M. Künzer

Homologische Algebra, WS 09/10

Lösung 7

Aufgabe 27

(1) Die Aussage ist richtig. Seien $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ mit fg monomorph. Seien $T \overset{t}{\underset{t'}{\rightrightarrows}} X$ mit $tf = t'f$ gegeben. Es folgt $tfg = t'fg$ und also $t = t'$ wegen fg monomorph. Folglich ist f monomorph.

(2) Die Aussage ist richtig. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ eine Retraktion, sei $X \xleftarrow{g} Y$ mit $gf = \mathrm{id}$. Seien $Y \overset{t}{\underset{t'}{\rightrightarrows}} T$ mit $ft = ft'$ gegeben. Es folgt $t = gft = gft' = t'$. Also ist f epimorph.

(3) Die Aussage ist falsch. Sei $\mathcal{C} = \mathbf{Z}\text{-lat}$ die volle Teilkategorie von $\mathbf{Z}$-Mod, die durch $\mathrm{Ob}\,\mathbf{Z}\text{-lat} := \{\mathbf{Z}^{\oplus m} \,:\, m \geqslant 0\}$ definiert ist ("$\mathbf{Z}$-lattices"). In $\mathbf{Z}$-lat ist der Morphimus $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}$ kein Isomorphismus, da er in $\mathbf{Z}$-Mod keiner ist, mangels Surjektivität. In $\mathbf{Z}$-lat ist $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}$ ein Monomorphismus, da er dies als injektive $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung sogar in $\mathbf{Z}$-Mod ist.

Bleibt zu zeigen, daß $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}$ in $\mathbf{Z}$-lat ein Epimorphismus ist. Seien $\mathbf{Z} \overset{(t_i)_i}{\underset{(t'_i)_i}{\rightrightarrows}} \mathbf{Z}^{\oplus m}$ zwei $\mathbf{Z}$-lineare Abbildungen mit $2(t_i)_i = 2(t'_i)_i$. Es folgt $2t_i = 2t'_i$ für alle $i \in [1, m]$, somit auch $t_i = t'_i$ für alle $i \in [1, m]$, und also $(t_i)_i = (t'_i)_i$. Somit ist $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}$ in $\mathbf{Z}$-lat ein Epimorphismus.

(4) Die Aussage ist richtig. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ epimorph, und sei $X \xleftarrow{g} Y$ mit $fg = \mathrm{id}$. Es folgt $f(gf) = (fg)f = f = f\,\mathrm{id}$, und also $gf = \mathrm{id}$. Somit ist f ein Isomorphismus.

Sei 0 ein Nullobjekt. Ist $0 \to X$ ein Epimorphismus, so ist $0 \xrightarrow{\sim} X$. Denn ohnehin ist $0 \to X$ eine Coretraktion.

(5) Die Aussage ist falsch. Sei $\mathcal{C} = \mathbf{Z}$-Mod. Es ist $\mathbf{Z}/4 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2$ ein Epimorphismus, da surjektiv. In die entgegengesetzte Richtung gibt es die Morphismen $\mathbf{Z}/4 \xleftarrow{a} \mathbf{Z}/2$ mit $a \in \{0, 2\}$. Das Kompositum wird zu $(\mathbf{Z}/2 \xrightarrow{a} \mathbf{Z}/4 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2) = (\mathbf{Z}/2 \xrightarrow{0} \mathbf{Z}/2)$, und das ist ungleich der Identität auf $\mathbf{Z}/2$. Also ist $\mathbf{Z}/4 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2$ keine Retraktion.

(6) Die Aussage ist falsch. Sei $\mathcal{C} = \mathbf{Q}$-Mod. Sei $X := \coprod_{i \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}} \mathbf{Q}$. Sei $X \xrightarrow{f} X$, $(a_i)_{i \geqslant 1} \longmapsto (a_{i+1})_{i \geqslant 1}$. Dies ist eine $\mathbf{Q}$-lineare Abbildung, folglich ein Endomorphismus von X. Sei $X \xrightarrow{g} X$, $(b_i)_{i \geqslant 1} \longmapsto (b_{i-1})_{i \geqslant 1}$, wobei $b_0 := 0$ gesetzt werde. Dies ist eine $\mathbf{Q}$-lineare Abbildung. Es ist $(b_i)_{i \geqslant 1} gf = (b_{i-1})_{i \geqslant 1} f = (b_i)_{i \geqslant 1}$ für $(b_i)_i \in X$. Somit ist f eine Retraktion. Aber es ist f nicht injektiv, da $(1, 0, 0, \dots)f = 0$. Also ist f kein Automorphismus.

(7) Die Aussage ist falsch. Sei $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \mathbf{Z}$-Mod. Sei $F = \mathbf{Z}/2 \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} -$. Dann ist $F(\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}) = (\mathbf{Z}/2 \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathbf{Z} \xrightarrow{\mathbf{Z}/2 \otimes 2} \mathbf{Z}/2 \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathbf{Z})$ der Nullmorphismus, aber $\mathbf{Z}/2 \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathbf{Z} \simeq \mathbf{Z}/2 \not\simeq 0$. Also ist $F(\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z})$ kein Monomorphismus, obzwar $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}$ einer ist. Vgl. Beispiel 61.

(8) Die Aussage ist richtig. Sei f eine Coretraktion. Sei dementsprechend ein $X \xleftarrow{h} Y$ mit $fh = \mathrm{id}_X$ gegeben. Dann ist $(Ff)(Fh) = F(fh) = F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{FX}$. Also ist Fh eine Coretraktion.

Aufgabe 28

Die dualen Aussagen lauten wie folgt. Der Wahrheitsgehalt einer kategoriellen Aussage ändert sich beim Dualisieren nicht, der Deutlichkeit halber werde er angemerkt.

(1) Ist fg ein Epimorphismus, so auch g. (Richtig.)

(2) Ist f eine Coretraktion, so ist f monomorph. (Richtig.)

(3) Ist f monomorph und epimorph, so ist f ein Isomorphismus. (Selbstdual; falsch.)

(4) Ist f eine Retraktion und monomorph, so ist f ein Isomorphismus. (Richtig.)

(5) Ist f monomorph, so ist f eine Coretraktion. (Falsch.)

(6) Ist f ein Endomorphismus und eine Coretraktion, so ist f ein Automorphismus. (Falsch.)

(7) Ist f ein Epimorphismus, so auch Ff. (Falsch.)

(8) Ist f eine Retraktion, so auch Ff. (Richtig.)

Beachte für $(7, 8)$, daß auch $\mathcal{C}^\circ \longrightarrow \mathcal{D}^\circ$, $f \longmapsto Ff$ ein Funktor ist.

Aufgabe 29

(1) Wir wollen zeigen, daß

$$\begin{array}{rcl} {}_{\hat{\mathcal{C}}}\big({}_{\mathcal{C}}(-,X), F\big) & \xrightarrow{\sim} & FX \\ a = (aY)_{Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}} & \overset{\varphi}{\longmapsto} & (1_X)aX \\ (f \longmapsto \xi(Ff))_{Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}} & \overset{\psi}{\longleftarrow\!\!\shortmid} & \xi\ . \end{array}$$

Zeigen wir, daß ψ wohldefiniert ist, i.e. zeigen wir die Natürlichkeit von $((\xi\psi)Y)_{Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}} = (f \longmapsto \xi(Ff))_{Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}}$. Sei $Y \xleftarrow{g} Y'$ in $\mathcal{C}$ gegeben. Wir erhalten folgendes Viereck.

$$\begin{tikzcd} {}_{\mathcal{C}}(Y,X) \arrow[r, "(\xi\psi)Y"] \arrow[d, "{}_{\mathcal{C}}(g,X)"'] & FY \arrow[d, "Fg"] \\ {}_{\mathcal{C}}(Y',X) \arrow[r, "(\xi\psi)Y'"] & FY' \end{tikzcd}$$

Ist $f \in {}_{\mathcal{C}}(Y,X)$, so kommt es zum einen auf $f\,{}_{\mathcal{C}}(g,X)((\xi\psi)Y') = (gf)((\xi\psi)Y') = \xi F(gf) = \xi(Ff)(Fg)$. Zum anderen kommt es auf $f((\xi\psi)Y)(Fg) = \xi(Ff)(Fg)$. Also kommutiert dieses Viereck.

Zeigen wir, daß $\psi\varphi = \mathrm{id}$. Für $\xi \in FX$ ist $\xi\psi\varphi = (f \longmapsto \xi(Ff))_{Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}}\,\varphi = (1_X)(f \longmapsto \xi(Ff)) = \xi(F1_X) = \xi 1_{FX} = \xi$.

Zeigen wir, daß $\varphi\psi = \mathrm{id}$. Für $a = (aY)_{Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}} \in {}_{\hat{\mathcal{C}}}\big({}_{\mathcal{C}}(-,X), F\big)$, $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ und $f \in {}_{\mathcal{C}}(Y,X)$ ist

$$\begin{array}{rcl} f(a\varphi\psi Y) & = & f((1_X)(aX)\psi Y) \\ & = & f(f \longmapsto (1_X)(aX)(Ff)) \\ & = & (1_X)(aX)(Ff) \\ & = & (1_X)\,{}_{\mathcal{C}}(f,X)(aY) \\ & = & f(aY)\ . \end{array}$$

Also ist $a\varphi\psi Y = aY$. Also ist $a\varphi\psi = a$. Also ist $\varphi\psi = \mathrm{id}$.

Die Aussage von (1) ist als Yonedalemma bekannt.

(2) Setze

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C} & \longrightarrow & \hat{\mathcal{C}} \\ (X \xrightarrow{f} X') & \longmapsto & \big({}_{\mathcal{C}}(-,X) \xrightarrow{{}_{\mathcal{C}}(-,f)} {}_{\mathcal{C}}(-,X')\big)\ , \end{array}$$

wobei ${}_{\mathcal{C}}(-,f)Y := {}_{\mathcal{C}}(Y,f)$ für $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$. Dies ist eine Transformation, da das Viereck

$$\begin{tikzcd} {}_{\mathcal{C}}(Y,X) \arrow[r, "{}_{\mathcal{C}}(Y,f)"] \arrow[d, "{}_{\mathcal{C}}(g,X)"'] & {}_{\mathcal{C}}(Y,X') \arrow[d, "{}_{\mathcal{C}}(g,X')"] \\ {}_{\mathcal{C}}(Y',X) \arrow[r, "{}_{\mathcal{C}}(Y',f)"] & {}_{\mathcal{C}}(Y',X') \end{tikzcd}$$

für $Y \xleftarrow{g} Y'$ in $\mathcal{C}$ kommutiert. In der Tat ist ${}_{\mathcal{C}}(Y,f)\,{}_{\mathcal{C}}(g,X') = {}_{\mathcal{C}}(g,f) = {}_{\mathcal{C}}(g,X)\,{}_{\mathcal{C}}(Y',f)$, i.e. es kommt ein $h \in {}_{\mathcal{C}}(Y,X)$ zum einen auf $h\,{}_{\mathcal{C}}(Y,f)\,{}_{\mathcal{C}}(g,X') = g(hf) = ghf$, und zum anderen auf $h\,{}_{\mathcal{C}}(g,X)\,{}_{\mathcal{C}}(Y',f) = (gh)f = ghf$.

Überprüfen wir, daß ein Funktor vorliegt. Sei $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ gegeben. Es kommt 1_X auf die Transformation ${}_{\mathcal{C}}(-,1_X)$, welche an der Stelle $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ den Eintrag ${}_{\mathcal{C}}(Y,1_X) = \mathrm{id}_{{}_{\mathcal{C}}(Y,X)}$ hat, welche also die Identität auf ${}_{\mathcal{C}}(-,X)$ ist. Sei $X \xrightarrow{f} X' \xrightarrow{f'} X''$ in $\mathcal{C}$ gegeben. Bei $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ ist ${}_{\mathcal{C}}(Y,f)\,{}_{\mathcal{C}}(Y,f') = {}_{\mathcal{C}}(Y,ff')$. Folglich ist ${}_{\mathcal{C}}(-,f)\,{}_{\mathcal{C}}(-,f') = {}_{\mathcal{C}}(-,ff')$.

Es bleibt zu zeigen, daß unser Funktor voll und treu ist. Seien $X,\ X' \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ gegeben. Der Funktor liefert die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} {}_{\mathcal{C}}(X,X') & \longrightarrow & {}_{\hat{\mathcal{C}}}\big({}_{\mathcal{C}}(-,X),\, {}_{\mathcal{C}}(-,X')\big) \\ f & \longmapsto & {}_{\mathcal{C}}(-,f) \end{array}$$

Wir haben zu zeigen, daß diese bijektiv ist. Zusammengesetzt mit der Bijektion aus (1) ergibt sich

$$\begin{array}{rclcl} {}_{\mathcal{C}}(X,X') & \longrightarrow & {}_{\hat{\mathcal{C}}}\big({}_{\mathcal{C}}(-,X),\, {}_{\mathcal{C}}(-,X')\big) & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & {}_{\mathcal{C}}(X,X') \\ f & \longmapsto & {}_{\mathcal{C}}(-,f) & \longmapsto & (1_X)\,{}_{\mathcal{C}}(X,f) \;=\; f\;, \end{array}$$

und die Bijektivität unserer Abbildung folgt.

Aufgabe 30

(1) Sei $\operatorname{Ob} M^{\mathrm{k}} := M$. Sei $\operatorname{Mor} M^{\mathrm{k}} := \{(m,m') \in M \times M \;:\; m \leqslant m'\}$. Schreibe $s_{m,m'} := (m,m')$. Für einen Morphismus sei $m \xrightarrow{s_{m,m'}} m'$. Das Kompositum sei $s_{m,m'}s_{m',m''} := s_{m,m''}$; diese Komposition ist assoziativ, da zwischen zwei Objekten nicht mehr als zwei Morphismen existieren. Beachte, daß letzterer Morphismus wegen der Transitivität von $(\leqslant)$ auch existiert. Die Identität auf $m \in M$ ist durch $s_{m,m}$ gegeben. Beachte, daß dieser Morphismus wegen der Reflexivität von $(\leqslant)$ auch existiert.

Wir halten noch fest, daß $|\,{}_{M^{\mathrm{k}}}(m,m')| \in \{0,1\}$ nach Konstruktion. Sind ferner m und m' in derselben Isoklasse, so existieren die Morphismen $s_{m,m'}$ und $s_{m',m}$, wegen der Identitivität (aka Antisymmetrie) von $(\leqslant)$ ist also $m = m'$. Es folgt, daß alle Isoklassen in M^{k} einelementig sind.

(2) Sei $\mathcal{M}^{\mathrm{t}} := \operatorname{Ob}\mathcal{M}$. Für $m,\ m' \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}$ sei $m \leqslant m'$, falls ${}_{\mathcal{M}}(m,m') \neq \emptyset$.

Zur Reflexivität. Sei $m \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}$. Es ist $\mathrm{id}_m \in {}_{\mathcal{M}}(m,m)$. Also ist $m \leqslant m$.

Zur Identitivität. Seien $m,\ m' \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}$ mit $m \leqslant m'$ und $m' \leqslant m$. Sei $m \xrightarrow{\alpha} m'$ und $m' \xrightarrow{\beta} m$. Es ist $\alpha\beta = \mathrm{id}_m$, da $\mathrm{id}_m \in {}_{\mathcal{M}}(m,m)$ und $|\,{}_{\mathcal{M}}(m,m)| \in \{0,1\}$, da also ${}_{\mathcal{M}}(m,m) = \{\mathrm{id}_m\}$. Genauso folgt $\beta\alpha = \mathrm{id}_{m'}$. Also ist $m \simeq m'$. Da nach Voraussetzung alle Isoklassen einelementig sind, folgt $m = m'$.

Zur Transitivität. Seien $m,\ m',\ m'' \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}$ mit $m \leqslant m'$ und $m' \leqslant m''$. Sei $m \xrightarrow{\alpha} m'$ und $m' \xrightarrow{\beta} m''$. Da $\alpha\beta \in {}_{\mathcal{M}}(m,m'')$, ist $m \leqslant m''$.

Wir haben also eine teilgeordnete Menge $\mathcal{M}^{\mathrm{t}} = (\mathcal{M}^{\mathrm{t}}, \leqslant)$ definiert.

Setze $\mathcal{M}^{\mathrm{tk}} \longrightarrow \mathcal{M}$, $m \longmapsto m$, $s_{m,m'} \longmapsto \alpha$, wobei $\alpha \in {}_{\mathcal{M}}(m,m')$. Dies ist eine wohldefinierte Abbildung auf den Morphismen, da aus $s_{m,m'} \in \operatorname{Mor}\mathcal{M}^{\mathrm{tk}}$ folgt, daß $m \leqslant m'$, d.h. daß $|\,{}_{\mathcal{M}}(m,m')| = 1$. Es liegt ein Funktor vor, da $s_{m,m} \longmapsto \mathrm{id}_m$, weil letzterer der einzige Morphismus in $\mathcal{M}$ von m nach m ist, und da wenn $s_{m,m'} \longmapsto \alpha$ und $s_{m',m''} \longmapsto \beta$, auch $s_{m,m''} \longmapsto \alpha\beta$, weil letzterer der einzige Morphismus in $\mathcal{M}$ von m nach m'' ist.

Dieser Funktor ist strikt dicht – die Abbildung auf den Objekten ist ja sogar die Identität.

Zeigen wir, daß dieser Funktor voll und treu ist. Seien $m,\, m' \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}$ gegeben. Falls $m \not\leqslant m'$ in $\mathcal{M}^{\mathrm{t}}$, dann sind sowohl ${}_{\mathcal{M}^{\mathrm{tk}}}(m,m')$ als auch ${}_{\mathcal{M}}(m,m')$ leer, und die von unserem Funktor induzierte Abbildung von ersterer in zweitere Menge bijektiv. Falls $m \leqslant m'$ in $\mathcal{M}^{\mathrm{t}}$, dann sind sowohl ${}_{\mathcal{M}^{\mathrm{tk}}}(m,m')$ als auch ${}_{\mathcal{M}}(m,m')$ einelementig, und die von unserem Funktor induzierte Abbildung von ersterer in zweitere Menge bijektiv.

Mit Lemma 95 folgt, daß unser Funktor eine Äquivalenz ist. Folglich ist $\mathcal{M}^{\mathrm{tk}} \simeq \mathcal{M}$.

Sei umgekehrt $M = (M, \leqslant)$ eine teilgeordnete Menge. Die unterliegende Menge von M^{kt} ist gleich $\operatorname{Ob} M^{\mathrm{k}} = M$. Für $m,\, m' \in M$ ist nun $m \leqslant m'$ in M genau dann, wenn ${}_{M^{\mathrm{k}}}(m,m') \neq \emptyset$, was wiederum genau dann gilt, wenn $m \leqslant m'$ in M^{kt}. Also sind M und M^{kt} als teilgeordnete Mengen gleich.

(3) Seien M und N teilgeordnete Mengen. Sei ${}_{(\mathrm{Poset})}(M,N)$ die Menge der monotonen Abbildungen von M nach N. Setze

$$\begin{array}{rcl} {}_{(\mathrm{Poset})}(M,N) & \longrightarrow & \operatorname{Ob} [\![M^{\mathrm{k}}, N^{\mathrm{k}}]\!] \\ f & \longmapsto & f^{\mathrm{k}}\,, \end{array}$$

wobei

$$\begin{array}{rcl} M^{\mathrm{k}} & \xrightarrow{f^{\mathrm{k}}} & N^{\mathrm{k}} \\ (m \xrightarrow{s_{m,m'}} m') & \longmapsto & (mf \xrightarrow{s_{mf,m'f}} m'f)\,. \end{array}$$

Es ist f^{k} ein Funktor, da zum einen aus $s_{m,m'}$ Morphismus in M^{k}, i.e. aus $m \leqslant m'$, in der Tat folgt, daß $mf \leqslant m'f$, i.e. $s_{mf,m'f}$ Morphismus in N^{k}. Zum zweiten wird die Identität $(m \xrightarrow{s_{m,m}} m)$ auf $m \in \operatorname{Ob} M^k$ auf die Identität $(mf \xrightarrow{s_{mf,mf}} mf)$ abgebildet. Sind, zum dritten, Morphismen $m \xrightarrow{s_{m,m'}} m' \xrightarrow{s_{m',m''}} m''$ in M^{k} gegeben, so kommt ihr Kompositum $m \xrightarrow{s_{m,m''}} m''$ auf das Kompositum $mf \xrightarrow{s_{mf,m''f}} m''f$ ihrer Bilder $mf \xrightarrow{s_{mf,m'f}} m'f \xrightarrow{s_{m'f,m''f}} m''f$ in N^{k}.

Zeigen wir, daß $f \longmapsto f^{\mathrm{k}}$ bijektiv ist.

Die Umkehrabbildung bilde einen Funktor F von M^{k} nach N^{k} nach $\operatorname{Ob} F$ ab. Es ist $\operatorname{Ob} F$ eine monotone Abbildung von M nach N, da aus $m \leqslant m'$ folgt, daß der Morphismus $s_{m,m'}$ in M^{k} existiert, welcher auf einen Morphismus $Fs_{m,m'}$ von Fm nach Fm' abgebildet wird (d.h. auf $s_{Fm,Fm'}$), was $Fm \leqslant Fm'$ zur Folge hat.

Nach Konstruktion ist $\operatorname{Ob}(f^{\mathrm{k}}) = f$.

Sei umgekehrt F ein Funktor von M^{k} nach N^{k}. Wir wollen zeigen, daß $(\operatorname{Ob} F)^{\mathrm{k}} = F$. Sei $s_{m,m'}$ ein Morphismus in M^{k}. Dieser wird unter $(\operatorname{Ob} F)^{\mathrm{k}}$ auf den einzigen Morphismus von Fm nach Fm' abgebildet, welcher folglich gleich $Fs_{m,m'}$ ist (und auch gleich $s_{Fm,Fm'}$), i.e. $(\operatorname{Ob} F)^{\mathrm{k}} s_{m,m'} = Fs_{m,m'}$. Also ist $(\operatorname{Ob} F)^{\mathrm{k}} = F$.