

Lösung 6

Aufgabe 23

- (1) Sei ${}_R M \xrightarrow{f} {}_R M''$ eine surjektive R -lineare Abbildung. Zu zeigen ist, daß

$${}_R(\coprod_{\alpha \in A} P_\alpha, M) \xrightarrow{{}_R(\coprod_{\alpha \in A} P_\alpha, f)} {}_R(\coprod_{\alpha \in A} P_\alpha, M'')$$

surjektiv ist. Sei eine R -lineare Abbildung $\coprod_{\alpha \in A} P_\alpha \xrightarrow{g} M''$ vorgegeben. Sei $\beta \in A$. Wegen der Projektivität von P_β ist

$${}_R(P_\beta, M) \xrightarrow{{}_R(P_\beta, f)} {}_R(P_\beta, M'')$$

surjektiv. Sei $P_\beta \xrightarrow{h_\beta} M$ eine R -lineare Abbildung mit $h_\beta f = h_\beta {}_R(P_\beta, f) = \iota_\beta g$. Sei $\coprod_{\alpha \in A} P_\alpha \xrightarrow{h} M$ die R -lineare Abbildung mit $\iota_\alpha h = h_\alpha$ für alle $\alpha \in A$; cf. Bemerkung 38.(2). Für $\alpha \in A$ wird

$$\iota_\alpha(h({}_R(\coprod_{\alpha \in A} P_\alpha, f))) = \iota_\alpha h f = h_\alpha f = \iota_\alpha g,$$

und also, wegen der Eindeutigkeit aus der universellen Eigenschaft aus loc. cit., $h({}_R(\coprod_{\alpha \in A} P_\alpha, f)) = g$, wie gesucht.

Man kann auch vorbringen, daß ${}_R(\coprod_{\alpha \in A} P_\alpha, -) \simeq \prod_{\alpha \in A} {}_R(P_\alpha, -)$ exakt ist als Produkt exakter Funktoren – sofern man sich darum gekümmert hat, alle in diesem Argument auftretenden Begriffe einzuführen. Cf. Aufgabe 19.(2).

- (2) Wir haben zu zeigen, daß X projektiv ist. Sei ${}_R M \xrightarrow{f} {}_R M''$ eine surjektive R -lineare Abbildung. Zu zeigen ist, daß

$${}_R(X, M) \xrightarrow{{}_R(X, f)} {}_R(X, M'')$$

surjektiv ist. Sei eine R -lineare Abbildung $X \xrightarrow{g} M''$ vorgegeben. Wegen der Projektivität von $X \oplus Y$ ist

$${}_R(X \oplus Y, M) \xrightarrow{{}_R(X \oplus Y, f)} {}_R(X \oplus Y, M'')$$

surjektiv. Sei $X \oplus Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}} M$ eine R -lineare Abbildung mit $\begin{pmatrix} u f \\ v f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} {}_R(X \oplus Y, f) = \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}$. Es folgt $u {}_R(X, f) = u f = g$, wie gesucht.

Man kann auch vorbringen, daß ${}_R(X, -)$ als Summand des exakten Funktors ${}_R(X \oplus Y, -)$ exakt ist – sofern alles definiert ist.

- (3) Zeigen wir, daß R projektiv ist. Sei ${}_R M \xrightarrow{f} {}_R M''$ eine surjektive R -lineare Abbildung. Zu zeigen ist, daß

$${}_R(R, M) \xrightarrow{{}_R(R, f)} {}_R(R, M'')$$

surjektiv ist. Sei eine R -lineare Abbildung $R \xrightarrow{g} M''$ vorgegeben. Wähle $m \in M$ mit $m f = 1 g$. Setze $R \xrightarrow{h} M, r \mapsto r m$. Für $r \in R$ ist also

$$r h f = (r m) f = r(m f) = r(1 g) = (r \cdot 1) g = r g,$$

und also $h({}_R(R, f)) = h f = g$, wie gesucht.

Man kann auch vorbringen, daß ${}_R(R, -)$ zur Identität isomorph ist. Vgl. Bemerkung 50.(3).

Seien nun P und Q zwei R -Linksmoduln, sei A eine Menge, und sei $P \oplus Q \simeq \coprod_{\alpha \in A} R$. Nach dem vorigen und (1) ist $\coprod_{\alpha \in A} R$ projektiv. Nach (2) ist P projektiv.

Sei umgekehrt ein projektiver R -Linksmodul P gegeben. Sei $\coprod_{p \in P} R \xrightarrow{f} P$ definiert durch $r\iota_p f = rp$ für $r \in R$ und $p \in P$; vgl. Bemerkung 38.(2).

Es ist f surjektiv, da für $p \in P$ insbesondere $(1\iota_p)f = p$ ist. Da P projektiv ist, ist auch

$${}_R(P, \coprod_{p \in P} R) \xrightarrow{R(P, f)} {}_R(P, P)$$

surjektiv. Insbesondere gibt es eine R -lineare Abbildung $P \xrightarrow{g} \coprod_{p \in P} R$ mit $gf = gR(P, f) = \text{id}_P$.

Sei $Q := \text{Kern } f$. Wir behaupten, daß $P \oplus Q \xrightarrow{\begin{pmatrix} g \\ \iota \end{pmatrix}} \coprod_{p \in P} R$ ein Isomorphismus ist.

Zur Injektivität. Sei $(p, q) \in P \oplus Q$ mit $0 = (p, q) \begin{pmatrix} g \\ \iota \end{pmatrix} = pg + q\iota = pg + q$ gegeben. Dann ist $0 = (pg + q)f = pgf + 0 = p$. Also ist auch $q = -pg = 0$.

Zur Surjektivität. Sei $x \in \coprod_{p \in P} R$ vorgegeben. Es ist $(x - xfg)f = xf - xfgf = xf - xf = 0$, also $x - xfg \in Q$. Es wird $(xf, x - xfg) \begin{pmatrix} g \\ \iota \end{pmatrix} = xfg + (x - xfg)\iota = xfg + (x - xfg) = x$.

Dies zeigt die *Behauptung*.

- (4) Sei $\coprod_{m \in M} R \xrightarrow{f} M$ definiert durch $r\iota_m f = rm$ für $m \in M$; vgl. Bemerkung 38.(2). Es ist f surjektiv, da für $m \in M$ insbesondere $(1\iota_m)f = m$ ist. Mit (3) ist $\coprod_{m \in M} R$ projektiv (beachte, daß $X \oplus 0 \simeq X$ für jeden R -Linksmodul X).

- (5) Zu zeigen ist, daß $X' \otimes_R P \xrightarrow{i \otimes P} X \otimes_R P$ injektiv ist; vgl. Lemma 60.(1).

Seien $P \oplus Q \xrightarrow{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} \coprod_{\alpha \in A} R \xrightarrow{\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}} P \oplus Q$ sich gegenseitig invertierende Morphismen, vgl. (3), so daß insbesondere $\begin{pmatrix} ac & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, und speziell $ac = 1$. Also ist auch $(X' \otimes a)(X' \otimes c) = X' \otimes 1 = 1$. Insbesondere ist $X' \otimes a$ injektiv.

Setze $\coprod_{\alpha \in A} X' \xrightarrow{j} \coprod_{\alpha \in A} X$, $(x'_\alpha)_\alpha \mapsto (x_\alpha)_\alpha$. Dies ist \mathbf{Z} -linear und injektiv, da dies für i zutrifft.

Wir haben einen Isomorphismus $X' \otimes_R R \xrightarrow{\mu'} X'$, $x' \otimes r \mapsto x'r$; cf. Bemerkung 58.(3). Setze

$\coprod_{\alpha \in A} X' \otimes_R R \xrightarrow{\nu'} \coprod_{\alpha \in A} X'$, $(\xi_\alpha)_\alpha \mapsto (\xi_\alpha \mu')_\alpha$. Dies ist \mathbf{Z} -linear und bijektiv, da dies für μ' zutrifft.

Analog wird $\coprod_{\alpha \in A} X \otimes_R R \xrightarrow{\nu} \coprod_{\alpha \in A} X$ gebildet.

Aus Aufgabe 19.(3) entnehmen wir den Isomorphismus $X' \otimes_R \coprod_{\alpha \in A} R \xrightarrow{\tau'} \coprod_{\alpha \in A} X' \otimes_R R$,

$x' \otimes (r_\alpha)_\alpha \mapsto (x' \otimes r_\alpha)_\alpha$. Analog wird $X \otimes_R \coprod_{\alpha \in A} R \xrightarrow{\tau} \coprod_{\alpha \in A} X \otimes_R R$ gebildet. Folgendes Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} X' \otimes_R P & \xrightarrow{i \otimes P} & X \otimes_R P \\ X' \otimes a \downarrow & & \downarrow X \otimes a \\ X' \otimes \coprod_{\alpha \in A} R & \xrightarrow{i \otimes (\coprod_{\alpha \in A} R)} & X \otimes \coprod_{\alpha \in A} R \\ \tau' \downarrow \wr & & \downarrow \tau \wr \\ \coprod_{\alpha \in A} X' \otimes_R R & & \coprod_{\alpha \in A} X \otimes_R R \\ \nu' \downarrow \wr & & \downarrow \nu \wr \\ \coprod_{\alpha \in A} X' & \xrightarrow{j} & \coprod_{\alpha \in A} X \end{array}$$

Das obere Viereck kommutiert, da $(X' \otimes a)(i \otimes (\coprod_{\alpha \in A} R)) = i \otimes a = (i \otimes P)(X \otimes a)$.

Zeigen wir, daß das untere Viereck kommutiert. Es genügt, dies auf Elementartensoren nachzuweisen. In der Tat ist für $x' \in X'$ und $(r_\alpha)_\alpha \in \prod_{\alpha \in A} R$ auch

$$\begin{aligned} (x' \otimes (r_\alpha)_\alpha) \tau' \nu' j &= (x' r_\alpha)_\alpha j = ((x' r_\alpha) i)_\alpha = (x' i r_\alpha)_\alpha \\ &= (x' i \otimes (r_\alpha)_\alpha) \tau \nu = (x' \otimes (r_\alpha)_\alpha) (i \otimes (\prod_{\alpha \in A} R)) \tau \nu. \end{aligned}$$

Da nun $X' \otimes a$, τ' , ν' und j injektiv sind, gilt dies auch für $i \otimes P$.

Aufgabe 23.(1-4) zeigt die Bemerkung 64.

Aufgabe 24

(1) Sei ${}_R M' \xrightarrow{f} {}_R M$ eine injektive R -lineare Abbildung. Zu zeigen ist, daß

$${}_R(M', \prod_{\alpha \in A} I_\alpha) \xleftarrow{{}_R(f, \prod_{\alpha \in A} I_\alpha)} {}_R(M, \prod_{\alpha \in A} I_\alpha)$$

surjektiv ist. Sei eine R -lineare Abbildung $M' \xrightarrow{g} \prod_{\alpha \in A} I_\alpha$ vorgegeben. Sei $\beta \in A$. Wegen der Injektivität von I_β ist

$${}_R(M', I_\beta) \xleftarrow{{}_R(f, I_\beta)} {}_R(M, I_\beta)$$

surjektiv. Sei $M \xrightarrow{h_\beta} I_\beta$ eine R -lineare Abbildung mit $fh_\beta = h_R(f, I_\beta) = g\pi_\beta$. Sei $M \xrightarrow{h} \prod_{\alpha \in A} I_\alpha$ die R -lineare Abbildung mit $h\pi_\alpha = h_\alpha$ für alle $\alpha \in A$; cf. Bemerkung 38.(1). Für $\alpha \in A$ wird

$$(h_R(f, \prod_{\alpha \in A} I_\alpha))\pi_\alpha = fh\pi_\alpha = fh_\alpha = g\pi_\alpha,$$

und also, wegen der Eindeutigkeit aus der universellen Eigenschaft aus loc. cit., $h_R(f, \prod_{\alpha \in A} I_\alpha) = g$, wie gesucht.

Man kann auch vorbringen, daß ${}_R(-, \prod_{\alpha \in A} I_\alpha) \simeq \prod_{\alpha \in A} {}_R(-, I_\alpha)$ exakt ist als Produkt exakter Funktoren – sofern man sich darum gekümmert hat, alle in diesem Argument auftretenden Begriffe einzuführen. Cf. Aufgabe 19.(1).

(2) Wir haben zu zeigen, daß X injektiv ist. Sei ${}_R M' \xrightarrow{f} {}_R M$ eine injektive R -lineare Abbildung. Zu zeigen ist, daß

$${}_R(M', X) \xleftarrow{{}_R(f, X)} {}_R(M'', X)$$

surjektiv ist. Sei eine R -lineare Abbildung $M' \xrightarrow{g} X$ vorgegeben. Wegen der Injektivität von $X \oplus Y$ ist

$${}_R(M', X \oplus Y) \xleftarrow{{}_R(f, X \oplus Y)} {}_R(M, X \oplus Y)$$

surjektiv. Sei $M \xrightarrow{(uv)} X \oplus Y$ eine R -lineare Abbildung mit $(fu)fv = f(uv) = (uv) {}_R(f, X \oplus Y) = (g0)$. Es folgt $u {}_R(f, X) = fu = g$, wie gesucht.

Man kann auch vorbringen, daß ${}_R(-, X)$ als Summand des exakten Funktors ${}_R(-, X \oplus Y)$ exakt ist – sofern alles definiert ist.

Aufgabe 24 zeigt die Bemerkung 66.

Aufgabe 25

Schreibe $R := \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$.

Es ist $\begin{pmatrix} \mathbb{Q} \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \mathbb{Q} \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix} = R$, $((a), (b)) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$. Nach Aufgabe 23.(3) sind also $\begin{pmatrix} \mathbb{Q} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \mathbb{Q} \\ 0 \end{pmatrix}$ projektiv.

Wir behaupten, daß $S := \begin{pmatrix} \mathbb{Q} \\ 0 \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} \mathbb{Q} \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht projektiv ist. Hierzu genügt es zu zeigen, daß die Identität auf S unter

$${}_R(S, \begin{pmatrix} \mathbb{Q} \\ 0 \end{pmatrix}) \xrightarrow{{}_R(S, \rho)} {}_R(S, S)$$

kein Urbild hat. Sei im Gegenteil *angenommen*, es gibt eine R -lineare Abbildung $S \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix}$ mit $f\rho = \text{id}$. Es ist ρf eine R -lineare Abbildung von $\begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix}$, die auf $\begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix}$ verschwindet. Sei $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rho f =: \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Es wird

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rho f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rho f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rho f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix},$$

und also $b = 0$. Daher ist

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} \rho f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rho f \rho = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \rho = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} \text{id},$$

Widerspruch.

Aufgabe 26

(1) Die Aussage ist richtig.

Sei $X \xrightarrow{f} Y$ eine injektive Abbildung. Seien $T \xrightarrow[g]{g} X$ Abbildungen mit $gf = \tilde{g}f$. Sei $t \in T$. Es ist $tgf = t\tilde{g}f$. Die Injektivität von f gibt $tg = t\tilde{g}$. Dies zeigt, daß $g = \tilde{g}$. Also ist f monomorph.

Sei $X \xrightarrow{f} Y$ eine monomorphe Abbildung. Seien $x, x' \in X$ mit $xf = x'f$ gegeben. Sei $\{1\} \xrightarrow{g} X$, $1 \mapsto x$. Sei $\{1\} \xrightarrow{g'} X$, $1 \mapsto x'$. Dann ist $gf = g'f$, da $1gf = xf = x'f = 1g'f$. Da f monomorph ist, folgt $g = g'$. Also ist $x = 1g = 1g' = x'$. Somit ist f injektiv.

(2) Die Aussage ist falsch.

Betrachte den Einbettungsmorphismus $\mathbf{Z} \xrightarrow{f} \mathbf{Q}$. Es ist f nicht surjektiv. Wir *behaupten*, daß f epimorph ist. Seien $\mathbf{Q} \xrightarrow[g]{g} R$ zwei Ringmorphismen mit $fg = fg'$.

Letztere Bedingung ist selbstverständlich erfüllt, da \mathbf{Z} in (Rings) initial ist.

Sei $\frac{a}{b} \in \mathbf{Q}$. Es ist $\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} g = afg = afg' = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} g'$. Ferner ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} g \cdot \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} g' = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} g \cdot \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} g' \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} g' = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} g \cdot \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} g \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} g' = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} g \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} g' = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} g'.$$

Insgesamt wird also

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} g \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} g' \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} g' = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} g' = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} g'.$$

Also ist $g = g'$.

(3) Die Aussage ist richtig.

Sei $X \xrightarrow{f} Y$ ein Epimorphismus.

Wir behaupten zunächst, daß f surjektiv ist. Sei *angenommen*, es gibt ein $y_0 \in Y \setminus Xf$. Setze $Y \xrightarrow{g_1} \{0, 1\}$, $y \mapsto 0$ für $y \in Y \setminus \{y_0\}$, $y_0 \mapsto 1$. Setze $Y \xrightarrow{g_0} \{0, 1\}$, $y \mapsto 0$ für $y \in Y$. Es ist $fg_1 = fg_0$, da $Xf \subseteq Y \setminus \{y_0\}$. Da f epimorph ist, folgt $g_1 = g_0$. Also ist $1 = y_0g_1 = y_0g_0 = 0$, *Widerspruch*. Also ist f surjektiv.

Wir wählen nun für jedes $y \in Y$ ein Element $yg \in f^{-1}(\{y\})$, was wegen $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ möglich ist und mittels Auswahlaxiom eine Abbildung $Y \xrightarrow{g} X$ liefert. Nach Konstruktion ist $ygf = y$ für $y \in Y$, also $gf = \text{id}$. Somit ist f eine Retraktion.

(4) Die Aussage ist falsch.

Sei $R = \mathbf{Z}$. Es ist $\mathbf{Z}/2 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/4$ injektiv, dank Bemerkung 76 also monomorph. Wir wollen zeigen, daß keine Coretraktion vorliegt. In entgegengesetzter Richtung gibt es die Morphismen $\mathbf{Z}/2 \xleftarrow{a} \mathbf{Z}/4$ mit $a \in \{0, 1\}$. Das Kompositum wird zu $(\mathbf{Z}/2 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/4 \xleftarrow{a} \mathbf{Z}/2) = (\mathbf{Z}/2 \xrightarrow{0} \mathbf{Z}/2)$, und das ist ungleich der Identität auf $\mathbf{Z}/2$. Also ist $\mathbf{Z}/2 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/4$ keine Coretraktion.

Ist hingegen R ein Körper, so ist in R -Mod dank Basisergänzungssatz jeder Monomorphismus eine Coretraktion.