

Lösung 3

Aufgabe 11⁺

- (1) Sei $M'' = \mathbf{Z}\langle\{m'_1, \dots, m'_t\}\rangle$ für ein $t \geq 0$. Wähle $m_i \in M$ mit $m_i p = m''_i$ für $i \in [1, t]$. Sei $\text{Kern } p = \mathbf{Z}\langle\{m'_1, \dots, m'_s\}\rangle$ für ein $s \geq 0$. Wir behaupten, daß

$$M = \mathbf{Z}\langle\{m'_1, \dots, m'_s, m_1, \dots, m_t\}\rangle.$$

Sei $m \in M$ gegeben. Schreibe $mp = w_1 m''_1 + \dots + w_t m''_t$ für gewisse $w_i \in \mathbf{Z}$. Es ist $(m - (w_1 m_1 + \dots + w_t m_t))p = 0$. Also ist $m - (w_1 m_1 + \dots + w_t m_t) \in \text{Kern } p$, und wir können $m - (w_1 m_1 + \dots + w_t m_t) = z_1 m'_1 + \dots + z_s m'_s$ schreiben für gewisse $z_i \in \mathbf{Z}$. Insgesamt wird

$$m = (w_1 m_1 + \dots + w_t m_t) + (z_1 m'_1 + \dots + z_s m'_s).$$

Dies zeigt die Behauptung.

- (2) Wir führen eine Induktion nach ℓ . Für $\ell = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $\ell \geq 1$ und die Aussage für $\ell - 1$ bekannt.

Sei $\mathbf{Z}^{\oplus \ell} \xrightarrow{p} \mathbf{Z}^{\oplus (\ell-1)}$, $(z_1, z_2, \dots, z_\ell) \mapsto (z_2, \dots, z_\ell)$. Es ist p eine \mathbf{Z} -lineare Abbildung. Sei $M'' := \text{Im}(p|_M) \subseteq \mathbf{Z}^{\oplus (\ell-1)}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist M'' endlich erzeugt. Wir haben eine surjektive \mathbf{Z} -lineare Abbildung $p|_M^{M''} : M \rightarrow M''$.

Wir haben die injektive \mathbf{Z} -lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Kern}(p|_M^{M''}) &= \{(z_1, \dots, z_\ell) \in \mathbf{Z}^{\oplus \ell} : (z_1, \dots, z_\ell) \in M, z_i = 0 \text{ für } i \in [2, \ell]\} \longrightarrow \mathbf{Z} \\ & \quad (z_1, \dots, z_\ell) \longmapsto z_1 \end{aligned}$$

Ihr Bild ist nach Aufgabe 4.(1) endlich (viz. von einer einelementigen Menge) erzeugt. Also ist auch $\text{Kern}(p|_M^{M''})$ als zu diesem Bild isomorpher \mathbf{Z} -Modul endlich erzeugt.

Somit sind die in (1) gemachten Voraussetzungen an M'' und $\text{Kern}(p|_M^{M''})$ erfüllt und wir können schließen, daß M endlich erzeugt ist.

Aufgabe 12⁺

- (1) Betrachte

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{\rho} & \text{Cokern } f \\ \xi \downarrow & & \downarrow \eta & & \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{\rho} & \text{Cokern } f' \end{array}$$

Da $f(\eta\rho) = \xi f' \rho = \xi 0 = 0$, gibt es nach der universellen Eigenschaft des Cokerns genau eine R -lineare Abbildung $\text{Cokern } f \xrightarrow{c} \text{Cokern } f'$, für die $\eta\rho = \rho c$ ist; vgl. Bemerkung 39.(2).

- (2) Da η und ρ surjektiv sind, und da $\eta\rho = \rho c$, folgt, daß c surjektiv ist. Wir haben zu zeigen, daß c injektiv ist, i.e. daß $\text{Kern } c \stackrel{!}{=} 0$.

Es schickt c das Element $y + \text{Im } f = y\rho$ auf $y\rho c = y\eta\rho = y\eta + \text{Im } f'$ für $y \in Y$. Sei dieses Bildelement null. Dann ist $y\eta = x' f'$ für ein $x' \in X'$. Dank ξ surjektiv gibt es ein $x \in X$ mit $x\xi = x'$. Also ist $y\eta = x' f' = x\xi f' = x f \eta$, also $y - x f \in \text{Kern } \eta \subseteq \text{Im } f$, und somit gibt es ein $\tilde{x} \in X$ mit $y - x f = \tilde{x} f$. Also ist $y + \text{Im } f = (x + \tilde{x})f + \text{Im } f = 0$.

Aufgabe 13⁺

Beachte, daß $\delta : \bigoplus_{i \in [1, k]} M_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in [1, \ell]} N_j, (m_1, \dots, m_k) \longmapsto (m_1 \delta_{1,1}, \dots, m_\ell \delta_{\ell, \ell})$.

Wir haben den R -linearen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \text{Cokern } \delta &= (\bigoplus_{i \in [1, \ell]} N_j) / \text{Im } \delta &\xrightarrow{\sim}& \bigoplus_{i \in [1, \ell]} \text{Cokern } \delta_{i, i} \\ (n_1, \dots, n_\ell) + \text{Im } \delta &\longmapsto && (n_1 + \text{Im } \delta_{1,1}, \dots, n_\ell + \text{Im } \delta_{\ell, \ell}) \\ (n_1, \dots, n_\ell) + \text{Im } \delta &\longleftarrow && (n_1 + \text{Im } \delta_{1,1}, \dots, n_\ell + \text{Im } \delta_{\ell, \ell}). \end{aligned}$$

Hierbei ist \longmapsto wohldefiniert, da $(n_1, \dots, n_\ell) \in \text{Im } \delta$ impliziert, daß $n_i \in \text{Im } \delta_{i, i}$ für alle $i \in [1, \ell]$.

Ferner ist \longleftarrow wohldefiniert, da $(n_1, \dots, n_\ell) \in \text{Im } \delta$ von $(n_i \in \text{Im } \delta_{i, i}$ für alle $i \in [1, \ell])$ auch impliziert wird.

Aufgabe 14⁺

- (1) Sei M ein endlich erzeugter \mathbf{Z} -Modul, sagen wir, $M = \mathbf{Z}\langle m_1, \dots, m_\ell \rangle$ für ein $\ell \geq 0$ und $m_i \in M$ für $i \in [1, \ell]$. Sei $\mathbf{Z} \xrightarrow{\mu_i} M, z \longmapsto z m_i$. Sei $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_\ell \end{pmatrix} : \mathbf{Z}^{\oplus \ell} \longrightarrow M, (z_1, \dots, z_\ell) \longmapsto z_1 m_1 + \dots + z_\ell m_\ell$.

Nach Konstruktion ist μ surjektiv.

Nach Aufgabe 11.(2) ist Kern μ endlich erzeugt. Genau wie eben erhalten wir ein $k \geq 0$ und eine surjektive \mathbf{Z} -lineare Abbildung $\mathbf{Z}^{\oplus k} \longrightarrow \text{Kern } \mu$. Komponiert mit der Inklusion $\text{Kern } \mu \xrightarrow{\iota} M$ erhalten wir eine \mathbf{Z} -lineare Abbildung $\varphi = (\varphi_{i, j})_{i, j} : \mathbf{Z}^{\oplus k} \longrightarrow \mathbf{Z}^{\oplus \ell}$, für welche $\text{Im } \varphi = \text{Kern } \mu$ ist.

Durch Hinzufügen weiterer Summanden auf der linken Seite, die allesamt auf 0 abgebildet werden, können wir ferner erreichen, daß $0 \leq \ell \leq k$. In anderen Worten, wir können der Matrix φ weitere Nullzeilen anfügen, ohne daß sich ihr Bild ändert.

Für $i \in [1, k]$ und $j \in [1, \ell]$ ist $\varphi_{i, j} : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$ eine \mathbf{Z} -lineare Abbildung; sei $f_{i, j} := 1 \varphi_{i, j}$, und sei $F := (f_{i, j})_{i, j} \in \mathbf{Z}^{k \times \ell}$.

Der Homomorphiesatz, angewandt auf μ , liefert einen \mathbf{Z} -linearen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \text{Cokern } \varphi &= \mathbf{Z}^{\oplus \ell} / \text{Im } \varphi &\xrightarrow{\sim}& M \\ (z_i)_i + \text{Im } \varphi &\longmapsto && (z_i)_i \mu = \sum_{i \in [1, \ell]} z_i m_i ; \end{aligned}$$

cf. Lemma 30.

Seien $S = (s_{i, j})_{i, j} \in \mathbf{Z}^{k \times k}$ und $T = (t_{i, j})_{i, j} \in \mathbf{Z}^{\ell \times \ell}$ ganzzahlig invertierbar so, daß $SFT = D = (d_{i, j})_{i, j}$ diagonal ist; vgl. Aufgabe 10.

Sei $\sigma_{i, j} : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}, z \longmapsto z s_{i, j}$ für $i, j \in [1, k]$; sei $\delta = (\delta_{i, j})_{i, j}$. Es ist σ ein \mathbf{Z} -linearer Isomorphismus.

Sei $\tau_{i, j} : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}, z \longmapsto z t_{i, j}$ für $i, j \in [1, \ell]$; sei $\tau = (\tau_{i, j})_{i, j}$. Es ist τ ein \mathbf{Z} -linearer Isomorphismus.

Sei $\delta_{i, j} : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}, z \longmapsto z d_{i, j}$ für $i, j \in [1, k]$.

Aus $SFT = D$ folgt $\sigma \varphi \tau = \delta$ ⁽¹⁾.

Anwendung von Aufgabe 12.(1, 2) auf das kommutative Viereck

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}^{\oplus k} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{Z}^{\oplus \ell} \\ \sigma^{-1} \downarrow \wr & & \wr \downarrow \tau \\ \mathbf{Z}^{\oplus k} & \xrightarrow{\delta} & \mathbf{Z}^{\oplus \ell} \end{array}$$

liefert einen \mathbf{Z} -linearen Isomorphismus $\text{Cokern } \varphi \xrightarrow{\sim} \text{Cokern } \delta$.

Aufgabe 13, angewandt auf δ , liefert nun einen Isomorphismus $\text{Cokern } \delta \simeq \bigoplus_{i \in [1, \ell]} \text{Cokern } \delta_{i, i}$. Da $\text{Cokern } \delta_{i, i} \simeq \mathbf{Z}/d_{i, i}$ für $i \in [1, \ell]$, ist $\text{Cokern } \delta \simeq \bigoplus_{i \in [1, \ell]} \mathbf{Z}/d_{i, i}$. Insgesamt ist also

$$M \simeq \text{Cokern } \varphi \simeq \text{Cokern } \delta \simeq \bigoplus_{i \in [1, \ell]} \mathbf{Z}/d_{i, i},$$

und letzterer \mathbf{Z} -Modul ist von der verlangten Form.

¹Man darf gemäß unseren Konventionen auch die Matrix S mit der Abbildung σ identifizieren, die Matrix F mit φ , die Matrix τ mit T und die Matrix D mit δ .

(2) Mit (1) bleibt ein endlicher \mathbf{Z} -Modul der Form $M = \bigoplus_{i \in [1, \ell]} \mathbf{Z}/e_i$ zu betrachten, wobei $\ell \geq 0$ und $e_i \in \mathbf{Z}$ für $i \in [1, \ell]$. Ohne Einschränkung ist $e_i \geq 0$ für $i \in [1, \ell]$. Da M endlich ist, ist $e_i \neq 0$ für alle $i \in [1, \ell]$.

Ist $e_i = 1$ für gewisse $i \in [1, \ell]$, so können wir die zugehörigen Summanden weglassen, da $X \oplus 0 \oplus Y \simeq X \oplus Y$ für \mathbf{Z} -Moduln X und Y .

Also ist M isomorph zu einem \mathbf{Z} -Modul der verlangten Form.