M. Künzer

Homologische Algebra, WS 09/10

Lösung 9

Aufgabe 35

(1) Zunächst einmal halten wir fest, daß $0_{\mathcal{A}}$ auch in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ ein Nullobjekt ist, da zu und von diesem Objekt nur ein repräsentierender Morphismus existiert. Wir können also $0_{\mathcal{A}/\mathcal{N}} := 0_{\mathcal{A}}$ wählen.

Zeigen wir, daß die Kategorie $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ additiv ist.

Zu (Add 1). Seien $X_1,\, X_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}/\mathcal{N}) = \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Wir bilden $X_1 \oplus X_2$ in $\mathcal{A}$, zusammen mit Inklusionsmorphismen ι_1, ι_2 und Projektionsmorphismen π_1, π_2.

Wir *behaupten,* daß $X_1 \oplus X_2$ zusammen mit den gleichnamigen Restklassen ι_1, ι_2, π_1 und π_2 eine direkte Summe ist.

Zu (Sum 1). Sei $S \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}/\mathcal{N}) = \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Seien $S \xrightarrow{s_1} X_1$ und $S \xrightarrow{s_2} X_2$ Morphismen in $\mathcal{A}$, welche Morphismen in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ repräsentieren. Dann sind die Gleichheiten $(\, s_1\; s_2 \,)\,\pi_1 = s_1$ und $(\, s_1\; s_2 \,)\,\pi_2 = s_2$ bereits in $\mathcal{A}$ gültig, also a fortiori auch in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$.

Zu zeigen bleibt die Eindeutigkeit. Sei $S \xrightarrow{(\,\tilde{s}_1\; \tilde{s}_2\,)} X_1 \oplus X_2$ mit $\tilde{s}_1 = (\,\tilde{s}_1\; \tilde{s}_2\,)\,\pi_1 \equiv_{\mathcal{N}} s_1$ und $\tilde{s}_2 = (\,\tilde{s}_1\; \tilde{s}_2\,)\,\pi_2 \equiv_{\mathcal{N}} s_2$. Zu zeigen ist, daß $(\,\tilde{s}_1\; \tilde{s}_2\,) \overset{!}{\equiv}_{\mathcal{N}} (\, s_1\; s_2 \,)$, i.e. daß $(\,\tilde{s}_1 - s_1 \quad \tilde{s}_2 - s_2\,) \overset{!}{\equiv}_{\mathcal{N}} 0$.

Wir können $(S \xrightarrow{\tilde{s}_1 - s_1} X_1) = (S \xrightarrow{u_1} N_1 \xrightarrow{v_1} X_1)$ und $(S \xrightarrow{\tilde{s}_2 - s_2} X_2) = (S \xrightarrow{u_2} N_2 \xrightarrow{v_2} X_2)$ faktorisieren. Also wird

$$\Big(\, S \xrightarrow{(\,\tilde{s}_1 - s_1 \quad \tilde{s}_2 - s_2\,)} X_1 \oplus X_2 \,\Big) \;=\; \Big(\, S \xrightarrow{(\,u_1\; u_2\,)} N_1 \oplus N_2 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{smallmatrix}\right)} X_1 \oplus X_2 \,\Big)\,,$$

und $N_1 \oplus N_2 \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$. Somit ist in der Tat $(\,\tilde{s}_1 - s_1 \quad \tilde{s}_2 - s_2\,) \overset{!}{\equiv}_{\mathcal{N}} 0$.

Zu (Sum 2). Dual zu (Sum 1).

Zu (Sum 3). Vererbt sich von $\mathcal{A}$.

Dies zeigt die *Behauptung.*

Zu (Add 2). Sei $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Bemerken wir zunächst, daß, ausführlich geschrieben,

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) + {}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X \oplus X,\, X \oplus X) \;=\; \begin{pmatrix} 1 + {}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,X) & 0 + {}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,X) \\ 1 + {}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,X) & 1 + {}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,X) \end{pmatrix}\,,$$

wie Komposition der linken Seite mit ι_i und π_j in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ für $i,\, j \in \{1,2\}$ zeigt.

Da $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ in $\mathcal{A}$ ein Isomorphismus ist, ist nun auch $R\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) + {}_{\mathcal{A}/\mathcal{N}}(X \oplus X,\, X \oplus X)$ in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ ein Isomorphismus.

Zeigen wir, daß der Funktor $\mathcal{A} \xrightarrow{R} \mathcal{A}/\mathcal{N}$ additiv ist.

Beachte, daß R auf den Objekten identisch operiert.

Zunächst ist $R0_{\mathcal{A}} = 0_{\mathcal{A}} = 0_{\mathcal{A}/\mathcal{N}}$, wie schon festgestellt.

Seien $X_1,\, X_2 \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Es ist zu zeigen, daß $R(X_1 \oplus X_2) \xrightarrow{(\,R\pi_1\; R\pi_2\,)} RX_1 \oplus RX_2$ monomorph ist. Da direkte Summen in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ nach dem eben Gezeigten wie in $\mathcal{A}$ gebildet werden, und da das auch für die Repräsentanten der Inklusions- und Projektionsmorphismen zutrifft, ist dieser Morphismus gleich

$$X_1 \oplus X_2 \xrightarrow{\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right)} X_1 \oplus X_2\,,$$

i.e. gleich der Identität, welche insbesondere monomorph ist.

Vgl. Bemerkung 114.

(2) *Zur Eindeutigkeit.*

Da $\mathcal{A} \xrightarrow{R} \mathcal{A}/\mathcal{N}$ auf den Morphismen surjektiv abbildet, ist $\bar{F}$ durch die Bedingung $\bar{F} \circ R = F$ eindeutig festgelegt.

Zur Existenz.

Setze $\bar{F}RX = \bar{F}X := FX$ für $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}/\mathcal{N}) = \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$.

Setze $\bar{F}(RX \xrightarrow{Rf} RX') := F(X \xrightarrow{f} X')$. Dies ist wohldefiniert, da aus $Rf = R\tilde{f}$ folgt, daß wir eine Faktorisierung

$$(X \xrightarrow{f-\tilde{f}} X') \;=\; (X \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} X')$$

mit $N \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$ haben, und sich folglich

$$(FX \xrightarrow{\quad Ff-F\tilde{f}\quad} FX') \;=\; (FX \xrightarrow{Fu} \underbrace{FN}_{\simeq 0} \xrightarrow{Fv} FX') \;=\; 0$$

ergibt.

Es ist $\bar{F}$ ein Funktor, da zum einen

$$\bar{F}(RX \xrightarrow{\mathrm{id}_{RX} = R\,\mathrm{id}_X} RX) \;=\; F(X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X) \;=\; (FX \xrightarrow{F\,\mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{FX}} FX)$$

ist, und sich für $X \xrightarrow{f} X' \xrightarrow{f'} X''$ in $\mathcal{A}$ zum anderen

$$\begin{array}{rcl}
\bar{F}(RX \xrightarrow{(Rf)(Rf')} RX'') & = & \bar{F}(RX \xrightarrow{R(ff')} RX'') \\
& = & F(X \xrightarrow{ff'} X'') \\
& = & F(X \xrightarrow{f} X' \xrightarrow{f'} X'') \\
& = & (FX \xrightarrow{Ff} FX' \xrightarrow{Ff'} FX'') \\
& = & (\bar{F}RX \xrightarrow{\bar{F}Rf} \bar{F}RX' \xrightarrow{\bar{F}Rf'} \bar{F}RX'')
\end{array}$$

ergibt.

Nach Konstruktion ist $\bar{F} \circ R = F$.

Schließlich ist $\bar{F}0_{\mathcal{A}/\mathcal{N}} = \bar{F}R0_{\mathcal{A}} = F0_{\mathcal{A}} \simeq 0_{\mathcal{B}}$ und

$$\left(\begin{smallmatrix} \bar{F}\pi_1 & \bar{F}\pi_2 \end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} \bar{F}R\pi_1 & \bar{F}R\pi_2 \end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} F\pi_1 & F\pi_2 \end{smallmatrix}\right) \;:\; F(X_1 \oplus X_2) \longrightarrow FX_1 \oplus FX_2$$

ein Isomorphismus für $X_1\,,\, X_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}/\mathcal{N}) = \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Also ist $\bar{F}$ additiv.

Vgl. Bemerkung 115.(1).

(3) Zur Eindeutigkeit. Da $\mathcal{A} \xrightarrow{R} \mathcal{A}/\mathcal{N}$ auf den Objekten identisch, und damit insbesondere surjektiv abbildet, ist $\bar{\alpha}$ durch die Bedingung $\bar{\alpha}RX = \alpha X$ für $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ eindeutig festgelegt.

Zur Existenz. Wir setzen $\bar{\alpha}X := \alpha X$ für $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}/\mathcal{N}) = \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Wir haben die Natürlichkeit von $(\alpha X)_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}/\mathcal{N})}$ zu zeigen. Repräsentiert $X \xrightarrow{f} X'$ einen Morphismus gleichen Namens in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$, so wird in der Tat

$$(\bar{F}f)(\bar{\alpha}X') \;=\; (Ff)(\alpha X') \;=\; (\alpha X)(Gf) \;=\; (\bar{\alpha}X)(\bar{G}f)\,.$$

Vgl. Bemerkung 115.(2).

Aufgabe 36

Sei $Z \xrightarrow[\sim]{(\,u\;v\,)} X \oplus Y$. Seien $X \oplus Y \xrightarrow{\pi_X} X$ und $X \oplus Y \xrightarrow{\pi_Y} Y$ die Projektionen auf die Summanden; i.e. $\pi_X = \binom{1}{0}$, $\pi_Y = \binom{0}{1}$. Wir erhalten folgendes kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
FZ \arrow[r, "\alpha Z"] \arrow[d, "F(\,u\;v\,)"', "\wr"] & GZ \arrow[d, "G(\,u\;v\,)", "\wr"'] \\
F(X \oplus Y) \arrow[r, "\alpha(X\oplus Y)"] \arrow[d, "(\,F\pi_X\;F\pi_Y\,)"', "\wr"] & G(X \oplus Y) \arrow[d, "(\,G\pi_X\;G\pi_Y\,)", "\wr"'] \\
FX \oplus FY \arrow[r, "\begin{pmatrix}\alpha X & 0 \\ 0 & \alpha Y\end{pmatrix}"] & GX \oplus GY
\end{tikzcd}$$

In der Tat kommutiert das obere Viereck dank der Natürlichkeit von α. Das untere Viereck kommutiert wegen

$$\alpha(X\oplus Y)\,\big(\,G\pi_X\;G\pi_Y\,\big) \;=\; \big(\,(\alpha(X\oplus Y))(G\pi_X)\;(\alpha(X\oplus Y))(G\pi_Y)\,\big) \;=\; \big(\,(F\pi_X)(\alpha X)\;(F\pi_Y)(\alpha Y)\,\big) \;=\; \big(\,F\pi_X\;F\pi_Y\,\big)\begin{pmatrix}\alpha X & 0 \\ 0 & \alpha Y\end{pmatrix}\;.$$

Sind αX und αY Isomorphismen, so auch $\begin{pmatrix}\alpha X & 0 \\ 0 & \alpha Y\end{pmatrix}$ und damit auch αZ.

Aufgabe 37

(1) Schreibe $F := {}_{\mathbf{Z}}(-,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) : \mathbf{Z}\text{-Mod}^\circ \longrightarrow \mathbf{Z}\text{-Mod}$. Es ist F ein additiver Funktor; vgl. Beispiel 112.(3).

Jedes Objekt von $\mathbf{Z}/k$-mod ist isomorph zu einer direkten Summe zyklischer abelscher Gruppen der Form $\mathbf{Z}/\ell$ mit $\ell\,|\,k$; vgl. Aufgabe 14, Bemerkung 40. Wollen wir also zeigen, daß F zu einem Funktor F_k von $\operatorname{Ob}\mathbf{Z}/k$-mod nach $\operatorname{Ob}\mathbf{Z}/k$-mod einschränkt, genügt es zu zeigen, daß $F(\mathbf{Z}/\ell)$ in $\operatorname{Ob}\mathbf{Z}/k$-mod liegt. Aber es ist

$$F(\mathbf{Z}/\ell) \;=\; {}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/\ell,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \;=\; \{\mathbf{Z}/\ell \longrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\,,\; z+\ell\mathbf{Z} \longmapsto z\cdot\tfrac{a}{\ell}+\mathbf{Z} \;:\; a\in\mathbf{Z}\}\;.$$

Folglich ist

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Z}/\ell & \xrightarrow[\sim]{\sigma_\ell} & F(\mathbf{Z}/\ell) \\ a+\ell\mathbf{Z} & \longmapsto & (z+\ell\mathbf{Z} \longmapsto z\cdot\tfrac{a}{\ell}+\mathbf{Z})\;. \end{array}$$

Behauptung. Es ist $F_k^2 \simeq \mathrm{id} : \mathbf{Z}/k\text{-mod} \longrightarrow \mathbf{Z}/k\text{-mod}$.

Gemäß Beispiel 92 haben wir eine Transformation von $\mathrm{id}_{\mathbf{Z}\text{-Mod}}$ nach ${}_{\mathbf{Z}}(\,{}_{\mathbf{Z}}(-,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = F^2$, die bei $X \in \operatorname{Ob}\mathbf{Z}\text{-Mod}$ gegeben ist durch

$$\begin{array}{rcl} X & \xrightarrow{\tau X} & F^2X \;=\; {}_{\mathbf{Z}}(\,{}_{\mathbf{Z}}(X,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \\ x & \longmapsto & (f \longmapsto xf)\;. \end{array}$$

Es bleibt zu zeigen, daß τX für $X \in \operatorname{Ob}\mathbf{Z}/k$-mod ein Isomorphismus ist. Mit Aufgabe 36 genügt es zu zeigen, daß $\tau(\mathbf{Z}/\ell)$ ein Isomorphismus ist für $\ell\,|\,k$. Betrachte

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Z}/\ell & \xrightarrow{\tau(\mathbf{Z}/\ell)} & F^2(\mathbf{Z}/\ell) = {}_{\mathbf{Z}}(\,{}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/\ell,\,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}),\,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \\ b+\ell\mathbf{Z} & \longmapsto & \big((z+\ell\mathbf{Z} \mapsto z\cdot\tfrac{a}{\ell}+\mathbf{Z}) \longmapsto \tfrac{ab}{\ell}+\mathbf{Z}\big)\;. \end{array}$$

Es haben Urbild- und Bildbereich wegen $\mathbf{Z}/\ell \simeq F(\mathbf{Z}/\ell) \simeq F^2(\mathbf{Z}/\ell)$ gleichviele Elemente; vgl. σ_ℓ von oben. Bleibt also die Injektivität von $\tau(\mathbf{Z}/\ell)$ zu zeigen. Kommt $b+\ell\mathbf{Z}$ unter $\tau(\mathbf{Z}/\ell)$ auf null, so ist insbesondere $\frac{b}{\ell}+\mathbf{Z} = 0$, wie man erkennt, wenn man $a = 1$ setzt. Also ist $b \in \ell\mathbf{Z}$, i.e. $b+\ell\mathbf{Z} = 0$. Dies zeigt die Injektivität.

Dies zeigt die *Behauptung.*

Die Behauptung zeigt auch gleich, daß F_k eine Äquivalenz von $\mathbf{Z}/k\text{-mod}^\circ$ nach $\mathbf{Z}/k$-mod ist.

(2) Beachte, daß $t := s \cdot \ell \cdot m^{-1}$ in $\mathbf{Z}$ liegt.

Für $a \in \mathbf{Z}$ wird $(w + m\mathbf{Z} \longmapsto w \cdot \frac{a}{m} + \mathbf{Z}) \in F(\mathbf{Z}/m)$ unter $Fs = {}_{\mathbf{Z}}(s, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ geschickt auf

$$(z + \ell\mathbf{Z} \longmapsto sz + m\mathbf{Z} \longmapsto sz \cdot \frac{a}{m} + \mathbf{Z}) \;=\; (z + \ell\mathbf{Z} \longmapsto z \cdot \frac{at}{\ell} + \mathbf{Z}) \;\in\; F(\mathbf{Z}/\ell)\,.$$

Unter dem Isomorphismus σ_m aus (1) entspricht $(w + m\mathbf{Z} \longmapsto w \cdot \frac{a}{m} + \mathbf{Z})$ dem Element $a + m\mathbf{Z}$.

Unter dem Isomorphismus σ_ℓ aus (1) entspricht $(z + \ell\mathbf{Z} \longmapsto z \cdot \frac{at}{\ell} + \mathbf{Z})$ dem Element $at + \ell\mathbf{Z}$.

Also haben wir folgendes kommutative Viereck.

$$\begin{tikzcd}
F(\mathbf{Z}/\ell) \arrow[d, "\sigma_\ell"', "\wr"] & F(\mathbf{Z}/m) \arrow[l, "Fs"'] \arrow[d, "\sigma_m", "\wr"'] \\
\mathbf{Z}/\ell & \mathbf{Z}/m \arrow[l, "t"']
\end{tikzcd}$$

(3) Setze $t_{i,j} := s_{i,j} \cdot \ell_i \cdot m_j^{-1}$ für $i \in [1,p]$ und $j \in [1,q]$. Wir haben folgendes kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
F(\bigoplus_i \mathbf{Z}/\ell_i) \arrow[d, "(F\iota_1\,\dots\,F\iota_p)"', "\wr"] & F(\bigoplus_j \mathbf{Z}/m_j) \arrow[l, "F((s_{i,j})_{i,j})"'] \arrow[d, "(F\iota_1\,\dots\,F\iota_q)", "\wr"'] \\
\bigoplus_i F(\mathbf{Z}/\ell_i) \arrow[d, "\begin{pmatrix}\sigma_{\ell_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_{\ell_p}\end{pmatrix}"', "\wr"] & \bigoplus_j F(\mathbf{Z}/m_j) \arrow[l, "(Fs_{i,j})_{j,i}"'] \arrow[d, "\begin{pmatrix}\sigma_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_{m_q}\end{pmatrix}", "\wr"'] \\
\bigoplus_i \mathbf{Z}/\ell_i & \bigoplus_j \mathbf{Z}/m_j \arrow[l, "(t_{i,j})_{j,i}"']
\end{tikzcd}$$

Das untere Viereck darin kommutiert dank (2). Das obere Viereck darin kommutiert, da für $\alpha \in [1,p]$

$$\begin{array}{rcl}
(\,F\iota_1\,\dots\,F\iota_q\,)\,(Fs_{i,j})_{j,i}\,\pi_\alpha & = & \sum_j (F\iota_j)(Fs_{\alpha,j}) \\
& = & \sum_j F(s_{\alpha,j}\iota_j) \\
& = & F\big(\sum_j s_{\alpha,j}\iota_j\big) \\
& = & F\big(\,(\,s_{\alpha,1}\,\dots\,s_{\alpha,q}\,)\,\big) \\
& = & F\big(\iota_\alpha (s_{i,j})_{i,j}\big) \\
& = & F((s_{i,j})_{i,j}) F\iota_\alpha \\
& = & F((s_{i,j})_{i,j})\,(\,F\iota_1\,\dots\,F\iota_p\,)\,\pi_\alpha\;;
\end{array}$$

vgl. auch Bemerkung 111.

(4) Es bildet

$$\mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/16 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}2&4\\2&2\end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8$$

unter F gemäß (3) ab auf einen Morphismus isomorph zu

$$\mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/16 \xleftarrow{\left(\begin{smallmatrix}1&8\\1&4\end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8\,.$$

Wie in Aufgabe 15 können wir diesen zu folgender rechtsexakter Sequenz ergänzen.

$$\mathbf{Z}/4 \xleftarrow{\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/16 \xleftarrow{\left(\begin{smallmatrix}1&8\\1&4\end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8$$

Diese bildet unter F gemäß (3) ab auf eine Sequenz isomorph zu

$$\mathbf{Z}/4 \xrightarrow{(\,0\;4\,)} \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/16 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}2&4\\2&2\end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8\,.$$

Da $F = {}_{\mathbf{Z}}(-, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, ist nach Lemma 52.(2) die resultierende Sequenz isomorph zu einer linksexakten in $\mathbf{Z}$-Mod, und somit selbst linksexakt.

Da $F_{16}^2 \simeq \mathrm{id}$ auf $\mathbf{Z}/16$-mod, ist es zwingend, daß zweimaliges Anwenden von F (und zweier isomorpher Ersetzungen) unseren Morphismus bis auf Isomorphie zurückgibt. Daß unser Verfahren genau den Ausgangsmorphismus zurückgibt, und nicht nur bis auf einen Isomorphismus, ist hingegen ein glücklicher Umstand.

(5) Es bildet

$$\mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8$$

unter F gemäß (3) ab auf einen Morphismus isomorph zu

$$\mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8 \xleftarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8\ .$$

Wie in Aufgabe 15 können wir diesen zu folgender rechtsexakter Sequenz ergänzen.

$$\mathbf{Z}/8 \xleftarrow{\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8 \xleftarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8\ .$$

Diese bildet unter F gemäß (3) ab auf eine Sequenz isomorph zu

$$\mathbf{Z}/8 \xrightarrow{(1\,0\,1)} \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8\ .$$

Nach Lemma 52.(2), beachte $F = {}_{\mathbf{Z}}(-, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, ist die resultierende Sequenz isomorph zu einer linksexakten in $\mathbf{Z}$-Mod, und somit selbst linksexakt.