr{B}\ \forall x \in U \cap V\ \exists W \in \mathscr{B}: x \in W \subset U \cap V$.
Die von $\mathscr{B}$ erzeugte Topologie wird dann definiert durch:
$\mathcal{O} := \{ U \subset X \mid \forall x \in U\ \exists V \in \mathscr{B}: x \in V \subset U \}$.

Machen Sie sich noch einmal klar, daß gilt:

Eine Teilmenge $\mathscr{B}$ einer Topologie $\mathcal{O}$ auf $X$ ist Basis von $\mathcal{O}$ genau dann wenn $\forall U \in \mathcal{O}\ \forall x \in U\ \exists V \in \mathscr{B}: x \in V \subset U$, bzw. genau dann wenn jede offene Teilmenge in $\mathcal{O}$ sich als Vereinigung von Basiselementen schreiben läßt.

**Aufgabe 2**

a) Offenbar sind die offenen Intervalle $]a,b[$ eine Basis der üblichen Topologie auf $\mathbb{R}$.
Zeigen Sie, daß bereits die offenen Intervalle mit rationalen Endpunkten eine Basis dieser Topologie bilden.

b) Geben Sie eine Subbasis für die übliche Topologie auf $\mathbb{R}$ an, die keine Basis ist.

c) Die offenen Rechtecke $]a, b[ \times ]c, d[$ bilden eine Basis der Produkttopologie des $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, daß die Menge der offenen Kugeln bezüglich der euklidischen Metrik ebenfalls eine Basis dieser Topologie bildet.

**Aufgabe 3**

a) Seien $a, b \in \mathbb{Z}, a > 0, b \geq 0$. Zeigen Sie, daß die Mengen $U_a(b) := \{ a\,n + b \mid n \in \mathbb{Z} \} =: a\,\mathbb{Z} + b$ eine Basis einer Topologie auf $\mathbb{Z}$ bilden.
b) Zeigen Sie, daß die Mengen $U_a(b)$ auch abgeschlossen bezüglich dieser Topologie sind.

Anwendung dieser Topologie:
Weil alle Basismengen unendlich sind, ist klar, daß keine nicht-leere endliche Teilmenge von $\mathbb{Z}$ bezüglich dieser Topologie offen sein kann, und damit auch kein Komplement einer nicht-leeren endlichen Teilmenge von $\mathbb{Z}$ abgeschlossen sein kann.

Trivialerweise gilt: $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \text{ Primzahl}} U_p(0)$.
Die Menge auf der linken Seite ist nicht abgeschlossen, wie eben bemerkt.
Gäbe es nur endlich viele Primzahlen, so wäre die Menge auf der rechten Seite abgeschlossen.
Also gibt es unendlich viele Primzahlen!

**Aufgabe 4**

Seien $(X, \mathcal{O})$, $(Y, \mathscr{T})$ topologische Räume, $A \subset X$ und $B \subset Y$ seien darin jeweils abgeschlossen.
Zeigen Sie, daß $A \times B$ abgeschlossen bezüglich der Produkttopologie auf $X \times Y$ ist.
(Hinweis: benutzen Sie eine Ihnen bekannte Basis der Produkttopologie.)