Topologie, SS2015
M. Hortmann

Blatt 1

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen									
1a	b	2a	b	c	d	e	3	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	1	1	6 Punkte=100%	

1. **Mächtigkeit**
a) Geben Sie eine Formel für eine bijektive Abbildung $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ an[1].
b) Geben Sie eine bijektive Abbildung $\mathfrak{P}(\mathbb{N})\to\mathfrak{P}(\mathbb{N})\times\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ an.

Bemerkung:
Es gilt zwar grundsätzlich: Ist *M* eine unendliche Menge, so sind *M* und *M* x *M* gleichmächtig.
Es ist aber in den obigen Fällen b),c) einfacher, nicht den allgemeinen Fall zu betrachten, dessen Beweis (Satz von Hessenberg) recht aufwändig ist.

Mengenbildungs-Axiome, die bisher nicht explizit erwähnt wurden, von denen wir aber immer ausgehen wollen, sind auch:

Ist *I* eine Menge und $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen, so sind
$M:=\{A_i \mid i\in I\}$ und $\bigcup_{i\in I} A_i:=\{x \mid \exists i\in I:\ x\in A_i\}$ ebenfalls Mengen.

Fundierungsaxiom:
Jede Menge *M* besitzt ein Element $a\in M$, für welches gilt: $a\cap M=\emptyset$.

Mit Mengen, die sich selbst als Element enthalten, möchte man nach der Erfahrung der Russellschen Antinomie lieber nichts zu tun haben. Wie Sie gleich zeigen sollen, schließt das Fundierungsaxiom derlei aus.

1 D.h. geben Sie eine Formel, mit der man $f(i,j)$ konkret ausrechnen kann und beweisen Sie, daß die damit gegebene Abbildung injektiv und surjektiv ist.

2. **Ordinalzahlen**

a) Es gibt keine Mengen *a*, *b* für die gilt: $a \in a$ oder $a \in b \in a$.

Eine Menge *M* heißt *connex*, wenn für beliebige $a, b \in M$ gilt: $a \in b$ oder $a=b$ oder $b \in a$.
Sie heißt *transitiv*, wenn $\forall x \in M \ \forall y \in x : y \in M$, dh. wenn $\forall x \in M : x \subset M$.

Man nennt eine connexe transitive Menge auch **Ordinalzahl**.

Eine Ordinalzahl α ist eine durch die Elementbeziehung wohlgeordnete Menge[2]:

Zunächst folgt nämlich für eine Ordinalzahl α sofort aus dem Fundierungsaxiom, daß
$\forall \beta \in \alpha : \beta \notin \beta$ und $\forall \beta, \gamma \in \alpha : \gamma \in \beta \to \beta \notin \gamma$.

b) Zeigen Sie jetzt noch die Transitivität der Elementbeziehung auf α:
$\forall \beta, \gamma, \delta \in \alpha: \ \beta \in \gamma \text{ und } \gamma \in \delta \ \Rightarrow \ \beta \in \delta$

Wegen der Konnexität ist dann α sogar total geordnet.

c) Zeigen Sie mit Hilfe des Fundierungsaxioms, daß die so gegebene totale Ordnung auf α sogar eine Wohlordnung ist, d.h. zeigen Sie:
Jede nicht-leere Teilmenge $\beta \subset \alpha$ besitzt ein kleinstes Element, d.h. $\exists \gamma \in \beta \ \forall \delta \in \beta : \ \gamma \neq \delta \to \gamma \in \delta$.

Offenbar ist die leere Menge eine Ordinalzahl.

d) Zeigen Sie: Ist α eine Ordinalzahl und $\alpha \neq \emptyset$, so ist $\emptyset \in \alpha$.
e) Zeigen Sie: Ist α eine Ordinalzahl, so ist $\alpha \cup \{\alpha\}$ eine Ordinalzahl.

Damit sind auch $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ Ordinalzahlen.

Aufgabe 3
Ist *M* eine Menge und $\mathcal{O} \subset \mathfrak{P}(M)$, so heißt $\mathcal{O}$ Topologie auf M, wenn gilt:
1. $\emptyset, M \in \mathcal{O}$
2. $\forall A, B \in \mathcal{O}: \ A \cap B \in \mathcal{O}$
3. Ist $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Elementen von $\mathcal{O}$, so folgt $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{O}$.

Man nennt die Elemente von $\mathcal{O}$ auch offene Teilmengen von *M* (bezüglich $\mathcal{O}$).

Man betrachte die dreielelementige Menge $M := \{1, 2, 3\}$.
Eine Topologie auf *M* ist eine Teilmenge der Potenzmenge von *M*. Bei einer endlichen Ausgangsmenge *M* reduziert sich die dritte Topologie-Eigenschaft auf $\forall A, B \in \mathcal{O}: \ A \cup B \in \mathcal{O}$.
$\mathfrak{P}(M)$ besitzt 8 Elemente, also $2^8 = 256$ Teilmengen. Es kann also höchstens 256 Topologien auf *M* geben. In Wirklichkeit sind es aber viel weniger.

Schreiben Sie alle Topologien auf *M* konkret hin [3].

---

2 d.h. die $\in$ -Relation übernimmt die Rolle von $<$. Man definiert bei Ordnungen grundsätzlich $\leq$ durch "$<$ oder $=$" , und ggf. umgekehrt $<$ durch "$\leq$ und $\neq$ ".

3 Z.B. sind $\mathfrak{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3,\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ und $\{ \emptyset , \{1, 2, 3\}\}$ Topologien auf *M*.