M. Künzer

Homologische Algebra, WS 09/10

Lösung 2

Aufgabe 6

Zunächst merken wir an, daß auch $I \cap J \subseteq R$ ein Ideal ist.

Es ist φ wohldefiniert, da für $r + (I \cap J) = r' + (I \cap J)$ auch $r + I = r' + I$ und $r + J = r' + J$, wobei $r,\, r' \in R$. (Oder aber, man verwendet Bemerkung 13.)

Es ist φ ein Ringmorphismus.

Es ist φ injektiv, da aus $r + I = 0$ und $r + J = 0$ folgt, daß $r \in I \cap J$, also $r + (I \cap J) = 0$.

Zeigen wir die Surjektivität. Für $r,\, s \in R$ wird $ry + sx + (I \cap J)$ abgebildet auf

$$(ry + sx + I, ry + sx + J) \;=\; (ry + I, sx + J) \;=\; (r(1-x) + I, s(1-y) + J) \;=\; (r + I, s + J)\;.$$

Aus dem Beweis der Surjektivität resultiert auch die Formel

$$(r + I, s + J)\varphi^{-1} \;=\; ry + sx + (I \cap J)$$

für die Umkehrabbildung, wobei $r,\, s \in R$.

Aufgabe 7

Wie in Aufgabe 3.(1) sieht man, daß $m + N = \tilde{m} + N$ genau dann, wenn $m - \tilde{m} \in N$, wobei $m,\, \tilde{m} \in M$.

Die Addition ist wohldefiniert, da für $m,\, \tilde{m} \in M$ mit $m + N = \tilde{m} + N$ und für $m',\, \tilde{m}' \in M$ mit $m' + N = \tilde{m}' + N$ auch $(m+m') - (\tilde{m}+\tilde{m}') = (m-\tilde{m}) + (m'-\tilde{m}') \in N$ und somit $(m+m') + N = (\tilde{m}+\tilde{m}') + N$ ist. Die Skalarmultiplikation ist wohldefiniert, da für $r \in R$ und $m,\, \tilde{m} \in M$ mit $m - \tilde{m} \in N$ auch $rm - r\tilde{m} = r(m - \tilde{m}) \in N$ ist, und also $rm + N = r\tilde{m} + N$ ist.

Die R-Linksmodul-Eigenschaften von M/N vererben sich wie folgt von M. Seien $m,\, m',\, m'' \in M$ und $r,\, r' \in R$.

Zu (LMod 1). Es ist

$$\begin{array}{rcl} (m+N) + ((m'+N) + (m''+N)) & = & (m+N) + ((m'+m'') + N) \\ & = & (m + (m'+m'')) + N \\ & = & (m + m' + m'') + N\;, \end{array}$$

und genauso $((m+N) + (m'+N)) + (m''+N) = (m + m' + m'') + N$.

Es ist $(m+N) + (m'+N) = (m+m') + N = (m'+m) + N = (m+N) + (m'+N)$.

Es ist $(0+N) + (m+N) = (0+m) + N = m + N$.

Es ist $((-m)+N) + (m+N) = ((-m)+m) + N = 0 + N$.

Zu (LMod 2). Es ist

$$\begin{array}{rcl} r \cdot (r' \cdot (m+N)) & = & r \cdot ((r' \cdot m) + N) \\ & = & (r \cdot (r' \cdot m)) + N \\ & = & ((r \cdot r') \cdot m) + N \\ & = & (r \cdot r') \cdot (m+N)\;. \end{array}$$

Zu (LMod 3). Es ist $1 \cdot (m+N) = (1 \cdot m) + N = m + N$.

Zu (LMod 4). Es ist

$$\begin{array}{rl} & (r+r')\cdot((m+N)+(m'+N)) \\ = & (r+r')\cdot((m+m')+N) \\ = & ((r+r')\cdot(m+m'))+N \\ = & (rm+rm'+r'm+r'm')+N \\ = & (rm+N)+(rm'+N)+(r'm+N)+(r'm'+N) \\ = & r\cdot(m+N)+r\cdot(m'+N)+r'\cdot(m+N)+r'\cdot(m'+N) \end{array}$$

Aufgabe 8

(1) Seien $s,\, s' \in S$. Es ist

$$1_S f^{-1} \;=\; 1_R f f^{-1} \;=\; 1_R\;.$$

Es ist

$$(s+s')f^{-1} \;=\; (sf^{-1}f + s'f^{-1}f)f^{-1} \;=\; (sf^{-1}+s'f^{-1})ff^{-1} \;=\; sf^{-1}+s'f^{-1}\;.$$

Es ist

$$(s\cdot s')f^{-1} \;=\; (sf^{-1}f\cdot s'f^{-1}f)f^{-1} \;=\; (sf^{-1}\cdot s'f^{-1})ff^{-1} \;=\; sf^{-1}\cdot s'f^{-1}\;.$$

(2) Seien $r,\, r' \in R$ und $n,\, n' \in N$. Es ist

$$\begin{array}{rcl} (rn+r'n')f^{-1} & = & (r(nf^{-1}f)+r'(n'f^{-1}f))f^{-1} \\ & = & (r(nf^{-1})+r'(n'f^{-1}))ff^{-1} \\ & = & r(nf^{-1})+r'(n'f^{-1})\;. \end{array}$$

Aufgabe 9

(1) Die Aussage ist richtig.

Seien $r,\, r' \in R^\circ$, was als Menge gleich R ist.

Beachte zunächst, daß die Eins in R auch die Eins in R° ist.

Nun gilt weiterhin $1_R f = 1_S$ und $(r+r')f = rf + r'f$ für $r,\, r' \in R$.

Ferner ist $(r * r')f = (r'\cdot r)f = r'f\cdot rf = rf * r'f$ für $r,\, r' \in R$.

(2) Die Aussage ist richtig.

Bezeichne $\mathrm{E} = \mathrm{E}_2 = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Bezeichne A^{t} die zu $A \in \mathbf{Q}^{2\times 2}$ transponierte Matrix.

Es ist

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Q}^{2\times 2} & \xrightarrow{\sim} & (\mathbf{Q}^{2\times 2})^\circ \\ A & \longmapsto & A^{\mathrm{t}}\;, \end{array}$$

da in der Tat $\mathrm{E}^{\mathrm{t}} = \mathrm{E}$, $(A+A')^{\mathrm{t}} = A^{\mathrm{t}} + A'^{\mathrm{t}}$ und $(A\cdot A')^{\mathrm{t}} = A'^{\mathrm{t}}\cdot A^{\mathrm{t}} = A^{\mathrm{t}} * A'^{\mathrm{t}}$ für $A,\, A' \in \mathbf{Q}^{2\times 2}$.

(3) Die Aussage ist falsch. Sei z.B. $F := \mathbf{Z}/2$ und $R = \left(\begin{smallmatrix}F&F&F\\0&F&F\\0&F&F\end{smallmatrix}\right)$. Mittels Transposition ist $R^\circ \simeq \left(\begin{smallmatrix}F&0&0\\F&F&F\\F&F&F\end{smallmatrix}\right) =: S$; vgl. (2).

Nehmen wir an, es ist $S = \left(\begin{smallmatrix}F&0&0\\F&F&F\\F&F&F\end{smallmatrix}\right) \simeq \left(\begin{smallmatrix}F&F&F\\0&F&F\\0&F&F\end{smallmatrix}\right) = R$.

In $R = \left(\begin{smallmatrix}F&F&F\\0&F&F\\0&F&F\end{smallmatrix}\right)$ gibt es ein Element $r := \left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right) \neq 0$ mit $Rr = \{0, r\}$. Also erfüllt das Bild s von r unter dem gegebenen Isomorphismus ebenfalls die Eigenschaft $s \neq 0$ und $Ss = \{0, s\}$.

Seien $e_1 := \left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)$, $e_2 := \left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)$ und $e_3 := \left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right)$.

Enthielte s nichtverschwindende Einträge in den Zeilen i und j mit $i \neq j$, so wäre $e_i s \neq 0$ und $e_i s \neq s$, da die Einträge von $e_i s$ in Zeile j verschwinden. Also enthält s nur in einer Zeile nichtverschwindende Einträge.

Falls $s = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, dann ist $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \notin \{0, s\}$, was nicht sein kann.

Falls $s = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & c & d \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, dann ist $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & c & d \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b & c & d \end{smallmatrix}\right) \notin \{0, s\}$, was nicht sein kann.

Falls $s = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e & f & g \end{smallmatrix}\right)$, dann ist $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e & f & g \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ e & f & g \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \notin \{0, s\}$, was nicht sein kann.

Insgesamt sind wir an einem *Widerspruch* angelangt.

Aufgabe 10$^+$

Eine Matrix in $\mathbf{Z}^{m\times m}$ oder $\mathbf{Z}^{n\times n}$ heiße hier invertierbar, falls sie ein ganzzahliges Inverses besitzt.

Eine Zeilenvertauschung in einer Matrix in $\mathbf{Z}^{m\times n}$ entspricht einer Multiplikation mit einer invertierbaren Matrix von links.

Die Addition eines ganzzahligen Vielfachen einer Zeile zu einer anderen in einer Matrix in $\mathbf{Z}^{m\times n}$ entspricht einer Multiplikation mit einer invertierbaren Matrix von links.

Analog für Spaltenoperationen.

Sei $A \in \mathbf{Z}^{m\times n}$ gegeben. Wir dürfen $m \geqslant 1$ und $n \geqslant 1$ annehmen.

Es genügt zu zeigen, daß es $S \in \mathbf{Z}^{m\times m}$ invertierbar und $T \in \mathbf{Z}^{n\times n}$ invertierbar so gibt, daß $SAT = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & A' \end{smallmatrix}\right)$ für ein $a \in \mathbf{Z}$ und ein $A' \in \mathbf{Z}^{(m-1)\times(n-1)}$. Denn dies läßt sich iterieren, d.h. wir können dieselbe Aussage auf A' anwenden, usf.

Wir zeichnen folgende Teilmenge und folgendes Element der Menge $[1, m] \times [1, n]$ aller Eintragspositionen der Matrizen in $\mathbf{Z}^{m\times n}$ aus.

Sei $\{(i, 1) \ : \ i \in [2, m]\} \cup \{(1, j) \ : \ j \in [2, n]\} \subseteq [1, m] \times [1, n]$ der *Rand.*

Sei $(1, 1) \in [1, m] \times [1, n]$ das *Eck.*

Sei also $A \in \mathbf{Z}^{m\times n}$ gegeben, und seien nicht alle Einträge des Randes null. Mittels einer Zeilen- oder einer Spaltenvertauschung kann man erreichen, daß der Eintrag im Eck ungleich null ist.

Es genügt zu zeigen, daß es $S \in \mathbf{Z}^{m\times m}$ invertierbar und $T \in \mathbf{Z}^{n\times n}$ invertierbar so gibt, daß der Betrag des Eintrags im Eck von SAT kleiner ist als der Betrag des Eintrags im Eck von A, oder so, daß im Rand von SAT alle Einträge null sind. Denn solche Umformungen lassen sich nur endlich oft iterieren, so daß eine Iteration schließlich mit einer Matrix endet, deren Einträge im Rand alle null sind.

Fall 1. Teilt der Eintrag im Eck von A jeden Eintrag des Randes, so kann mit Addition von Vielfachen der ersten Zeile auf die weiteren Zeilen und nachfolgender Addition von Vielfachen der ersten Spalte auf die weiteren Spalten erreicht werden, daß in der resultierenden Matrix im Rand alle Einträge null sind.

Fall 2. Teilt der Eintrag im Eck von A einen Eintrag des Randes nicht, so kann unter Verwendung von Division mit Rest mit Addition eines Vielfachen der ersten Zeile auf eine weitere Zeile oder mit Addition eines Vielfachen der ersten Spalte auf eine weitere Spalte erreicht werden, daß im Rand der umgeformten Matrix ein Eintrag steht, dessen Betrag kleiner ist als der Betrag des Eintrags im Eck. Diesen Eintrag können wir mit Zeilen- oder Spaltenvertauschen ins Eck bringen.

Im Fall 1 sind in der resultierenden Matrix alle Einträge des Randes gleich null. Im Fall 2 ist in der resultierenden Matrix der Eintrag im Eck von kleinerem Betrag als in der Ausgangsmatrix A.