M. Künzer

Homologische Algebra, WS 09/10

Lösung 8

Aufgabe 31

Sei, wie angekündigt, (Rel) die Kategorie der Mengen mit Relationen als Morphismen. Wir erinnern daran, daß für Mengen X und Y also ${}_{\text{(Rel)}}(X,Y) = \{R \;:\; R \subseteq X \times Y\} = \text{Pot}(X \times Y)$ ist. Ferner ist für $X \xrightarrow{R} Y \xrightarrow{S} Z$ in (Rel) das Kompositum

$$RS \;:=\; \{(x,z) \in X \times Z \;:\; \text{es gibt ein } y \in Y \text{ mit } (x,y) \in R \text{ und } (y,z) \in S\}$$

erklärt. Die Identität auf der Menge X ist gegeben durch $\mathrm{id}_X = \{(x,x) \in X \times X \;:\; x \in X\} : X \longrightarrow X$.

Es hat (Rel) das Nullobjekt $\emptyset$, da für eine Menge X sowohl ${}_{\text{(Rel)}}(\emptyset, X) = \text{Pot}(\emptyset \times X) = \{\emptyset\}$ als auch ${}_{\text{(Rel)}}(X, \emptyset) = \text{Pot}(X \times \emptyset) = \{\emptyset\}$ einelementig sind. Dementsprechend ist der Nullmorphismus von einer Menge X in eine Menge Y durch $\emptyset \in \text{Pot}(X \times Y) = {}_{\text{(Rel)}}(X,Y)$ gegeben, $0_{X,Y} = \emptyset : X \longrightarrow Y$.

Zu (Add 1). Seien X und Y Mengen. Betrachte die disjunkte Vereinigung

$$X \sqcup Y \;:=\; \{(x,1) \;:\; x \in X\} \sqcup \{(y,2) \;:\; y \in Y\}$$

(leichter Mißbrauch der Notation $\sqcup$).

Wir haben die Relationen

$$\begin{array}{lclcccc} \iota_1 & := & \{(x,(x,1)) \in X \times (X \sqcup Y) \;:\; x \in X\} & : & X & \longrightarrow & X \sqcup Y \\ \iota_2 & := & \{(y,(y,2)) \in Y \times (X \sqcup Y) \;:\; y \in Y\} & : & Y & \longrightarrow & X \sqcup Y \end{array}$$

und

$$\begin{array}{lclcccc} \pi_1 & := & \{((x,1),x) \in (X \sqcup Y) \times X \;:\; x \in X\} & : & X \sqcup Y & \longrightarrow & X \\ \pi_2 & := & \{((y,2),y) \in (X \sqcup Y) \times Y \;:\; y \in Y\} & : & X \sqcup Y & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Wir *behaupten,* daß $X \sqcup Y$, zusammen mit ι_1, ι_2, π_1 und π_2, eine direkte Summe darstellt.

Zu (Sum 1).

Sei S eine Menge. Seien $R_X \subseteq S \times X$, i.e. $R_X : S \longrightarrow X$, und $R_Y \subseteq S \times Y$, i.e. $R_Y : S \longrightarrow Y$, gegeben.

Wir behaupten die *Existenz* und die *Eindeutigkeit* eines $R : S \longrightarrow X \sqcup Y$ mit $R\pi_1 = R_X$ und $R\pi_2 = R_Y$.

Existenz. Setze

$$R \;:=\; \left\{ (s,\alpha) \in S \times (X \sqcup Y) \;:\; \begin{array}{l} \text{falls } \alpha = (x,1) \text{ für ein } x \in X, \text{ dann } (s,x) \in R_X\,; \\ \text{falls } \alpha = (y,2) \text{ für ein } y \in Y, \text{ dann } (s,y) \in R_Y \end{array} \right\}$$

Sei $s \in S$.

Sei $x \in X$. Es ist $(s,x) \in R\pi_1$ genau dann, wenn $(s,(x,1)) \in R$, da $(x,1)$ das einzige Element in $X \sqcup Y$ ist, welches zusammen mit x in π_1 liegt. Nach Konstruktion ist $(s,(x,1)) \in R$ genau dann, wenn $(s,x) \in R_X$. Also $R\pi_1 = R_X$.

Sei $y \in Y$. Es ist $(s,y) \in R\pi_2$ genau dann, wenn $(s,(y,2)) \in R$, da $(y,2)$ das einzige Element in $X \sqcup Y$ ist, welches zusammen mit y in π_2 liegt. Nach Konstruktion ist $(s,(y,2)) \in R$ genau dann, wenn $(s,y) \in R_Y$. Also $R\pi_2 = R_Y$.

Eindeutigkeit. Sei $\tilde{R} \subseteq S \times (X \sqcup Y)$ mit $\tilde{R}\pi_1 = R_X$ und $\tilde{R}\pi_2 = R_Y$ gegeben. Sei $s \in S$.

Sei $x \in X$. Da $(x,1)$ das einzige Element in $X \sqcup Y$ ist, welches zusammen mit x in π_1 liegt, ist $(s,x) \in R_X$ genau dann, wenn $(s,(x,1)) \in \tilde{R}$. Auf der anderen Seite ist $(s,x) \in R_X$ genau dann, wenn $(s,(x,1)) \in R$. Also ist $(s,(x,1)) \in \tilde{R}$ genau dann, wenn $(s,(x,1)) \in R$.

Sei $y \in Y$. Da $(y,2)$ das einzige Element in $X \sqcup Y$ ist, welches zusammen mit y in π_2 liegt, ist $(s,y) \in R_Y$ genau dann, wenn $(s,(y,2)) \in \tilde{R}$. Auf der anderen Seite ist $(s,y) \in R_Y$ genau dann, wenn $(s,(y,2)) \in R$. Also ist $(s,(y,2)) \in \tilde{R}$ genau dann, wenn $(s,(y,2)) \in R$.

Es folgt $\tilde{R} = R$.

Zu (Sum 2). Genauso wie (Sum 1), viz. :

Sei T eine Menge. Seien $R'_X \subseteq X \times T$, i.e. $R'_X : X \longrightarrow T$, und $R'_Y \subseteq Y \times T$, i.e. $R'_Y : Y \longrightarrow T$, gegeben. Wir behaupten die *Existenz* und die *Eindeutigkeit* eines $R' : X \sqcup Y \longrightarrow T$ mit $\iota_1 R' = R'_X$ und $\iota_2 R' = R'_Y$.

Existenz. Setze

$$R' \;:=\; \left\{ (\alpha, t) \in (X \sqcup Y) \times T \;:\; \begin{array}{l} \text{falls } \alpha = (x,1) \text{ für ein } x \in X, \text{ dann } (x,t) \in R_X\,; \\ \text{falls } \alpha = (y,2) \text{ für ein } y \in Y, \text{ dann } (y,t) \in R_Y \end{array} \right\}$$

Sei $t \in T$.

Sei $x \in X$. Es ist $(x,t) \in \iota_1 R'$ genau dann, wenn $((x,1),t) \in R'$, da $(x,1)$ das einzige Element in $X \sqcup Y$ ist, welches zusammen mit x in ι_1 liegt. Nach Konstruktion ist $((x,1),t) \in R'$ genau dann, wenn $(x,t) \in R'_X$. Also $\iota_1 R' = R'_X$.

Sei $y \in Y$. Es ist $(y,t) \in \iota_2 R'$ genau dann, wenn $((y,2),t) \in R'$, da $(y,2)$ das einzige Element in $X \sqcup Y$ ist, welches zusammen mit y in ι_2 liegt. Nach Konstruktion ist $((y,2),t) \in R'$ genau dann, wenn $(y,t) \in R'_Y$. Also $\iota_2 R' = R'_Y$.

Eindeutigkeit. Sei $\tilde{R}' \subseteq (X \sqcup Y) \times T$ mit $\iota_1 \tilde{R}' = R'_X$ und $\iota_2 \tilde{R}' = R'_Y$ gegeben. Sei $t \in T$.

Sei $x \in X$. Da $(x,1)$ das einzige Element in $X \sqcup Y$ ist, welches zusammen mit x in ι_1 liegt, ist $(x,t) \in R'_X$ genau dann, wenn $((x,1),t) \in \tilde{R}'$. Auf der anderen Seite ist $(x,t) \in R'_X$ genau dann, wenn $((x,1),t) \in R'$. Also ist $((x,1),t) \in \tilde{R}'$ genau dann, wenn $((x,1),t) \in R'$.

Sei $y \in Y$. Da $(y,2)$ das einzige Element in $X \sqcup Y$ ist, welches zusammen mit y in ι_2 liegt, ist $(y,t) \in R'_Y$ genau dann, wenn $((y,2),t) \in \tilde{R}'$. Auf der anderen Seite ist $(y,t) \in R'_Y$ genau dann, wenn $((y,2),t) \in R'$. Also ist $((y,2),t) \in \tilde{R}'$ genau dann, wenn $((y,2),t) \in R'$.

Es folgt $\tilde{R}' = R'$.

Zu (Sum 3).

Seien $x,\, x' \in X$. Da $(x,1)$ das einzige Element ist, das zusammen mit x in ι_1 liegt, und da $(x',1)$ das einzige Element ist, das zusammen mit x' in π_1 liegt, ist $(x,x') \in \iota_1\pi_1$ genau dann, wenn $x = x'$. Also ist $\iota_1\pi_1 = \mathrm{id}_X$.

Seien $y,\, y' \in Y$. Da $(y,2)$ das einzige Element ist, das zusammen mit y in ι_2 liegt, und da $(y',2)$ das einzige Element ist, das zusammen mit y' in π_2 liegt, ist $(y,y') \in \iota_2\pi_2$ genau dann, wenn $y = y'$. Also ist $\iota_2\pi_2 = \mathrm{id}_Y$.

Sei $x \in X$, sei $y' \in Y$. Da $(x,1)$ das einzige Element ist, das zusammen mit x in ι_1 liegt, und da $(y',2)$ das einzige Element ist, das zusammen mit y' in π_2 liegt, und da $(x,1) \neq (y',2)$, liegt (x,y') nicht in $\iota_1\pi_2$. Folglich ist $\iota_1\pi_2 = \emptyset = 0_{X,Y}$.

Sei $y \in Y$, sei $x' \in X$. Da $(y,2)$ das einzige Element ist, das zusammen mit y in ι_2 liegt, und da $(x',1)$ das einzige Element ist, das zusammen mit x' in π_1 liegt, und da $(y,2) \neq (x',1)$, liegt (y,x') nicht in $\iota_2\pi_1$. Folglich ist $\iota_2\pi_1 = \emptyset = 0_{Y,X}$.

Dies zeigt die *Behauptung,* und damit (Add 1).

Gegen (Add 2). Um zu zeigen, daß (Add 2) nicht gilt, zeigen wir, daß für $X = \{1\}$ die Relation $X \sqcup X \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)} X \sqcup X$ kein Isomorphismus in (Rel) ist.

Kürze $\underline{1} := (1,1)$ und $\underline{2} := (1,2)$ ab, also $X \sqcup X = \{\underline{1}, \underline{2}\}$.

Berechnen wir einmal $X \xrightarrow{(1\,1)} X \sqcup X$ als Teilmenge von $X \times (X \sqcup X) = \{(1,\underline{1}),\, (1,\underline{2})\}$. Beachte, daß $\pi_1 = \{(\underline{1},1)\} : X \sqcup X \longrightarrow X$. Da $(\,1\;1\,)\,\pi_1 = 1 = \{(1,1)\}$, folgt $(1,\underline{1}) \in (\,1\;1\,)$. Beachte, daß $\pi_2 = \{(\underline{2},1)\} : X \sqcup X \longrightarrow X$. Da $(\,1\;1\,)\,\pi_2 = 1 = \{(1,1)\}$, folgt $(1,\underline{2}) \in (\,1\;1\,)$. Also ist $(\,1\;1\,) = X \times (X \sqcup X)$.

Vgl. auch den obigen Nachweis von (Sum 1), darin den Existenznachweis.

Angenommen, es ist $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \mathrm{id}_{X \sqcup X}$.

Dann ist $0 = \iota_2 \,\mathrm{id}_{X \sqcup X}\, \pi_1 = \iota_2 \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \pi_1 = (\,1\;1\,) \left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right)$. Da $(\,1\;1\,) = \{(1,\underline{1}),\, (1,\underline{2})\} = X \times (X \sqcup X)$, kann das nur erfüllt sein, wenn $\left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right) = \emptyset = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) : X \sqcup X \longrightarrow X$.

Sodann ist $1 = \iota_1 \,\mathrm{id}_{X \sqcup X}\, \pi_1 = \iota_1 \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \pi_1 = \iota_1 \left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \pi_1 = 0$, und wir haben einen *Widerspruch.*

Aufgabe 32

(1) Wir führen eine Induktion über m. Für $m = 0$ ist 0 eine direkte Summe wie verlangt.

Sei nun $m \geqslant 1$ und eine direkte Summe $X_1 \oplus \cdots \oplus X_{m-1}$ von $(X_1, \ldots, X_{m-1})$ als existent vorausgesetzt, zusammen mit Inklusionsmorphismen $\iota'_1, \ldots, \iota'_{m-1}$ und Projektionsmorphismen $\pi'_1, \ldots, \pi'_{m-1}$. Bilde die direkte Summe $(X_1 \oplus \cdots \oplus X_{m-1}) \oplus X_m$, zusammen mit Inklusionsmorphismen

$$X_1 \oplus \cdots \oplus X_{m-1} \xrightarrow{\iota''_1} (X_1 \oplus \cdots \oplus X_{m-1}) \oplus X_m \qquad \text{und} \qquad X_m \xrightarrow{\iota''_2} (X_1 \oplus \cdots \oplus X_{m-1}) \oplus X_m \;,$$

sowie Projektionsmorphismen

$$(X_1 \oplus \cdots \oplus X_{m-1}) \oplus X_m \xrightarrow{\pi''_1} X_1 \oplus \cdots \oplus X_{m-1} \qquad \text{und} \qquad (X_1 \oplus \cdots \oplus X_{m-1}) \oplus X_m \xrightarrow{\pi''_2} X_m \;.$$

Wir *behaupten,* daß $(X_1 \oplus \cdots \oplus X_{m-1}) \oplus X_m$, zusammen mit

$$\iota_i := \begin{cases} \iota'_i \iota''_1 & \text{für } i \in [1, m-1] \\ \iota''_2 & \text{für } i = m \end{cases}$$

und

$$\pi_i := \begin{cases} \pi''_1 \pi'_i & \text{für } i \in [1, m-1] \\ \pi''_2 & \text{für } i = m \end{cases}$$

eine direkte Summe von $(X_1, \ldots, X_m)$ ist.

Zu (Sum 1). Sei $S \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ und ein Tupel von Morphismen $(S \xrightarrow{s_i} X_i)_{i \in [1,m]}$ gegeben. Setze $s := \big((s_1 \, \ldots \, s_{m-1}) \; s_m \big) : S \longrightarrow (X_1 \oplus \cdots \oplus X_{m-1}) \oplus X_m$. Es wird $s\pi_i = s\pi''_1 \pi'_i = (s_1 \, \ldots \, s_{m-1}) \, \pi'_i = s_i$ für $i \in [1, m-1]$ und $s\pi_m = s\pi''_2 = s_m$. Sei umgekehrt $\tilde{s} : S \longrightarrow (X_1 \oplus \cdots \oplus X_{m-1}) \oplus X_m$ mit $\tilde{s}\pi_i = s_i$ für $i \in [1, m]$ gegeben. Dann ist zum einen $\tilde{s}\pi''_2 = \tilde{s}\pi_m = s_m$. Zum anderen ist $\tilde{s}\pi''_1 = (s_1 \, \ldots \, s_{m-1})$, da $\tilde{s}\pi''_1 \pi'_i = \tilde{s}\pi_i = s_i$ für $i \in [1, m-1]$. Insgesamt ist $\tilde{s} = s$.

Zu (Sum 2). Dual zu (Sum 1), viz.: Sei $T \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ und ein Tupel von Morphismen $(X_i \xrightarrow{t_i} T)_{i \in [1,m]}$ gegeben. Setze $t := \left(\begin{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{m-1} \end{smallmatrix} \right) \\ t_m \end{smallmatrix} \right) : (X_1 \oplus \cdots \oplus X_{m-1}) \oplus X_m \longrightarrow T$. Es wird $\iota_i t = \iota'_i \iota''_1 t = \iota'_i \left(\begin{smallmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{m-1} \end{smallmatrix} \right) = t_i$ für $i \in [1, m-1]$ und $\iota_m t = \iota''_2 t = t_m$.

Sei umgekehrt $\tilde{t} : (X_1 \oplus \cdots \oplus X_{m-1}) \oplus X_m \longrightarrow T$ mit $\iota_i \tilde{t} = t_i$ für $i \in [1, m]$ gegeben. Dann ist zum einen $\iota''_2 \tilde{t} = \iota_m \tilde{t} = t_m$. Zum anderen ist $\iota''_1 \tilde{t} = \left(\begin{smallmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{m-1} \end{smallmatrix} \right)$, da $\iota'_i \iota''_1 \tilde{t} = \iota_i \tilde{t} = t_i$ für $i \in [1, m-1]$. Insgesamt ist $\tilde{t} = t$.

Zu (Sum 3). Sei $i \in [1, m]$. Es ist $\iota_i \pi_i = \iota'_i \iota''_1 \pi''_1 \pi'_i = \iota'_i \pi'_i = 1$ falls $i \in [1, m-1]$. Es ist $\iota_i \pi_i = \iota''_2 \pi''_2 = 1$ falls $i = m$.

Seien $i, j \in [1, m]$ mit $i \neq j$. Es ist $\iota_i \pi_j = \iota'_i \iota''_1 \pi''_1 \pi'_j = \iota'_i \pi'_j = 0$ falls $i \in [1, m-1]$ und $j \in [1, m-1]$. Es ist $\iota_i \pi_j = \iota'_i \iota''_1 \pi''_2 = 0$, falls $i \in [1, m-1]$ und $j = m$. Es ist $\iota_i \pi_j = \iota''_2 \pi''_1 \pi'_j = 0$, falls $i = m$ und $j \in [1, m-1]$.

Cf. Bemerkung 100.

(2) Sei $i \in [1, \ell]$. Sei $k \in [1, n]$.

Sei $s \in [1, m]$. Zum einen ist $\iota_s \pi_s f_{i,s} = 1 \cdot f_{i,s} = \iota_s \left(\begin{smallmatrix} f_{i,1} & & \\ & \ddots & \\ & & f_{i,m} \end{smallmatrix} \right) \pi_s$. Zum anderen ist für $t \in [1, m]$ mit $t \neq s$ auch $\iota_t \pi_s f_{i,s} = 0 \cdot f_{i,s} = 0 = \iota_t \left(\begin{smallmatrix} f_{i,1} & & \\ & \ddots & \\ & & f_{i,m} \end{smallmatrix} \right) \pi_s$. Also ist $\pi_s f_{i,s} = \left(\begin{smallmatrix} f_{i,1} & & \\ & \ddots & \\ & & f_{i,m} \end{smallmatrix} \right) \pi_s$.

Für $s \in [1, m]$ ist folglich

$$(f_{i,1} \, \ldots \, f_{i,m}) \, \pi_s \;=\; f_{i,s} \;=\; (1 \, \ldots \, 1) \, \pi_s f_{i,s} \;=\; (1 \, \ldots \, 1) \left(\begin{smallmatrix} f_{i,1} & & \\ & \ddots & \\ & & f_{i,m} \end{smallmatrix} \right) \pi_s \;,$$

und also $\left(f_{i,1} \;\cdots\; f_{i,m} \right) \;=\; \left(1 \;\cdots\; 1 \right) \begin{pmatrix} f_{i,1} & & \\ & \ddots & \\ & & f_{i,m} \end{pmatrix}$.

Sei $s \in [1,m]$. Zum einen ist $g_{s,k}\iota_s\pi_s = g_{s,k}\cdot 1 = \iota_s \begin{pmatrix} g_{1,k} & & \\ & \ddots & \\ & & g_{m,k} \end{pmatrix} \pi_s$. Zum anderen ist für $t \in [1,m]$ mit $t \neq s$ auch $g_{s,k}\iota_s\pi_t = g_{s,k}\cdot 0 = 0 = \iota_s \begin{pmatrix} g_{1,k} & & \\ & \ddots & \\ & & g_{m,k} \end{pmatrix} \pi_t$. Also ist $g_{s,k}\iota_s = \iota_s \begin{pmatrix} g_{1,k} & & \\ & \ddots & \\ & & g_{m,k} \end{pmatrix}$.

Für $s \in [1,m]$ ist folglich

$$\iota_s \begin{pmatrix} g_{1,k} \\ \vdots \\ g_{m,k} \end{pmatrix} \;=\; g_{s,k} \;=\; g_{s,k}\iota_s \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \;=\; \iota_s \begin{pmatrix} g_{1,k} & & \\ & \ddots & \\ & & g_{m,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \;,$$

und also $\begin{pmatrix} g_{1,k} \\ \vdots \\ g_{m,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{1,k} & & \\ & \ddots & \\ & & g_{m,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Schließlich wird für $s \in [1,m]$

$$\begin{pmatrix} f_{i,1} & & \\ & \ddots & \\ & & f_{i,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{1,k} & & \\ & \ddots & \\ & & g_{m,k} \end{pmatrix} \pi_s \;=\; \begin{pmatrix} f_{i,1} & & \\ & \ddots & \\ & & f_{i,m} \end{pmatrix} \pi_s g_{s,k} \;=\; \pi_s f_{i,s} g_{s,k} \;=\; \begin{pmatrix} f_{i,1}g_{1,k} & & \\ & \ddots & \\ & & f_{i,m}g_{m_k} \end{pmatrix} \pi_s \;,$$

und folglich $\begin{pmatrix} f_{i,1} & & \\ & \ddots & \\ & & f_{i,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{1,k} & & \\ & \ddots & \\ & & g_{m,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{i,1}g_{1,k} & & \\ & \ddots & \\ & & f_{i,m}g_{m_k} \end{pmatrix}$.

Unter Verwendung dessen wird

$$\begin{aligned}
\iota_i (f_{i,j})_{i,j}\, (g_{j,k})_{j,k} \pi_k \;&=\; \left(f_{i,1} \;\cdots\; f_{i,m} \right) \begin{pmatrix} g_{1,k} \\ \vdots \\ g_{m,k} \end{pmatrix} \\
&=\; \left(1 \;\cdots\; 1 \right) \begin{pmatrix} f_{i,1} & & \\ & \ddots & \\ & & f_{i,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{1,k} & & \\ & \ddots & \\ & & g_{m,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\
&=\; \left(1 \;\cdots\; 1 \right) \begin{pmatrix} f_{i,1}g_{1,k} & & \\ & \ddots & \\ & & f_{i,m}g_{m,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\
&=\; \textstyle\sum_{j\in[1,m]} f_{i,j} g_{j,k} \;.
\end{aligned}$$

Es folgt $(f_{i,j})_{i,j}\, (g_{j,k})_{j,k} \;=\; \left(\sum_{j\in[1,m]} f_{i,j} g_{j,k} \right)_{i,k}$.

Cf. Bemerkung 102.

(3) Bemerken wir zunächst, daß allgemein $\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} v \;=\; \begin{pmatrix} u_1 v \\ \vdots \\ u_m v \end{pmatrix}$, wie man mit (2) oder direkt, durch Vergleich nach Komposition mit ι_i von links für $i \in [1,m]$, sieht. Dual ist allgemein $v \left(w_1 \;\cdots\; w_n \right) = \left(vw_1 \;\cdots\; vw_n \right)$.

Beachte nun, daß

$$\begin{aligned}
&\left(1 \cdots 1\; 1 \cdots 1 \right) \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \left(1 \cdots 1\; 1 \cdots 1 \right) \begin{pmatrix} \iota_1 \\ \vdots \\ \iota_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix} \;=\; \left(1 \cdots 1\; 1 \cdots 1 \right) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix} \\
&=\; \left(1 \cdots 1\; 1 \cdots 1 \right) \left(\pi_1 \;\cdots\; \pi_k \right) \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix} \;=\; \left(1 \cdots 1 \right) \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix} \;=\; \textstyle\sum_{i\in[1,k]} f_i
\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}
&\left(1 \cdots 1\; 1 \cdots 1 \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_{k+1} \\ \vdots \\ f_{k+\ell} \end{pmatrix} \;=\; \left(1 \cdots 1\; 1 \cdots 1 \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \iota_1 \\ \vdots \\ \iota_\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{k+1} \\ \vdots \\ f_{k+\ell} \end{pmatrix} \;=\; \left(1 \cdots 1\; 1 \cdots 1 \right) \begin{pmatrix} & & \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{k+1} \\ \vdots \\ f_{k+\ell} \end{pmatrix} \\
&=\; \left(1 \cdots 1\; 1 \cdots 1 \right) \left(\pi_{k+1} \;\cdots\; \pi_{k+\ell} \right) \begin{pmatrix} f_{k+1} \\ \vdots \\ f_{k+\ell} \end{pmatrix} \;=\; \left(1 \cdots 1 \right) \begin{pmatrix} f_{k+1} \\ \vdots \\ f_{k+\ell} \end{pmatrix} \;=\; \textstyle\sum_{i\in[k+1,\,k+\ell]} f_i \;.
\end{aligned}$$

Ganz analog erhalten wir $f_i + 0 = \left(\begin{smallmatrix}1 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}f_i \\ 0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1 \\ 0\end{smallmatrix}\right) f_i = \left(\begin{smallmatrix}1 & 1\end{smallmatrix}\right)\pi_1\, f_i = 1 \cdot f_i = f_i$ und $0 + f_i = \left(\begin{smallmatrix}1 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0 \\ f_i\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0 \\ 1\end{smallmatrix}\right) f_i = \left(\begin{smallmatrix}1 & 1\end{smallmatrix}\right)\pi_2\, f_i = 1 \cdot f_i = f_i$ für $i \in [1, k+\ell]$.

Wir haben nun

$$\begin{aligned}
(\textstyle\sum_{i\in[1,k]} f_i) + (\sum_{i\in[k+1,\,k+\ell]} f_i) &= \left(\begin{smallmatrix}\sum_{i\in[1,k]} f_i & \sum_{i\in[k+1,\,k+\ell]} f_i\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1 \\ 1\end{smallmatrix}\right) \\
&= \left(\begin{smallmatrix}1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1\end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ f_k & 0 \\ 0 & f_{k+1} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & f_{k+\ell}\end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix}1 \\ 1\end{smallmatrix}\right) \\
&= \left(\begin{smallmatrix}1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1\end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} f_1+0 \\ \vdots \\ f_k+0 \\ 0+f_{k+1} \\ \vdots \\ 0+f_{k+\ell}\end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{smallmatrix}1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1\end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \\ f_{k+1} \\ \vdots \\ f_{k+\ell}\end{pmatrix} \\
&= \textstyle\sum_{i\in[1,k+\ell]} f_i\,.
\end{aligned}$$

Cf. Bemerkung 103.

(4) Es wird

$$\begin{aligned}
(\textstyle\sum_{i\in[1,k]} f_i)(\sum_{j\in[1,\ell]} g_j) &= \left(\begin{smallmatrix}1 & \ldots & 1\end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k\end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix}g_1 & \ldots & g_\ell\end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix}1 \\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{smallmatrix}1 & \ldots & 1\end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} f_1 g_1 & \ldots & f_1 g_\ell \\ \vdots & & \vdots \\ f_k g_1 & \ldots & f_k g_\ell\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{smallmatrix}1 & \ldots & 1\end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} \sum_{j\in[1,\ell]} f_1 g_j \\ \vdots \\ \sum_{j\in[1,\ell]} f_k g_j\end{pmatrix} \\
&= \textstyle\sum_{i\in[1,k]}\sum_{j\in[1,\ell]} f_i g_j\,.
\end{aligned}$$

Cf. Bemerkung 104.

(5) *Zur Assoziativität.* Seien $f_1,\ f_2,\ f_3 \in {}_{\mathcal{A}}(X,Y)$. Gemäß (3) ist

$$(f_1+f_2)+f_3 \;=\; (\textstyle\sum_{i\in[1,2]} f_i) + (\sum_{i\in[3,3]} f_i) \;=\; \sum_{i\in[1,3]} f_i \;=\; (\sum_{i\in[1,1]} f_i) + (\sum_{i\in[2,3]} f_i) \;=\; f_1 + (f_2+f_3)\,.$$

Zum neutralen Element. Sei $f \in {}_{\mathcal{A}}(X,Y)$.

Es ist, wie auch schon in (3) bemerkt, $f + 0 = \left(\begin{smallmatrix}1 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}f \\ 0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1 \\ 0\end{smallmatrix}\right) f = \left(\begin{smallmatrix}1 & 1\end{smallmatrix}\right)\pi_1\, f \;=\; 1 \cdot f = f$ und $0 + f = \left(\begin{smallmatrix}1 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0 \\ f\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0 \\ 1\end{smallmatrix}\right) f = \left(\begin{smallmatrix}1 & 1\end{smallmatrix}\right)\pi_2\, f = 1 \cdot f = f$.

In einer Kategorie mit Nullobjekt, welche (Add 1) erfüllt, ist $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0 \\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right)$ stets ein Monomorphismus, da aus $0 = \left(\begin{smallmatrix}s & t\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1 & 0 \\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}s+t & 0+t\end{smallmatrix}\right)$ zunächst $t = 0$ und dann auch $s = 0$ folgt, wie aus dem bisherigen folgt. Dual hierzu ist darin $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0 \\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right)$ stets auch epimorph. Ist in einer solchen Kategorie also desweiteren bekannt, daß Morphismen, die mono- und epimorph sind, bereits Isomorphismen sind, dann ist sie additiv.

Zur Kommutativität. Seien $f,\ g \in {}_{\mathcal{A}}(X,Y)$. Es wird

$$f + g \;=\; \left(\begin{smallmatrix}1 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}f \\ g\end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix}1 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0 & f \\ g & 0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1 \\ 1\end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix}g & f\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1 \\ 1\end{smallmatrix}\right) \;=\; g + f\,.$$

Zum additiv Inversen. Sei $f \in {}_{\mathcal{A}}(X,Y)$.

Nach (Add 2) aus Definition 98 ist $X \oplus X \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}1 & 0 \\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right)} X \oplus X$ ein Isomorphismus. Sei $\left(\begin{smallmatrix}u & v \\ w & x\end{smallmatrix}\right)$ sein Inverses. Es wird

$$\left(\begin{smallmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix}1 & 0 \\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}u & v \\ w & x\end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix}u & v \\ u+w & v+x\end{smallmatrix}\right)\,.$$

Also ist $u = 1$, $v = 0$, und folglich $x = 1$ und $1 + w = 0$.

Mit (4) folgt $f + wf = 1 \cdot f + w \cdot f = (1 + w)f = 0 \cdot f = 0$.

Cf. Bemerkung 105.

(6) Sei $k \in [1, m]$. Sei $\ell \in [1, n]$. Mit (5) wird

$$\iota_k\big((f_{i,j})_{i,j} + (f'_{i,j})_{i,j}\big)\pi_\ell \;=\; \iota_k(f_{i,j})_{i,j}\pi_\ell + \iota_k(f'_{i,j})_{i,j}\pi_\ell \;=\; f_{k,\ell} + f'_{k,\ell}\,.$$

Also ist $(f_{i,j})_{i,j} + (f'_{i,j})_{i,j} = (f_{i,j} + f'_{i,j})_{i,j}$.

Cf. Bemerkung 106.

(7) Wir behaupten, daß

$$(X \oplus Y) \oplus Z \xrightarrow{\left(\left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right)\right)} X \oplus Y \oplus Z$$

ein Isomorphismus ist, der von

$$(X \oplus Y) \oplus Z \xleftarrow{\left(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)\right)} X \oplus Y \oplus Z$$

invertiert wird.

In der Tat wird unter Verwendung von (2)

$$\left(\left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right)\right)\left(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix}0&0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix}0&0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix}0&0\end{smallmatrix}\right) & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) = 1$$

und

$$\left(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)\right)\left(\left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0&0&1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right) = 1\,.$$

Aufgabe 33

(1) Die Aussage ist richtig.

Sind a und d Isomorphismen, dann ist $\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix}a^{-1}&0\\0&d^{-1}\end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ und $\begin{pmatrix}a^{-1}&0\\0&d^{-1}\end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&d\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Also ist $\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)$ ein Isomorphismus, mit $\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix}a^{-1}&0\\0&d^{-1}\end{pmatrix}$.

Sei umgekehrt $\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)$ ein Isomorphismus. Sei $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}u&v\\w&x\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}au&av\\dw&dx\end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}u&v\\w&x\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&d\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}ua&vd\\wa&xd\end{smallmatrix}\right)$. Es folgt, daß a ein Isomorphismus ist mit $a^{-1} = u$ und daß d ein Isomorphismus ist mit $d^{-1} = x$. (Ferner folgt $v = 0$ und $w = 0$.)

(2) Die Aussage ist falsch.

Die inverse Implikation trifft zu. Seien a und d Isomorphismen. Es wird $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&d\end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix}a^{-1}&-a^{-1}bd^{-1}\\0&d^{-1}\end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ und $\begin{pmatrix}a^{-1}&-a^{-1}bd^{-1}\\0&d^{-1}\end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&d\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Also ist $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&d\end{smallmatrix}\right)$ ein Isomorphismus, mit $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&d\end{smallmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix}a^{-1}&-a^{-1}bd^{-1}\\0&d^{-1}\end{pmatrix}$.

Die direkte Implikation trifft nicht zu. Betrachte z.B. in $\mathcal{A} = \mathbf{Q}$-Mod den Morphismus $\mathbf{Q} \oplus 0 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)} 0 \oplus \mathbf{Q}$. Dies ist ein Isomorphismus mit dem Inversen $\mathbf{Q} \oplus 0 \xleftarrow{\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)} 0 \oplus \mathbf{Q}$. In der Tat ist $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, da $0_0 = 1_0$; und genauso $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$.

(3) Die Aussage ist richtig.

Falls a und d Isomorphismen sind, so haben wir bereits beim Beweis der zutreffenden inversen Implikation in (2) gesehen, daß dann auch $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&d\end{smallmatrix}\right)$ ein Isomorphismus ist.

Sei umgekehrt $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ ein Isomorphismus. Sei $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} u & v \\ w & x \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} au+bw & av+bx \\ dw & dx \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} u & v \\ w & x \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} ua & ub+vd \\ wa & wb+xd \end{smallmatrix}\right)$. Da $X = X'$ und da $ua = 1$, ist $X \xrightarrow{a} X$ eine Retraktion und somit nach Voraussetzung ein Isomorphismus. Aus $wa = 0$ folgt $w = 0$. Es ist $dx = 1$ und $xd = wb + xd = 1$. Also ist auch d ein Isomorphismus.

Aufgabe 34

Zeigen wir, daß $(\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(X), +, \cdot)$ ein Ring ist, wobei $(+)$ resp. $(\cdot)$ die Morphismenaddition resp. -komposition aus $\mathcal{A}$ bezeichnet.

(Ring 1) Dank Bemerkung 105 ist $(\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(X), +)$ eine abelsche Gruppe.

(Ring 2) Assoziativität von $(\cdot)$ folgt aus der Assoziativität der Komposition in $\mathcal{A}$, i.e. (Kat 4).

(Ring 3) Das neutrale Element bezüglich $(\cdot)$ ist id_X, cf. (Kat 1,2).

(Ring 4) Distributivität von $(+, \cdot)$ folgt aus Bemerkung 104.

Zeigen wir, daß $(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y), +, \cdot, *)$ ein $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(X)$-$\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(Y)$-Bimodul ist, wobei $(+)$ durch die Morphismenaddition in $\mathcal{A}$ gegeben ist und wobei sowohl $(\cdot)$ als auch $(*)$ durch die Komposition in $\mathcal{A}$ gegeben sind.

(BiMod 1)

- (LMod 1) Dank Bemerkung 105 ist $(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y), +)$ eine abelsche Gruppe.
- (LMod 2) Assoziativität folgt aus der Assoziativität der Komposition in $\mathcal{A}$, i.e. (Kat 4).
- (LMod 3) Es verhält sich id_X multiplikativ neutral gemäß (Kat 2).
- (LMod 4) Distributivität von $(+, \cdot)$ folgt aus Bemerkung 104.

(BiMod 2)

- (RMod 1) Siehe (LMod 1).
- (RMod 2) Assoziativität folgt aus der Assoziativität der Komposition in $\mathcal{A}$, i.e. (Kat 4).
- (RMod 3) Es verhält sich id_Y multiplikativ neutral gemäß (Kat 2).
- (RMod 4) Distributivität von $(+, *)$ folgt aus Bemerkung 104.

(BiMod 3) Die Assoziativität der beiden Skalarmultiplikationen $(\cdot)$ und $(*)$ folgt aus der Assoziativität der Komposition in $\mathcal{A}$, i.e. (Kat 4).

Übrigens. Seien R und S Ringe. Ein R-Linksmodul ist auffaßbar als eine abelsche Gruppe M, zusammen mit einem Ringmorphismus $R^\circ \to \mathrm{End}_{\mathbf{Z}} M$, $r \mapsto r\cdot(-)$. Ein S-Rechtsmodul ist auffaßbar als eine abelsche Gruppe M, zusammen mit einem Ringmorphismus $S \to \mathrm{End}_{\mathbf{Z}} M$, $r \mapsto (-) * r$. Ein R-S-Bimodul ist auffaßbar als eine abelsche Gruppe M, zusammen mit einem Ringmorphismus $R^\circ \otimes_{\mathbf{Z}} S \to \mathrm{End}_{\mathbf{Z}} M$, $r \otimes s \mapsto r \cdot (-) * s$; cf. Aufgabe 20.