

### Lösung 4

#### Aufgabe 15

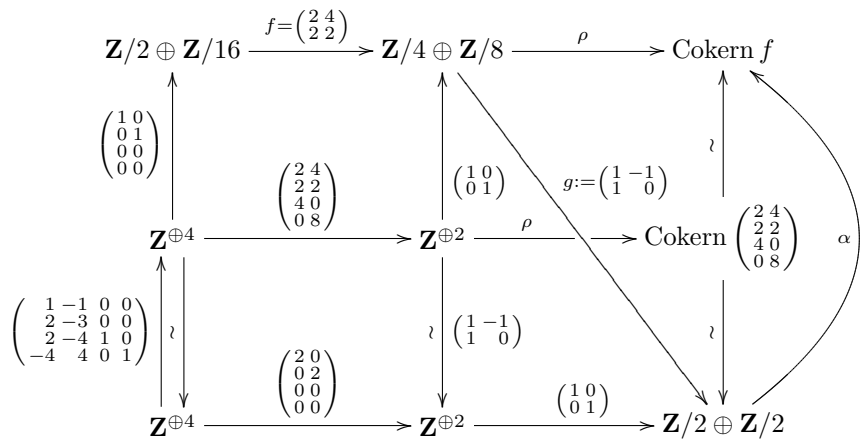
- (1) Das linke Viereck kommutiert. Die beiden vertikalen Abbildungen sind surjektiv. Nach Aufgabe 12.(2) genügt es für die behauptete Isomorphie auf den Cokernen zu zeigen, daß

$$\text{Kern}(\mathbf{Z}^{\oplus \ell} \xrightarrow{E_\ell} \bigoplus_{j \in [1, \ell]} \mathbf{Z}/n_j) \stackrel{!}{\subseteq} \text{Im}(\mathbf{Z}^{\oplus(k+\ell)} \xrightarrow{\begin{pmatrix} F \\ N \end{pmatrix}} \mathbf{Z}^{\oplus \ell}).$$

In der Tat ist der angeführte Kern gleich  $\bigoplus_{j \in [1, \ell]} n_j \mathbf{Z}$ , und also nach Definition von  $N$  im Bild enthalten.

- (2) Jede  $\mathbf{Z}$ -lineare Abbildung ist von der Form  $\mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/16 \xrightarrow{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8$ . Hierbei ist  $a \in \{0, 2\}$ ,  $b \in \{0, 4\}$ ,  $c \in \{0, 1, 2, 3\}$  und  $d \in \{0, 1, 2, \dots, 7\}$ . Es gibt also  $2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 = 128$  solche  $\mathbf{Z}$ -lineare Abbildungen.

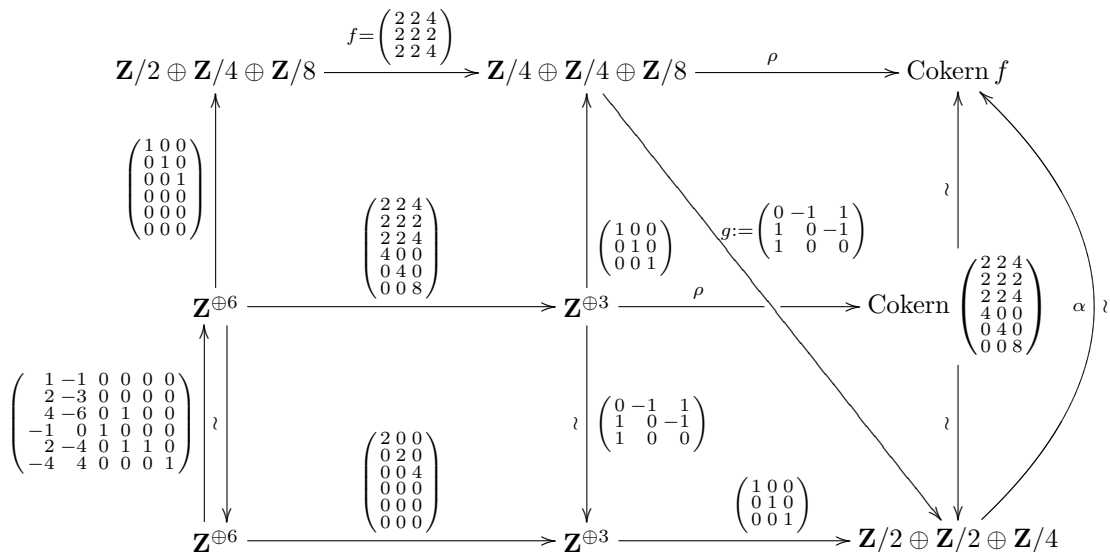
- (3) Betrachte folgendes Diagramm.



Da das rechte schiefwinklige Viereck nach Wahl von  $g$  kommutiert, und da  $\mathbf{Z}^{\oplus 2} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8$  surjektiv ist, ist auch  $g\alpha = \rho$ . Also ist  $(f, g)$  rechtsexakt.

Die Lösung ist nicht eindeutig.

- (4) Betrachte folgendes Diagramm.



Da das rechte schiefwinklige Viereck nach Wahl von  $g$  kommutiert, und da

$$\mathbf{Z}^{\oplus 3} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8$$

surjektiv ist, ist auch  $g\alpha = \rho$ . Also ist  $(f, g)$  rechtsexakt.

### Aufgabe 16

(1) Vgl. Bemerkung 50.(2). Wir haben schon gesehen, daß  $s \cdot f * t$  für  $s \in S$ ,  $f \in {}_R(M, N)$  und  $t \in T$  in der Tat eine  $R$ -lineare Abbildung ist. Ferner ist  $({}_R(M, N), +)$  mit loc. cit. (1) eine abelsche Gruppe.

(RMod2) Seien  $s, s' \in S$  und  $f \in {}_R(M, N)$ . Sei  $m \in M$ . Es ist

$$m(s \cdot (s' \cdot f)) = (m * s)(s' \cdot f) = ((m * s) * s')f = (m * (ss'))f = m((ss') \cdot f).$$

Folglich ist  $s \cdot (s' \cdot f) = (ss') \cdot f$ .

(RMod3) Sei  $f \in {}_R(M, N)$ . Sei  $m \in M$ . Es ist

$$m(1 \cdot f) = (m * 1)f = mf.$$

Folglich ist  $1 \cdot f = f$ .

(RMod4) Seien  $s, s' \in S$  und  $f, f' \in {}_R(M, N)$ . Sei  $m \in M$ . Es ist

$$\begin{aligned} m((s + s') \cdot (f + f')) &= (m * (s + s'))(f + f') \\ &= (m * s + m * s')(f + f') \\ &= (m * s)(f + f') + (m * s')(f + f') \\ &= (m * s)f + (m * s)f' + (m * s')f + (m * s')f' \\ &= m(s \cdot f) + m(s \cdot f') + m(s' \cdot f) + m(s' \cdot f') \\ &= m(s \cdot f + s \cdot f' + s' \cdot f + s' \cdot f'). \end{aligned}$$

Folglich ist  $(s + s') \cdot (f + f') = s \cdot f + s \cdot f' + s' \cdot f + s' \cdot f'$ .

(LMod2) Seien  $f \in {}_R(M, N)$  und  $t, t' \in T$ . Sei  $m \in M$ . Es ist

$$m((f * t) * t') = (m(f * t)) * t' = ((mf) * t) * t' = (mf) * (tt') = m(f * (tt')),$$

und also  $(f * t) * t' = f * (tt')$ .

(LMod3) Sei  $f \in {}_R(M, N)$ . Sei  $m \in M$ . Es ist

$$m(f * 1) = (mf) * 1 = mf.$$

Folglich ist  $f * 1 = f$ .

(LMod4) Seien  $f, f' \in {}_R(M, N)$  und  $t, t' \in T$ . Sei  $m \in M$ . Es ist

$$\begin{aligned} m((f + f') * (t + t')) &= (m(f + f')) * (t + t') \\ &= (mf + mf') * (t + t') \\ &= (mf) * t + (mf) * t' + (mf') * t + (mf') * t' \\ &= m(f * t) + m(f * t') + m(f' * t) + m(f' * t') \\ &= m(f * t + f * t' + f' * t + f' * t'). \end{aligned}$$

Folglich ist  $(f + f') * (t + t') = f * t + f * t' + f' * t + f' * t'$ .

(BiMod3) Dies wurde in der Konstruktion schon vorweggenommen. Prüfen wir es dennoch nach.

Sei  $s \in S$ ,  $f \in {}_R(M, N)$  und  $t \in T$ . Sei  $m \in M$ . Es ist

$$m((s \cdot f) * t) = (m(s \cdot f)) * t = ((m * s)f) * t = (m * s)(f * t) = m(s \cdot (f * t)).$$

Folglich ist in der Tat  $(s \cdot f) * t = s \cdot f * t = s \cdot (f * t)$ .

(2) Vgl. Bemerkung 58.(1). Für gegebene  $s \in S$  und  $t \in T$  verwenden wir die dort konstruierte  $\mathbf{Z}$ -lineare Abbildung  $\lambda_{s,t} : M \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N, m \otimes n \longmapsto s \cdot m \otimes n * t$ , insbesondere setzen wir  $s \cdot \xi := \xi \lambda_{s,1}$  und  $\xi * t := \xi \lambda_{1,t}$  für  $\xi \in M \otimes_R N$ .

(LMod 2) Seien  $s, s' \in S, m \in M$  und  $n \in N$ . Es ist

$$s \cdot (s' \cdot (m \otimes n)) = s \cdot ((s' \cdot m) \otimes n) = (s \cdot (s' \cdot m)) \otimes n = ((ss') \cdot m) \otimes n = (ss') \cdot (m \otimes n).$$

Da  $\lambda_{s',1} \lambda_{s,1}$  und  $\lambda_{ss',1}$  beide  $\mathbf{Z}$ -linear sind, und da wir eben gesehen haben, daß sie auf  $\mathbf{Z}$ -linearen Erzeugern übereinstimmen, folgt

$$s \cdot (s' \cdot \xi) = (ss') \cdot \xi$$

für  $\xi \in M \otimes_R N$ .

(LMod 3) Seien  $m \in M$  und  $n \in N$ . Es ist

$$1 \cdot (m \otimes n) = (1 \cdot m) \otimes n = m \otimes n.$$

Da  $\lambda_{1,1}$  und  $\text{id}_{M \otimes_R N}$  beide  $\mathbf{Z}$ -linear sind, und da wir eben gesehen haben, daß sie auf  $\mathbf{Z}$ -linearen Erzeugern übereinstimmen, folgt

$$1 \cdot \xi = \xi$$

für  $\xi \in M \otimes_R N$ .

(LMod 4) Seien  $s, s' \in S, m \in M$  und  $n \in N$ . Es wird

$$\begin{aligned} (s + s') \cdot (m \otimes n) &= ((s + s') \cdot m) \otimes n \\ &= (s \cdot m + s' \cdot m) \otimes n \\ &= (s \cdot m) \otimes n + (s' \cdot m) \otimes n \\ &= s \cdot (m \otimes n) + s' \cdot (m \otimes n) \end{aligned}$$

Da  $\lambda_{s+s',1}$  und  $\lambda_{s,1} + \lambda_{s',1}$  beide  $\mathbf{Z}$ -linear sind, und da wir eben gesehen haben, daß sie auf  $\mathbf{Z}$ -linearen Erzeugern übereinstimmen, folgt

$$(s + s') \cdot \xi = s \cdot \xi + s' \cdot \xi$$

für  $\xi \in M \otimes_R N$ . Für  $\xi, \xi' \in M \otimes_R N$  folgt also unter Verwendung der  $\mathbf{Z}$ -Linearität von  $\lambda_{\bar{s},1}$  für  $\bar{s} \in S$ , daß

$$(s + s') \cdot (\xi + \xi') = (s + s') \cdot \xi + (s + s') \cdot \xi' = s \cdot \xi + s' \cdot \xi + s \cdot \xi' + s' \cdot \xi'.$$

Die Rechtsmoduleigenschaften gelten nun dank Symmetrie. Zeigen wir noch das verbleibende  $R$ - $S$ -Bimodulaxiom.

(BiMod 3) Seien  $s \in S, m \in M, n \in N$  und  $t \in T$ . Es wird

$$(s \cdot (m \otimes n)) * t = ((s \cdot m) \otimes n) * t = (s \cdot m) \otimes (n * t) = s \cdot (m \otimes (n * t)) = s \cdot ((m \otimes n) * t).$$

Da  $\lambda_{s,1} \lambda_{1,t}, \lambda_{s,t}$  und  $\lambda_{1,t} \lambda_{s,1}$  alle drei  $\mathbf{Z}$ -linear sind, und da wir eben gesehen haben, daß sie auf  $\mathbf{Z}$ -linearen Erzeugern übereinstimmen, folgt

$$(s \cdot \xi) * t = \xi \lambda_{s,t} = s \cdot (\xi * t)$$

für  $\xi \in M \otimes_R N$ .

## Aufgabe 17

Sei  $x \in X$ . Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} Y \times Z & \xrightarrow{\psi_x'''} & (X \otimes_S Y) \otimes_T Z \\ (y, z) & \longmapsto & (x \otimes y) \otimes z \end{array}$$

ist  $T$ -bilinear, was eine  $\mathbf{Z}$ -lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc} Y \otimes_T Z & \xrightarrow{\psi''_x} & (X \otimes_S Y) \otimes_T Z \\ y \otimes z & \mapsto & (x \otimes y) \otimes z \end{array}$$

liefert. Insgesamt erhalten wir die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} X \times (Y \otimes_T Z) & \xrightarrow{\psi'} & (X \otimes_S Y) \otimes_T Z \\ (x, \eta) & \mapsto & \eta \psi''_x \end{array}$$

Explizit ist für  $I$  eine endliche Menge und  $y_i \in Y$  und  $z_i \in Z$  für  $i \in I$

$$(x, \sum_{i \in I} y_i \otimes z_i) \psi' = (\sum_{i \in I} y_i \otimes z_i) \psi''_x = \sum_{i \in I} ((y_i \otimes z_i) \psi''_x) = \sum_{i \in I} (x \otimes y_i) \otimes z_i.$$

Daran erkennt man auch, daß  $\psi'$  eine  $S$ -bilineare Abbildung ist. Dies liefert die  $\mathbf{Z}$ -lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc} X \otimes_S (Y \otimes_T Z) & \xrightarrow{\psi} & (X \otimes_S Y) \otimes_T Z \\ x \otimes \eta & \mapsto & \eta \psi''_x \end{array}$$

Explizit ist für  $I$  und  $J$  endliche Mengen und  $x_j \in X$ ,  $y_{i,j} \in Y$  und  $z_{i,j} \in Z$  für  $i \in I$  und  $j \in J$

$$\begin{aligned} (\sum_{j \in J} x_j \otimes (\sum_{i \in I} y_{i,j} \otimes z_{i,j})) \psi &= \sum_{j \in J} ((x_j \otimes (\sum_{i \in I} y_{i,j} \otimes z_{i,j})) \psi) \\ &= \sum_{j \in J} (\sum_{i \in I} (x_j \otimes y_{i,j}) \otimes z_{i,j}) \\ &= \sum_{i \in I, j \in J} (x_j \otimes y_{i,j}) \otimes z_{i,j}. \end{aligned}$$

Daran erkennt man auch, daß  $\psi$  eine  $R$ - $U$ -lineare Abbildung ist. Wie verlangt, ist insbesondere  $(x \otimes (y \otimes z)) \psi = (x \otimes y) \otimes z$ .

Dank der Symmetrie der Situation gibt es auch eine Abbildung  $X \otimes_S (Y \otimes_T Z) \xleftarrow{\vartheta} (X \otimes_S Y) \otimes_T Z$ , für welche unter anderem  $((x \otimes y) \otimes z) \vartheta = x \otimes (y \otimes z)$  für  $x \in X$ ,  $y \in Y$  und  $z \in Z$  ist. Insbesondere ist  $((x \otimes y) \otimes z) \vartheta \psi = (x \otimes y) \otimes z$ . Da  $\vartheta \psi$  und  $\text{id}$  auf  $\mathbf{Z}$ -linearen Erzeugern übereinstimmen, folgt  $\vartheta \psi = \text{id}$ . Genauso folgt  $\psi \vartheta = \text{id}$ . Also ist  $\vartheta$  bijektiv. Insgesamt ist  $\psi$  ein Isomorphismus von  $R$ - $U$ -Bimoduln.

Man unterschlägt das obige Hantieren mit endlichen Summen an diversen Stellen auch gerne und spricht ersatzweise davon, daß sich die jeweiligen Sachverhalte "additiv fortsetzen".

## Aufgabe 18

- (2) Die Aussage ist richtig. Sei  $(e_1, \dots, e_m)$  eine Basis von  $V$ , sei  $(e_1^*, \dots, e_m^*)$  die dazu duale Basis von  $V^*$ . Sei  $(f_1, \dots, f_n)$  eine Basis von  $W$ , sei  $(f_1^*, \dots, f_n^*)$  die dazu duale Basis von  $W^*$ . Für  $i \in [1, m]$  und  $j \in [1, n]$  definieren wir die  $K$ -lineare Abbildung

$$(V \otimes_K W \xrightarrow{\varphi_{i,j}} K) := (V \otimes_K W \xrightarrow{e_i^* \otimes f_j^*} K \otimes_K K \xrightarrow{\sim} K),$$

so daß  $(v \otimes w) \varphi_{i,j} = (ve_i^*)(wf_j^*)$  für  $v \in V$  und  $w \in W$ , cf. Bemerkung 58.(2).

Definiere die  $K$ -lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc} V \otimes_K W & \xrightarrow{\varphi} & K^{m \times n} \\ \xi & \mapsto & (\xi \varphi_{i,j})_{i,j} \end{array}$$

und die  $K$ -lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc} V \otimes_K W & \xleftarrow{\psi} & K^{m \times n} \\ \sum_{i,j} a_{i,j} e_i \otimes f_j & \longleftarrow & (a_{i,j})_{i,j} \end{array}$$

Es ist  $V \otimes_K W = {}_K \langle \{e_i \otimes f_j : i \in [1, m], j \in [1, n]\} \rangle$ , da jeder Elementartensor in diesem Erzeugnis liegt. Um  $\varphi\psi = \text{id}$  zu zeigen, genügt es also, dies auf  $e_k \otimes f_\ell$  für  $k \in [1, m]$  und  $\ell \in [1, n]$  nachzurechnen. In der Tat wird

$$\begin{aligned} (e_k \otimes f_\ell)\varphi\psi &= ((e_k \otimes f_\ell)\varphi_{i,j})_{i,j}\psi \\ &= ((e_k e_i^*)(f_\ell f_j^*))_{i,j}\psi \\ &= (\partial_{k,i}\partial_{\ell,j})_{i,j}\psi \\ &= \sum_{i,j} \partial_{k,i}\partial_{\ell,j} e_i \otimes f_j \\ &= e_k \otimes f_\ell. \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite wird

$$\begin{aligned} (a_{i,j})_{i,j}\psi\varphi &= (\sum_{k,\ell} a_{k,\ell} e_k \otimes f_\ell)\varphi \\ &= ((\sum_{k,\ell} a_{k,\ell} e_k \otimes f_\ell)\varphi_{i,j})_{i,j} \\ &= (\sum_{k,\ell} a_{k,\ell} (e_k \otimes f_\ell)\varphi_{i,j})_{i,j} \\ &= (\sum_{k,\ell} a_{k,\ell} (e_k e_i^*)(f_\ell f_j^*))_{i,j} \\ &= (\sum_{k,\ell} a_{k,\ell} \partial_{k,i}\partial_{\ell,j})_{i,j} \\ &= (a_{i,j})_{i,j}, \end{aligned}$$

und somit auch  $\psi\varphi = \text{id}$ .

Es folgt  $\dim_K(V \otimes_K W) \simeq \dim_K K^{m \times n} = m \cdot n = (\dim_K V)(\dim_K W)$ .

Insbesondere ist  $(e_i \otimes f_j)_{i,j}$  eine Basis von  $V \otimes_K W$ , als Bild einer Basis von  $K^{m \times n}$  unter einem  $K$ -linearen Isomorphismus.

Man könnte zur Lösung von Aufgabe 18.(2) auch Aufgabe 19.(3) heranziehen und  $V \otimes_K W = (\bigoplus_i K e_i) \otimes_K (\bigoplus_j K e_j) \simeq \bigoplus_{i,j} (K e_i) \otimes_K (K e_j) \simeq \bigoplus_{i,j} K \otimes_K K \simeq \bigoplus_{i,j} K$  folgern.

- (1) Die Aussage ist falsch. Sei hierzu  $K$  ein endlicher Körper mit  $q$  Elementen, sei  $\dim_K V = 2$  und  $\dim_K W = 3$ . Es ist  $|V \times W| = q^2 \cdot q^3 < q^{2 \cdot 3} = |V \otimes_K W|$ ; vgl. (2).

Es ist  $\tau$  übrigens im allgemeinen auch nicht injektiv, da für  $v \neq 0$  zwar  $(v, 0) \neq (0, 0)$ , aber  $v \otimes 0 = 0 = 0 \otimes 0$ .