

Lösung 5

Aufgabe 19

- (1) Die angegebene Abbildung ist T - S -linear; cf. Bemerkung 51.(1). Zeigen wir, daß sie bijektiv ist. Sei $(g_i)_i \in \prod_i \text{Hom}_R(X, M_i)$ gegeben. Nach der universellen Eigenschaft des Produktes gibt es nun genau eine R -lineare Abbildung $X \xrightarrow{g} \prod_i M_i$ mit $g\pi_i = g_i$ für alle $i \in I$; cf. Bemerkung 38.(1).
- (2) Die angegebene Abbildung ist S - T -linear; cf. Bemerkung 51.(1). Zeigen wir, daß sie bijektiv ist. Sei $(g_i)_i \in \prod_i \text{Hom}_R(M_i, X)$ gegeben. Nach der universellen Eigenschaft des Coproduktes gibt es nun genau eine R -lineare Abbildung $\coprod_i M_i \xrightarrow{g} X$ mit $\iota_i g = g_i$ für alle $i \in I$; cf. Bemerkung 38.(2).
- (3) Die angegebene Abbildung existiert, wie die R -bilineare Abbildung von $Y \times (\prod_i M_i)$ nach $\prod_i (Y \otimes_R M_i)$, die $(y, (m_i)_i) \mapsto (y \otimes m_i)_i$ schickt, zeigt. Sie ist T - S -linear. Nennen wir sie ϑ .

Konstruieren wir eine Umkehrabbildung. Zur Familie der T - S -linearen Abbildungen $(Y \otimes_R M_i \xrightarrow{Y \otimes \iota_i} Y \otimes_R (\prod_i M_i))_i$ gibt es nach der universellen Eigenschaft des Coproduktes genau eine T - S -lineare Abbildung $\prod_i (Y \otimes_R M_i) \xrightarrow{\varphi} Y \otimes_R (\prod_i M_i)$ mit $\iota_i \varphi = Y \otimes \iota_i$ für $i \in I$ (zwei verschiedene ι_i); cf. Bemerkung 38.(2).

Zeigen wir $\vartheta \varphi \stackrel{\text{!}}{=} \text{id}$. Es genügt, dies auf Elementartensoren zu überprüfen. Für $(m_i)_i \in \prod_i M_i$ wird

$$\begin{aligned} (y \otimes m_i)_i \varphi &= \sum_i (y \otimes m_i) \iota_i \varphi \\ &= \sum_i (y \otimes m_i) (Y \otimes \iota_i) \\ &= \sum_i (y \otimes m_i \iota_i) \\ &= y \otimes (\sum_i m_i \iota_i) \\ &= y \otimes (m_i)_i \text{id} . \end{aligned}$$

Zeigen wir $\varphi \vartheta \stackrel{\text{!}}{=} \text{id}$. Dank der Eindeutigkeit aus der universellen Eigenschaft des Coproduktes genügt es, $\iota_i \varphi \vartheta \stackrel{\text{!}}{=} \iota_i \text{id}$ für alle $i \in I$ zu zeigen. Diese Gleichheit wiederum genügt es, auf Elementartensoren zu überprüfen. Es wird

$$(y \otimes m_i) \iota_i \varphi \vartheta = (y \otimes m_i) (Y \otimes \iota_i) \vartheta = (y \otimes (m_i \iota_i)) \vartheta = (y \otimes m_i) \iota_i \text{id} .$$

Insgesamt haben wir ϑ als Isomorphismus nachgewiesen.

Sei ${}_S Z_T$ gegeben. Wie in (3) sieht man auch den R - T -linearen Isomorphismus $(\prod_i M_i) \otimes_S Z \xrightarrow{\sim} \prod_i (M_i \otimes_S Z)$, $(m_i)_i \otimes z \mapsto (m_i \otimes z)_i$.

Aufgabe 20

- (1) Zunächst wollen wir auf der abelschen Gruppe $A \otimes_R B$ eine Multiplikation definieren.

Seien $a' \in A$ und $b' \in B$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} A \times B &\xrightarrow{\mu_{a',b'}} A \otimes_R B \\ (a, b) &\longmapsto aa' \otimes bb' \end{aligned}$$

ist R -bilinear; insbesondere ist $(ar)a' \otimes bb' = (aa')r \otimes bb' = aa' \otimes r(bb') = aa' \otimes (rb)b'$ für $r \in R$, $a \in A$ und $b \in B$. Also gibt es die \mathbf{Z} -lineare Abbildung

$$\begin{aligned} A \otimes_R B &\xrightarrow{\mu_{a',b'}} A \otimes_R B \\ a \otimes b &\longmapsto aa' \otimes bb' \end{aligned}$$

Sei $\xi \in A \otimes_R B$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} A \times B &\xrightarrow{\mu'_\xi} A \otimes_R B \\ (a', b') &\longmapsto \xi \mu'''_{a', b'} \end{aligned}$$

ist R -bilinear, wie wir nun zeigen wollen.

Seien $a', \tilde{a}' \in A$ und $b', \tilde{b}' \in B$ gegeben. Es wird für $a \in A$ und $b \in B$

$$\begin{aligned} (a \otimes b) \mu'''_{a'+\tilde{a}', b'+\tilde{b}'} &= a(a' + \tilde{a}') \otimes b(b' + \tilde{b}') \\ &= aa' \otimes bb' + aa' \otimes \tilde{b}' + a\tilde{a}' \otimes bb' + a\tilde{a}' \otimes \tilde{b}' \\ &= (a \otimes b)(\mu'''_{a', b'} + \mu'''_{a', \tilde{b}'} + \mu'''_{\tilde{a}', b'} + \mu'''_{\tilde{a}', \tilde{b}'}) . \end{aligned}$$

Da $\mu'''_{a'+\tilde{a}', b'+\tilde{b}'}$ und $\mu'''_{a', b'} + \mu'''_{a', \tilde{b}'} + \mu'''_{\tilde{a}', b'} + \mu'''_{\tilde{a}', \tilde{b}'}$ beide \mathbf{Z} -linear sind, und da wir eben gesehen haben, daß sie auf \mathbf{Z} -linearen Erzeugern übereinstimmen, folgt $\xi \mu'''_{a'+\tilde{a}', b'+\tilde{b}'} = \xi \mu'''_{a', b'} + \xi \mu'''_{a', \tilde{b}'} + \xi \mu'''_{\tilde{a}', b'} + \xi \mu'''_{\tilde{a}', \tilde{b}'}$.

Seien $a' \in A$, $r \in R$ und $b' \in B$ gegeben. Es wird für $a \in A$ und $b \in B$

$$(a \otimes b) \mu'''_{a'r, b'} = a(a'r) \otimes bb' = (aa')r \otimes bb' = aa' \otimes r(bb') = aa' \otimes b(rb') = (a \otimes b) \mu'''_{a', rb'} .$$

Da $\mu'''_{a'r, b'}$ und $\mu'''_{a', rb'}$ beide \mathbf{Z} -linear sind, und da wir eben gesehen haben, daß sie auf \mathbf{Z} -linearen Erzeugern übereinstimmen, folgt $\xi \mu'''_{a'r, b'} = \xi \mu'''_{a', rb'}$.

Also ist $A \times B \longrightarrow A \otimes_R B$, $(a', b') \xrightarrow{\mu'_\xi} \xi \mu'''_{a', b'}$ in der Tat R -bilinear. Wir erhalten die \mathbf{Z} -lineare Abbildung

$$\begin{aligned} A \otimes_R B &\xrightarrow{\mu'_\xi} A \otimes_R B \\ a' \otimes b' &\longmapsto (a' \otimes b') \mu'_\xi := \xi \mu'''_{a', b'} \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir die Abbildung

$$\begin{aligned} A \otimes_R B \times A \otimes_R B &\xrightarrow{\mu} A \otimes_R B \\ (\xi, \eta) &\longmapsto \eta \mu'_\xi =: (\xi, \eta) \mu =: \xi \cdot \mu \end{aligned}$$

konstruiert. Insbesondere wird für $a, a' \in A$ und $b, b' \in B$

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (a' \otimes b') \mu'_{a \otimes b} = (a \otimes b) \mu'''_{a', b'} = aa' \otimes bb' .$$

Prüfen wir nach, daß $(A \otimes_R B, +, \cdot)$ ein Ring ist. Beachte, daß

$$A \otimes_R B = \{ \sum_{i \in I} a_i \otimes b_i : I \text{ endliche Menge, } a_i \in A, b_i \in B \} .$$

Halten wir zunächst fest, daß für I und J endliche Mengen, $a_i, a'_j \in A$ und $b_i, b'_j \in B$ für $i \in I$, $j \in J$ sich

$$\begin{aligned} (\sum_{i \in I} a_i \otimes b_i) \cdot (\sum_{j \in J} a'_j \otimes b'_j) &= (\sum_{j \in J} a'_j \otimes b'_j) \mu'_{\sum_{i \in I} a_i \otimes b_i} \\ &= \sum_{j \in J} ((a'_j \otimes b'_j) \mu'_{\sum_{i \in I} a_i \otimes b_i}) \\ &= \sum_{j \in J} ((\sum_{i \in I} a_i \otimes b_i) \mu'''_{a'_j, b'_j}) \\ &= \sum_{j \in J} (\sum_{i \in I} ((a_i \otimes b_i) \mu'''_{a'_j, b'_j})) \\ &= \sum_{j \in J} (\sum_{i \in I} a_i a'_j \otimes b_i b'_j) \\ &= \sum_{i \in I, j \in J} a_i a'_j \otimes b_i b'_j \end{aligned}$$

ergibt.

(Ring 2) Seien I, J und K endliche Mengen. Seien $a_i, a'_j, a''_k \in A$ und $b_i, b'_j, b''_k \in B$ für $i \in I, j \in J$ und $k \in K$. Es wird

$$\begin{aligned}
 & ((\sum_{i \in I} a_i \otimes b_i) \cdot (\sum_{j \in J} a'_j \otimes b'_j)) \cdot (\sum_{k \in K} a''_k \otimes b''_k) \\
 = & (\sum_{i \in I, j \in J} a_i a'_j \otimes b_i b'_j) \cdot (\sum_{k \in K} a''_k \otimes b''_k) \\
 = & \sum_{i \in I, j \in J, k \in K} a_i a'_j a''_k \otimes b_i b'_j b''_k \\
 = & (\sum_{i \in I} a_i \otimes b_i) \cdot (\sum_{j \in J, k \in K} a'_j a''_k \otimes b'_j b''_k) \\
 = & (\sum_{i \in I} a_i \otimes b_i) \cdot ((\sum_{j \in J} a'_j \otimes b'_j) \cdot (\sum_{k \in K} a''_k \otimes b''_k)).
 \end{aligned}$$

(Ring 3) Sei I eine endliche Menge, und sei $a_i \in A$ für $i \in I$. Es wird

$$(1 \otimes 1) \cdot (\sum_{i \in I} a_i \otimes b_i) = \sum_{i \in I} a_i \otimes b_i = (\sum_{i \in I} a_i \otimes b_i) \cdot (1 \otimes 1).$$

(Ring 4) Seien I und \tilde{I} disjunkte endliche Mengen, und seien J und \tilde{J} disjunkte endliche Mengen. Seien $a_i, a'_j \in A$ und $b_i, b'_j \in B$ für $i \in I \sqcup \tilde{I}$ und $j \in J \sqcup \tilde{J}$. Es wird

$$\begin{aligned}
 & ((\sum_{i \in I} a_i \otimes b_i) + (\sum_{i \in \tilde{I}} a_i \otimes b_i)) \cdot ((\sum_{j \in J} a'_j \otimes b'_j) + (\sum_{j \in \tilde{J}} a'_j \otimes b'_j)) \\
 = & (\sum_{i \in I \sqcup \tilde{I}} a_i \otimes b_i) \cdot (\sum_{j \in J \sqcup \tilde{J}} a'_j \otimes b'_j) \\
 = & \sum_{i \in I \sqcup \tilde{I}, j \in J \sqcup \tilde{J}} a_i a'_j \otimes b_i b'_j \\
 = & (\sum_{i \in I, j \in J} a_i a'_j \otimes b_i b'_j) + (\sum_{i \in I, j \in \tilde{J}} a_i a'_j \otimes b_i b'_j) \\
 + & (\sum_{i \in \tilde{I}, j \in J} a_i a'_j \otimes b_i b'_j) + (\sum_{i \in \tilde{I}, j \in \tilde{J}} a_i a'_j \otimes b_i b'_j) \\
 = & (\sum_{i \in I} a_i \otimes b_i) \cdot (\sum_{j \in J} a'_j \otimes b'_j) + (\sum_{i \in I} a_i \otimes b_i) \cdot (\sum_{j \in \tilde{J}} a'_j \otimes b'_j) \\
 + & (\sum_{i \in \tilde{I}} a_i \otimes b_i) \cdot (\sum_{j \in J} a'_j \otimes b'_j) + (\sum_{i \in \tilde{I}} a_i \otimes b_i) \cdot (\sum_{j \in \tilde{J}} a'_j \otimes b'_j).
 \end{aligned}$$

Also ist $A \otimes_R B$ ein Ring.

Nun benötigen wir noch einen Ringmorphimus von R nach $A \otimes_R B$. Setze

$$\begin{aligned}
 R & \xrightarrow{\varphi} A \otimes_R B \\
 r & \longmapsto r \cdot 1 \otimes 1.
 \end{aligned}$$

Dies ist ein Ringmorphimus.

Also ist $r(a \otimes b) = (r\varphi)(a \otimes b) = ra \otimes b = a \otimes rb$ für $r \in R, a \in A$ und $b \in B$.

Insbesondere ist $(r\varphi)(\sum_{i \in I} a_i \otimes b_i) = \sum_{i \in I} ra_i \otimes b_i = \sum_{i \in I} a_i r \otimes b_i = (\sum_{i \in I} a_i \otimes b_i)(r\varphi)$ für $r \in R, I$ eine Menge und $a_i \in A$ und $b_i \in B$ für $i \in I$.

(2) In T oder T° , welche dieselbe unterliegende Menge haben, werde nur die Multiplikation in T ohne Multiplikationssymbol geschrieben.

Sei zum einen ${}_S M_T$ gegeben.

Sei $m \in M$. Die Abbildung

$$\begin{aligned}
 S \times T^\circ & \xrightarrow{\mu''_m} M \\
 (s, t) & \longmapsto s \cdot m * t
 \end{aligned}$$

ist \mathbf{Z} -bilinear. Also existiert die \mathbf{Z} -lineare Abbildung

$$\begin{aligned}
 S \otimes_{\mathbf{Z}} T^\circ & \xrightarrow{\mu'_m} M \\
 s \otimes t & \longmapsto s \cdot m * t.
 \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir eine Abbildung

$$\begin{aligned}
 S \otimes_{\mathbf{Z}} T^\circ \times M & \xrightarrow{\mu} M \\
 (\xi, m) & \longmapsto \xi \mu'_m =: (\xi, m) \mu =: \xi \cdot m.
 \end{aligned}$$

Insbesondere ist für I eine endliche Menge, $s_i \in S$ und $t_i \in T$ für $i \in I$

$$(\sum_{i \in I} s_i \otimes t_i) \cdot m = (\sum_{i \in I} s_i \otimes t_i) \mu'_m = \sum_{i \in I} ((s_i \otimes t_i) \mu'_m) = \sum_{i \in I} s_i \cdot m * t_i.$$

Zeigen wir, daß $(M, +, \cdot)$ ein $S \otimes T^\circ$ -Linksmodul ist.

(LMod2) Seien I und J endliche Mengen. Seien $s_i, s'_j \in S$ und $t_i, t'_j \in T$ für $i \in I$ und $j \in J$ und $m \in M$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} ((\sum_{i \in I} s_i \otimes t_i) \cdot (\sum_{j \in J} s'_j \otimes t'_j)) \cdot m &= (\sum_{i \in I, j \in J} s_i s'_j \otimes t'_j t_i) \cdot m \\ &= \sum_{i \in I, j \in J} (s_i s'_j) \cdot m * (t'_j t_i) \\ &= (\sum_{i \in I} s_i \otimes t_i) \cdot (\sum_{j \in J} s'_j \cdot m * t'_j) \\ &= (\sum_{i \in I} s_i \otimes t_i) \cdot ((\sum_{j \in J} s'_j \otimes t'_j) \cdot m). \end{aligned}$$

(LMod3) Sei $m \in M$. Wir erhalten

$$(1 \otimes 1) \cdot m = m.$$

(LMod4) Seien I und \tilde{I} disjunkte endliche Mengen, seien $s_i \in S$ und $t_i \in T$ für $i \in I \sqcup \tilde{I}$, und seien $m, m' \in M$. Es wird

$$\begin{aligned} &((\sum_{i \in I} s_i \otimes t_i) + (\sum_{i \in \tilde{I}} s_i \otimes t_i))(m + m') \\ &= (\sum_{i \in I \sqcup \tilde{I}} s_i \otimes t_i)(m + m') \\ &= \sum_{i \in I \sqcup \tilde{I}} s_i \cdot (m + m') * t_i \\ &= \sum_{i \in I \sqcup \tilde{I}} (s_i \cdot m * t_i + s_i \cdot m' * t_i) \\ &= (\sum_{i \in I} s_i \cdot m * t_i) + (\sum_{i \in \tilde{I}} s_i \cdot m * t_i) + (\sum_{i \in I} s_i \cdot m' * t_i) + (\sum_{i \in \tilde{I}} s_i \cdot m' * t_i) \\ &= (\sum_{i \in I} s_i \otimes t_i) \cdot m + (\sum_{i \in \tilde{I}} s_i \otimes t_i) \cdot m + (\sum_{i \in I} s_i \otimes t_i) \cdot m' + (\sum_{i \in \tilde{I}} s_i \otimes t_i) \cdot m'. \end{aligned}$$

Sei zum anderen ${}_{S \otimes T^\circ} M$ gegeben.

Setze $s \cdot m := (s \otimes 1) \cdot m$ und $m * t := (1 \otimes t) \cdot m$ für $s \in S, t \in T$ und $m \in M$.

(LMod2) Seien $s, s' \in S$ und $m \in M$. Es wird

$$s \cdot (s' \cdot m) = (s \otimes 1) \cdot ((s' \otimes 1) \cdot m) = ((s \otimes 1) \cdot (s' \otimes 1)) \cdot m = ((ss') \otimes 1) \cdot m = (ss') \cdot m.$$

(LMod3) Sei $m \in M$. Es wird $1 \cdot m = (1 \otimes 1) \cdot m = m$.

(LMod4) Seien $s, s' \in S$ und $m, m' \in M$. Es wird

$$\begin{aligned} (s + s') \cdot (m + m') &= ((s + s') \otimes 1) \cdot (m + m') \\ &= (s \otimes 1 + s' \otimes 1) \cdot (m + m') \\ &= (s \otimes 1) \cdot m + (s \otimes 1) \cdot m' + (s' \otimes 1) \cdot m + (s' \otimes 1) \cdot m' \\ &= s \cdot m + s \cdot m' + s' \cdot m + s' \cdot m'. \end{aligned}$$

(RMod2) Seien $t, t' \in T$ und $m \in M$. Es wird

$$(m * t) * t' = (1 \otimes t') \cdot ((1 \otimes t) \cdot m) = ((1 \otimes t) \cdot (1 \otimes t')) \cdot m = (1 \otimes (t't)) \cdot m = m * (t't).$$

(RMod3) Sei $m \in M$. Es wird $m * 1 = (1 \otimes 1) \cdot m = m$.

(RMod4) Seien $m, m' \in M$ und $t, t' \in T$. Es wird

$$\begin{aligned} (m + m') * (t + t') &= (1 \otimes (t + t')) \cdot (m + m') \\ &= (1 \otimes t + 1 \otimes t') \cdot (m + m') \\ &= (1 \otimes t) \cdot m + (1 \otimes t) \cdot m' + (1 \otimes t') \cdot m + (1 \otimes t') \cdot m' \\ &= m * t + m * t' + m' * t + m' * t'. \end{aligned}$$

(BiMod3) Seien $s \in S$, $m \in M$ und $t \in T$. Es wird

$$\begin{aligned}
 (s \cdot m) * t &= (1 \otimes t) \cdot ((s \otimes 1) \cdot m) \\
 &= ((1 \otimes t)(s \otimes 1)) \cdot m \\
 &= (s \otimes t) \cdot m \\
 &= ((s \otimes 1)(1 \otimes t)) \cdot m \\
 &= (s \otimes 1)((1 \otimes t) \cdot m) \\
 &= s \cdot (m * t) .
 \end{aligned}$$

Man sieht auch noch, daß $(s \otimes t) \cdot m = s \cdot t * m$.

Beginnen wir mit ${}_S M_T$, bilden wir im ersten Schritt die zugehörige $S \otimes_{\mathbf{Z}} T^\circ$ -Linksmodulstruktur auf M und dann im zweiten Schritt die wiederum hier dazugehörige S - T -Bimodulstruktur, so erhalten wir wegen den Gleichheiten $(s \otimes 1) \cdot m = s \cdot m$ und $(1 \otimes t) \cdot m = m * t$ aus dem ersten Schritt, wobei $s \in S$, $t \in T$ und $m \in M$, gerade ${}_S M_T$ zurück.

Beginnen wir mit ${}_{S \otimes_{\mathbf{Z}} T^\circ} M$, bilden wir im ersten Schritt die zugehörige S - T -Bimodulstruktur auf M und dann im zweiten Schritt die wiederum hier dazugehörige $S \otimes_{\mathbf{Z}} T^\circ$ -Linksmodulstruktur, so erhalten wir wegen der Beziehung

$$\sum_{i \in I} s_i \cdot m * t_i = \sum_{i \in I} ((s_i \otimes t_i) \cdot m) = (\sum_{i \in I} s_i \otimes t_i) \cdot m$$

aus dem ersten Schritt, wobei I endliche Menge, $s_i \in S$ und $t_i \in T$ für $i \in I$, $m \in M$, gerade ${}_{S \otimes_{\mathbf{Z}} T^\circ} M$ zurück.

Diese längliche Verifikation ist der Grund, warum S - T -Bimoduln nicht von vorneherein als $S \otimes_{\mathbf{Z}} T^\circ$ -Linksmoduln eingeführt werden.

Aufgabe 21

Sei $\varphi \in {}_R(RM_S \otimes_S {}_S X, {}_R N)$. Zu zeigen ist $\varphi(f \otimes h, g) \alpha_{X', M', N'} \stackrel{!}{=} \varphi \alpha_{X, M, N}(h, (f, g))$.

Auf der einen Seite wird

$$\begin{aligned}
 \varphi(f \otimes h, g) \alpha_{X', M', N'} &= ((f \otimes h) \varphi g) \alpha_{X', M', N'} \\
 &= (x' \mapsto (m' \mapsto (m' \otimes x')(f \otimes h) \varphi g)) \\
 &= (x' \mapsto (m' \mapsto (m' f \otimes x' h) \varphi g)) .
 \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite wird

$$\begin{aligned}
 \varphi \alpha_{X, M, N}(h, (f, g)) &= (x \mapsto (m \mapsto (m \otimes x) \varphi))(h, (f, g)) \\
 &= h(x \mapsto (m \mapsto (m \otimes x) \varphi))(f, g) \\
 &= (x' \mapsto x' h \mapsto (m \mapsto (m \otimes x' h) \varphi) \mapsto (m \mapsto (m \otimes x' h) \varphi))(f, g) \\
 &= (x' \mapsto (m \mapsto (m \otimes x' h) \varphi))(f, g) \\
 &= (x' \mapsto (m' \mapsto m' f \mapsto (m' f \otimes x' h) \varphi \mapsto (m' f \otimes x' h) \varphi g)) , \\
 &= (x' \mapsto (m' \mapsto (m' f \otimes x' h) \varphi g)) .
 \end{aligned}$$

Vgl. Lemma 62.(2).

Aufgabe 22

Zu (1).

Zur Surjektivität von g . Sei $Z = \text{Cokern } g$. Es wird $X'' \xrightarrow{\rho} \text{Cokern } g = Z$ unter ${}_R(g, Z)$ auf $g\rho = 0$ abgebildet. Da ${}_R(g, Z)$ injektiv ist, folgt $\rho = 0$, i.e. $\text{Cokern } g \simeq 0$, i.e. g ist surjektiv.

Zur Exaktheit bei X . Sei $Z = X''$. Es ist $g = \text{id}_{X''}$, ${}_R(g, Z) \in \text{Im } {}_R(g, Z) = \text{Kern } {}_R(f, Z)$, und somit ist $f g = g {}_R(f, Z) = 0$, i.e. $\text{Im } f \subseteq \text{Kern } g$.

Sei nun $Z = \text{Cokern } f$. Es wird $X' \xrightarrow{\rho} \text{Cokern } f = Z$ unter ${}_R(f, Z)$ auf $f\rho = 0$ abgebildet. Wegen der Exaktheit bei ${}_R(X, Z)$ gibt es ein $h \in {}_R(X'', Z)$ mit $h{}_R(g, Z) = \rho$, i.e. mit $gh = \rho$. Ist nun $x \in \text{Kern } g$, so ist auch $0 = xgh = x\rho = x + \text{Im } f$, also $x \in \text{Im } f$. Dies zeigt $\text{Im } f \supseteq \text{Kern } g$.

Zu (2). Sei Z ein R -Linksmodul. Nach Lemma 52.(2) ist die Sequenz

$${}_R(M', Z) \xleftarrow{{}_R(i, Z)} {}_R(M, Z) \xleftarrow{{}_R(p, Z)} {}_R(M'', Z)$$

von S -Linksmoduln linksexakt. Nach Lemma 62 haben wir folgendes kommutative Diagramm von \mathbf{Z} -Moduln; vgl. Aufgabe 21.

$$\begin{array}{ccccc} {}_S(N, {}_R(M', Z)) & \xleftarrow{{}_S(N, {}_R(i, Z))} & {}_S(N, {}_R(M, Z)) & \xleftarrow{{}_S(N, {}_R(p, Z))} & {}_S(N, {}_R(M'', Z)) \\ \alpha_{N, M', Z}^{-1} \downarrow \wr & & \alpha_{N, M, Z}^{-1} \downarrow \wr & & \alpha_{N, M'', Z}^{-1} \downarrow \wr \\ {}_R(M' \otimes_S N, Z) & \xleftarrow{{}_R(i \otimes N, Z)} & {}_R(M \otimes_S N, Z) & \xleftarrow{{}_R(p \otimes N, Z)} & {}_R(M'' \otimes_S N, Z) \end{array}$$

Nach loc. cit. ist die obere Zeile linksexakt.

Denn da die Operation ${}_S(N, -)$ kurz exakte Sequenzen in linksexakte Sequenzen überführt, überführt sie insbesondere injektive S -lineare Abbildungen in injektive \mathbf{Z} -lineare Abbildungen. Eine linksexakte Sequenz $Y' \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Y''$ von S -Moduln kann aber aufgespalten werden in eine kurz exakte Sequenz $Y' \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g|_{\text{Im } g}} \text{Im } g$ und noch eine injektive lineare Abbildung $\text{Im } g \hookrightarrow Y''$. Die kurz exakte Sequenz kommt auf eine linksexakte Sequenz, die injektive Abbildung auf eine injektive Abbildung. Wieder zusammengesetzt entsteht eine linksexakte Sequenz.

Daher ist auch die untere Zeile linksexakt.

Denn zum einen ist ${}_R(p \otimes N, Z)$ injektiv, da $\alpha_{N, M'', Z}^{-1}$ bijektiv und $\alpha_{N, M'', Z}^{-1} {}_R(p \otimes N, Z)$ injektiv ist. Zum anderen ist $\alpha_{N, M'', Z}^{-1} {}_R(p \otimes N, Z) {}_R(i \otimes N, Z) = 0$, also ${}_R(p \otimes N, Z) {}_R(i \otimes N, Z) = 0$ und mithin $\text{Im } {}_R(p \otimes N, Z) \subseteq \text{Kern } {}_R(i \otimes N, Z)$. Zum dritten sei uns ein $\xi \in {}_S(M \otimes_S N, Z)$ mit $\xi {}_R(i \otimes N, Z) = 0$ gegeben. Dann ist $0 = \xi {}_R(i \otimes N, Z) \alpha_{N, M', Z} = \xi \alpha_{N, M, Z} {}_S(N, {}_R(i, Z))$, also $\xi \alpha_{N, M, Z} \in \text{Kern } {}_S(N, {}_R(i, Z)) = \text{Im } {}_S(N, {}_R(p, Z))$, also $\xi \alpha_{N, M, Z} = \eta {}_S(N, {}_R(p, Z))$ für ein $\eta \in {}_S(N, {}_R(M'', Z))$. Somit ist $\xi = \eta {}_S(N, {}_R(p, Z)) \alpha_{N, M, Z}^{-1} = \eta \alpha_{N, M'', Z}^{-1} {}_R(p \otimes N, Z) \in \text{Im } {}_R(p \otimes N, Z)$. Also ist auch $\text{Im } {}_R(p \otimes N, Z) \supseteq \text{Kern } {}_R(i \otimes N, Z)$.

Mit (1) folgt schließlich die Rechtsexaktheit von $M' \otimes_S N \xrightarrow{i \otimes N} M \otimes_S N \xrightarrow{p \otimes N} M'' \otimes_S N$.