

Lösung 10

Aufgabe 38

- (1) Da f monomorph ist, gibt es dank (Ab2) ein $Y \xrightarrow{g} Z$ mit f Kern von g . Da $fg = 0$, gibt es dank r Cokern von f ein s mit $rs = g$. Sei nun $T \xrightarrow{t} Y$ mit $tr = 0$ gegeben. Dann ist auch $tg = trs = 0s = 0$. Also gibt es ein $T \xrightarrow{t'} X$ mit $t'f = t$. Aus der Monomorphie von f folgt die diesbezügliche Eindeutigkeit von t' .

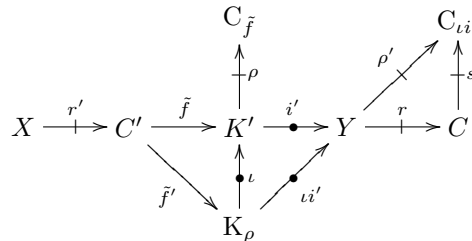
Man kann alternativ auch Lemma 121 auf (f, g) und (i', r) anwenden.

- (2) Da f epimorph ist, ist $C \simeq 0$. Da f monomorph ist, ist mit (1) aber f ein Kern zu $Y \rightarrow 0$. Also ist f ein Isomorphismus.
- (3) Da $if = 0$, erhalten wir zunächst ein $C' \xrightarrow{q} Y$ mit $r'q = f$. Da r' epimorph ist, folgt aus $r'qr = fr = 0 = r'0$, daß $qr = 0$. Also gibt es ein $C' \xrightarrow{\tilde{f}} K'$ mit $\tilde{f}i' = q$, also mit $r'\tilde{f}i' = f$. Da r' epi- und i' monomorph ist, ist \tilde{f} durch diese Gleichung auch festgelegt. Wir haben zu zeigen, daß \tilde{f} ein Isomorphismus ist.

Wir behaupten, daß \tilde{f} ein Epimorphismus ist. Es genügt zu zeigen, daß $C_{\tilde{f}} \simeq 0$.

Schreibe $\rho := \rho_{\tilde{f}}$. Schreibe $\iota := \iota_{\rho}$. Da $\tilde{f}\rho = 0$, gibt es ein eindeutiges $C' \xrightarrow{\tilde{f}'} K_{\rho}$ mit $\tilde{f}'\iota = \tilde{f}$.

Schreibe $\rho' := \rho_{i'}$. Es ist $f\rho' = r'\tilde{f}i'\rho' = r'\tilde{f}'\iota i'\rho' = 0$. Also gibt es ein $C \xrightarrow{s} C_{i'}$ mit $rs = \rho'$. Wir haben folgendes kommutative Diagramm konstruiert.



Dank (1) ist i' ein Kern von ρ' . Nun ist $i'\rho' = i'rs = 0$. Also gibt es ein $K' \xrightarrow{j} K_{\rho}$ mit $ji' = i'$, wegen i' monomorph also mit $j\iota = \text{id}_{K'}$. Es folgt $0 = j\iota\rho = \rho$, i.e. $(K' \xrightarrow{\rho} C_{\tilde{f}}) = (K' \rightarrow 0 \rightarrow C_{\tilde{f}})$. Es folgt $0 \rightarrow C_{\tilde{f}}$, und da dies sowohl eine Coretraktion als auch ein Epimorphismus ist, ist es ein Isomorphismus. Dies zeigt die *Behauptung*.

Dual hierzu ist \tilde{f} auch ein Monomorphismus.

Mit (2) können wir schließen, daß \tilde{f} insgesamt ein Isomorphismus ist.

Vgl. Lemma 122.

Beachte, daß (1) und (2) auch aus (3) folgen.

Aufgabe 39

Sei $Z' \xrightarrow{i} Z \xrightarrow{r} Z''$ eine kurz exakte Sequenz in \mathcal{A} . Zu zeigen ist, daß

$$\mathcal{A}(X, Z') \xrightarrow{\mathcal{A}(X, i)} \mathcal{A}(X, Z) \xrightarrow{\mathcal{A}(X, r)} \mathcal{A}(X, Z'') .$$

linksexakt ist. Wir können hierzu die alte Definition 47.(2) heranziehen; vgl. Beispiel 126.

Es ist $\mathcal{A}(X, i)$ injektiv, da i monomorph ist.

Es ist $\text{Im } \mathcal{A}(X, i) \subseteq \text{Kern } \mathcal{A}(X, r)$, da $ir = 0$.

Zeigen wir, daß auch $\text{Im } \mathcal{A}(X, i) \supseteq \text{Kern } \mathcal{A}(X, r)$. Sei $f \in \mathcal{A}(X, Z)$ im Kern von $\mathcal{A}(X, r)$, i.e. sei $fr = 0$. Da i ein Kern zu r ist, gibt es ein f' mit $f'i = f$, i.e. mit $f' \mathcal{A}(X, i) = f$. Somit ist $f \in \text{Im } \mathcal{A}(X, i)$.

Insgesamt ist also $\text{Im } \mathcal{A}(X, i) = \text{Kern } \mathcal{A}(X, r)$.

Aufgabe 40

(1) Zeigen wir, daß $\llbracket \mathcal{D}, \mathcal{A} \rrbracket$ additiv ist.

Für $X \in \text{Ob } \llbracket \mathcal{D}, \mathcal{A} \rrbracket$ und $u \xrightarrow{\alpha} v$ in \mathcal{D} schreiben wir $X(u \xrightarrow{\alpha} v) := (X_u \xrightarrow{X_\alpha} X_v)$.

Für $X \xrightarrow{f} Y$ in $\llbracket \mathcal{D}, \mathcal{A} \rrbracket$ und $u \in \text{Ob } \mathcal{D}$ schreiben wir $(X \xrightarrow{f} Y)_u := (X_u \xrightarrow{f_u} Y_u)$.

Es ist also $X_\alpha f_v = f_u Y_\alpha$ stets.

Wir sehen einen Funktor von \mathcal{D} nach \mathcal{A} als "Diagramm auf \mathcal{D} mit Werten in \mathcal{A} " an.

Setze $0(u \xrightarrow{\alpha} v) := (0 \longrightarrow 0)$ für $u \xrightarrow{\alpha} v$ in \mathcal{D} . Dies liefert einen Funktor $0 \in \text{Ob } \llbracket \mathcal{D}, \mathcal{A} \rrbracket$. Für alle $X \in \text{Ob } \llbracket \mathcal{D}, \mathcal{A} \rrbracket$ gibt es genau einen Morphismus $X \longrightarrow 0$, denn das einzige hierzu in Frage kommende Tupel ist in der Tat natürlich. Dual hierzu gibt es auch genau einen Morphismus $0 \longrightarrow X$. Also ist 0 ein Nullobjekt in $\llbracket \mathcal{D}, \mathcal{A} \rrbracket$. Für $X, Y \in \text{Ob } \llbracket \mathcal{D}, \mathcal{A} \rrbracket$ ist dementsprechend der Nullmorphismus durch $(X \xrightarrow{0} Y)_u = (X_u \xrightarrow{0} Y_u)$ für $u \in \text{Ob } \mathcal{D}$ gegeben.

Zu (Add 1). Seien $X, Y \in \llbracket \mathcal{D}, \mathcal{A} \rrbracket$ gegeben.

Sei $u \in \text{Ob } \mathcal{D}$. Wir haben direkte Summen $X_u \oplus Y_u$ für $u \in \text{Ob } \mathcal{D}$, zusammen mit Inklusionsmorphisms $X_u \xrightarrow{\iota_{u,1}} X_u \oplus Y_u$ und $Y_u \xrightarrow{\iota_{u,2}} X_u \oplus Y_u$, sowie Projektionsmorphisms $X_u \oplus Y_u \xrightarrow{\pi_{u,1}} X_u$ und $X_u \oplus Y_u \xrightarrow{\pi_{u,2}} Y_u$.

Setze $(X \oplus Y)_u := X_u \oplus Y_u$ für $u \in \text{Ob } \mathcal{D}$. Für $u \xrightarrow{\alpha} v$ setzen wir

$$((X \oplus Y)_u \xrightarrow{(X \oplus Y)_\alpha} (X \oplus Y)_v) := (X_u \oplus Y_u \xrightarrow{\begin{pmatrix} X_\alpha & Y_\alpha \end{pmatrix}} X_v \oplus Y_v).$$

Dann ist $X \oplus Y \in \text{Ob } \llbracket \mathcal{D}, \mathcal{A} \rrbracket$. Denn zum einen ist $(X \oplus Y)_{\text{id}} = \begin{pmatrix} \text{id} & \text{id} \end{pmatrix} = \text{id}$. Zum anderen ist für gegebene $u \xrightarrow{\alpha} v \xrightarrow{\beta} w$ in \mathcal{D} auch

$$(X \oplus Y)_\alpha (X \oplus Y)_\beta = \begin{pmatrix} X_\alpha & Y_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_\beta & Y_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_\alpha X_\beta & Y_\alpha Y_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{\alpha\beta} & Y_{\alpha\beta} \end{pmatrix} = (X \oplus Y)_{\alpha\beta}.$$

Setze $\iota_1 : X \longrightarrow X \oplus Y$ durch $(\iota_1)_u := \iota_{1,u}$ für $u \in \text{Ob } \mathcal{D}$. Es ist ι_1 ein Morphismus in $\llbracket \mathcal{D}, \mathcal{A} \rrbracket$, d.h. eine Transformation, da für $u \xrightarrow{\alpha} v$ in \mathcal{D} sich

$$\iota_{1,u} (X \oplus Y)_\alpha = (1 \ 0) \begin{pmatrix} X_\alpha & Y_\alpha \end{pmatrix} = (X_\alpha \ 0) = X_\alpha (1 \ 0) = X_\alpha \iota_{1,v}$$

ergibt. Analog resp. dual dazu können wir $\iota_2 : Y \longrightarrow X \oplus Y$ durch $(\iota_2)_u := \iota_{2,u}$, sowie $\pi_1 : X \oplus Y \longrightarrow X$ durch $(\pi_1)_u := \pi_{1,u}$ und $\pi_2 : X \oplus Y \longrightarrow Y$ durch $(\pi_2)_u := \pi_{2,u}$ festlegen.

Zu (Sum 1). Seien Transformationen $S \xrightarrow{\xi} X$ und $S \xrightarrow{\eta} Y$ gegeben.

Zur Existenz des Induzierten. Setze $S \xrightarrow{(\xi \ \eta)} X \oplus Y$ durch $(\xi \ \eta)_u = (\xi_u \ \eta_u)$ für $u \in \text{Ob } \mathcal{D}$. Dies ist eine Transformation, da für $u \xrightarrow{\alpha} v$ in \mathcal{D} sich

$$\begin{aligned} (\xi \ \eta)_u (X \oplus Y)_\alpha &= (\xi_u \ \eta_u) \begin{pmatrix} X_\alpha & Y_\alpha \end{pmatrix} = (\xi_u X_\alpha \ \eta_u Y_\alpha) \\ &= (S_\alpha \xi_v \ S_\alpha \eta_v) = S_\alpha (\xi_v \ \eta_v) = S_\alpha (\xi \ \eta)_v \end{aligned}$$

ergibt. Ferner ist in der Tat $(\xi \ \eta) \pi_1 = \xi$, da sich bei $u \in \text{Ob } \mathcal{D}$

$$((\xi \ \eta) \pi_1)_u = (\xi_u \ \eta_u) \pi_{1,u} = \xi_u$$

ergibt. Genauso wird auch $(\xi \eta) \pi_2 = \eta$.

Zur Eindeutigkeit des Induzierten. Sei umgekehrt ein $S \xrightarrow{\zeta} X \oplus Y$ mit $\zeta \pi_1 = \xi$ und $\zeta \pi_2 = \eta$ gegeben. Bei $u \in \text{Ob } \mathcal{D}$ ist dann $\zeta_u \pi_{1,u} = (\zeta \pi_1)_u = \xi_u$ und $\zeta_u \pi_{2,u} = (\zeta \pi_2)_u = \eta_u$, also insgesamt $\zeta_u = (\xi_u \eta_u)$.

Zu (Sum 2). Dual zu (Sum 1).

Zu (Sum 3). Es ist $\iota_1 \pi_1 = 1$, da bei $u \in \text{Ob } \mathcal{D}$ sich $(\iota_1 \pi_1)_u = \iota_{1,u} \pi_{1,u} = 1$ ergibt. Es ist $\iota_1 \pi_2 = 0$, da bei $u \in \text{Ob } \mathcal{D}$ sich $(\iota_1 \pi_2)_u = \iota_{1,u} \pi_{2,u} = 0$ ergibt. Genauso wird auch $\iota_2 \pi_1 = 0$ und $\iota_2 \pi_2 = 1$.

Zu (Add 2). Sei $X \in \text{Ob } \llbracket \mathcal{D}, \mathcal{A} \rrbracket$. Wir behaupten, daß $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_X & 0_{X,X} \\ 1_X & 1_X \end{pmatrix} : X \oplus X \longrightarrow X \oplus X$ durch $\begin{pmatrix} 1_X & 0_{X,X} \\ 1_X & 1_X \end{pmatrix}_u = \begin{pmatrix} 1_{X_u} & 0_{X_u, X_u} \\ 1_{X_u} & 1_{X_u} \end{pmatrix}$ für $u \in \text{Ob } \mathcal{D}$ gegeben ist. In der Tat wird

$$\iota_{1,u} \begin{pmatrix} 1_X & 0_{X,X} \\ 1_X & 1_X \end{pmatrix}_u \pi_{1,u} = (\iota_1 \begin{pmatrix} 1_X & 0_{X,X} \\ 1_X & 1_X \end{pmatrix} \pi_1)_u = (1_X)_u = 1_{X_u},$$

usf. Daher ist $\begin{pmatrix} 1_X & 0_{X,X} \\ 1_X & 1_X \end{pmatrix}_u$ ein Isomorphismus für alle $u \in \text{Ob } \mathcal{D}$. Mit Bemerkung 91 folgt, daß $\begin{pmatrix} 1_X & 0_{X,X} \\ 1_X & 1_X \end{pmatrix}$ eine Isotransformation, i.e. ein Isomorphismus in $\llbracket \mathcal{D}, \mathcal{A} \rrbracket$ ist.

Zeigen wir, daß $C(\mathcal{A})$ additiv ist.

Wir wissen mittlerweile, daß $\llbracket \mathbf{Z}^k, \mathcal{A} \rrbracket$ additiv ist. Darin ist $C(\mathcal{A})$ eine volle Teilkategorie. Es genügt zu zeigen, daß $C(\mathcal{A})$ darin eine volle additive Teilkategorie ist.

Zum einen ist unser Nullobjekt in $\llbracket \mathbf{Z}^k, \mathcal{A} \rrbracket$ in der Tat ein Komplex, i.e. in $\text{Ob } C(\mathcal{A})$.

Bleibt zum anderen zu zeigen, daß die direkte Summe zweier Komplexe wieder ein Komplex ist. Seien also $X, Y \in \text{Ob } C(\mathcal{A})$ gegeben. Sei $n \in \mathbf{Z}$. Wir haben zu zeigen, daß der Morphismus $n \longrightarrow n+2$ unter $X \oplus Y$ auf den Nullmorphismus abgebildet wird. Wir erhalten

$$\begin{aligned} & ((X \oplus Y)^n \longrightarrow (X \oplus Y)^{n+2}) \\ &= ((X \oplus Y)^n \longrightarrow (X \oplus Y)^{n+1} \longrightarrow (X \oplus Y)^{n+2}) \\ &= (X^n \oplus Y^n \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_X^n & d_Y^n \end{pmatrix}} X^{n+1} \oplus Y^{n+1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_X^{n+1} & d_Y^{n+1} \end{pmatrix}} X^{n+2} \oplus Y^{n+2}) \\ &= (X^n \oplus Y^n \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_X^n & d_X^{n+1} & d_Y^n & d_Y^{n+1} \end{pmatrix}} X^{n+2} \oplus Y^{n+2}) \\ &= (X^n \oplus Y^n \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} X^{n+2} \oplus Y^{n+2}). \end{aligned}$$

(2) **Zeigen wir, daß $\llbracket \mathcal{D}, \mathcal{A} \rrbracket$ abelsch ist.**

Mit (1) wissen wir, daß $\llbracket \mathcal{D}, \mathcal{A} \rrbracket$ additiv ist. Dank Dualität genügt es nun, (Ab 1, 2) zu zeigen.

Zu (Ab 1). Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\llbracket \mathcal{D}, \mathcal{A} \rrbracket$ gegeben. Wir konstruieren einen Kern K von f . Sei $K_u \xrightarrow{i_u} X_u$ ein Kern von $X_u \xrightarrow{f_u} Y_u$ für $u \in \text{Ob } \mathcal{D}$. Für $u \xrightarrow{\alpha} v$ in \mathcal{D} konstruieren wir

$$\begin{array}{ccccc} K_u & \xrightarrow{i_u} & X_u & \xrightarrow{f_u} & Y_u \\ K_\alpha \downarrow & & X_\alpha \downarrow & & Y_\alpha \downarrow \\ K_v & \xrightarrow{i_v} & X_v & \xrightarrow{f_v} & Y_v \end{array};$$

cf. Bemerkung 123.(2). Dies definiert einen Funktor K , da wegen der Eindeutigkeit des auf den Kernen Induzierten auch $K_{\text{id}} = \text{id}$ und $K_{\alpha\beta} = K_\alpha K_\beta$ für $u \xrightarrow{\alpha} v \xrightarrow{\beta} w$ in \mathcal{D} ist; für ersteres beachte man $K_{\text{id}} i_u = i_u = \text{id } i_u$; für letzteres beachte man $K_{\alpha\beta} i_w = i_u X_{\alpha\beta} = i_u X_\alpha X_\beta = K_\alpha i_v X_\beta = K_\alpha K_\beta i_w$.

Da nach Konstruktion $i_u X_\alpha = K_\alpha i_v$ ist für $u \xrightarrow{\alpha} v$ in \mathcal{D} , ist i in der Tat eine Transformation.

Wir behaupten, daß i ein Kern von f ist. Sei $T \xrightarrow{t} X$ mit $tf = 0$ gegeben. Für $u \in \text{Ob } \mathcal{D}$ ist dann $t_u f_u = (tf)_u = 0$. Da i_u nach Konstruktion ein Kern von f_u ist, gibt es folglich ein $t'_u : T_u \longrightarrow K_u$ mit $t'_u i_u = t_u$. Für $u \xrightarrow{\alpha} v$ in \mathcal{D} ist $t'_u K_\alpha i_v = t'_u i_u X_\alpha = t_u X_\alpha = T_\alpha t_v = T_\alpha t'_v i_v$, und also,

wegen i_v monomorph, $t'_u K_\alpha = T_\alpha t'_v$. Somit ist $t' : T \rightarrow K$ eine Transformation mit $t'i = t$. Die Eindeutigkeit von t' bezüglich $t'i = t$ folgt aus der Monomorphie von i_u für $u \in \text{Ob } \mathcal{D}$. Dies zeigt die *Behauptung*.

Zu (Ab 2). Sei $X \xrightarrow{f} Y$ ein Monomorphismus. Wir haben zu zeigen, daß f ein Kern eines Morphismus in $\llbracket \mathcal{D}, \mathcal{A} \rrbracket$ ist.

Nach Bemerkung 118.(3) ist $0 \rightarrow X$ ein Kern von f . Nach Bemerkung 118.(2) ist der in (Ab 1) konstruierte Kern von f also isomorph zu 0. Folglich ist $K_{f_u} \simeq 0$ für alle $u \in \text{Ob } \mathcal{D}$. Nach Bemerkung 118.(5, 3) folgt, daß f_u monomorph ist für $u \in \text{Ob } \mathcal{D}$.

Dual zur Konstruktion in (Ab 1) erhalten wir einen Cokern $Y \xrightarrow{r} C$ von $X \xrightarrow{f} Y$ mit r_u Cokern von f_u für $u \in \text{Ob } \mathcal{D}$. Nach Aufgabe 38.(1) ist f_u ein Kern von r_u . Nach Konstruktion in (Ab 1) ist f ein Kern von r , da für $u \xrightarrow{\alpha} v$ in \mathcal{D} der eindeutige Morphismus ξ mit $\xi f_v = f_u Y_\alpha$ gleich X_α ist.

Zeigen wir, daß $C(\mathcal{A})$ abelsch ist.

Wir wissen mittlerweile, daß $\llbracket \mathbf{Z}^k, \mathcal{A} \rrbracket$ abelsch ist. Darin ist $C(\mathcal{A})$ eine volle, additive Teilkategorie. Können wir zeigen, daß der in $\llbracket \mathbf{Z}^k, \mathcal{A} \rrbracket$ gebildete Kern eines Morphismus von Komplexen in $C(\mathcal{A})$ liegt, und dual hierzu der Cokern, so sind erfüllt diese a fortiori die universelle Eigenschaft eines Kerns resp. eines Cokerns in $C(\mathcal{A})$. Da ferner zum Nachweis, daß jeder Monomorphismus ein Kern ist, der Cokern dieses Monomorphismus herangezogen wurde, genügt dies auch zum Nachweis von (Ab 2).

Zu zeigen ist also, daß wenn $K \xrightarrow{i} X$ der in $\llbracket \mathbf{Z}^k, \mathcal{A} \rrbracket$ wie oben konstruierte Kern eines Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ in $C(\mathcal{A})$ ist, dann $K \in \text{Ob } C(\mathcal{A})$ liegt, und damit $K \xrightarrow{i} X$ sich in $C(\mathcal{A})$ befindet. Sei also $n \in \mathbf{Z}$ gegeben. Wir haben zu zeigen, daß der Morphismus $n \rightarrow n+2$ unter K auf den Nullmorphismus abgebildet wird. Wir erhalten, wenn wir die vereinbarte Differentialnotation für K schon vorwegnehmen,

$$\begin{aligned} & (K^n \rightarrow K^{n+2} \xrightarrow{i^{n+2}} X^{n+2}) \\ = & (K^n \xrightarrow{d_K^n} K^{n+1} \xrightarrow{d_K^{n+1}} K^{n+2} \xrightarrow{i^{n+2}} X^{n+2}) \\ = & (K^n \xrightarrow{d_K^n} K^{n+1} \xrightarrow{i^{n+1}} X^{n+1} \xrightarrow{d_X^{n+1}} X^{n+2}) \\ = & (K^n \xrightarrow{i^n} X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \xrightarrow{d_X^{n+1}} X^{n+2}) \\ = & (K^n \xrightarrow{0} X^{n+2}). \end{aligned}$$

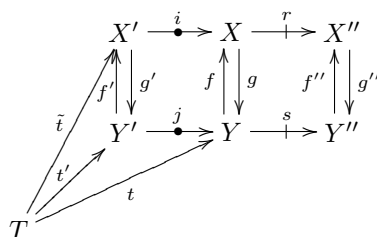
Damit ist auch $K^n \rightarrow K^{n+2}$ selbst null.

Aufgabe 41

- (1) Da r epimorph ist und g'' als Retraktion epimorph ist, ist auch $rg'' = gs$ epimorph, und also auch s epimorph.

Da i monomorph ist und f' als Coretraktion monomorph ist, ist auch $f'i = jf$ monomorph, und also auch j monomorph.

Bleibt zu zeigen, daß j ein Kern von s ist. Zum einen ist $js = jsf''g'' = jfrg'' = f'irg'' = 0$. Sei zum anderen ein t mit $ts = 0$ gegeben. Dann ist $tfr = tsf'' = 0$, und folglich gibt es ein \tilde{t} mit $tf = \tilde{t}i$. Setze $t' := \tilde{t}g'$. Es wird $t'j = \tilde{t}g'j = \tilde{t}ig = tfg = t$. Es ist t' durch $t'j = t$ auch eindeutig bestimmt, da j monomorph ist.



- (2) Sei $ip = 1$. Es ist $i(1 - pi) = 0$. Also gibt es ein q mit $rq = 1 - pi$. Da $rqr = (1 - pi)r = r$, ist $qr = 1$. Beachte ferner, daß $qpi = q(1 - rq) = 0$, und folglich $qp = 0$.

$$X' \begin{array}{c} \xleftarrow{p} \\ \bullet \\ \xrightarrow{i} \end{array} X \begin{array}{c} \xleftarrow{q} \\ \vdash \\ \xrightarrow{r} \end{array} X''$$

Wir erhalten die folgenden Morphismen von Sequenzen; i.e. in folgendem Diagramm kommutieren alle Vierecke.

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{r} & X'' \\ \parallel & & \downarrow (pr) & & \parallel \\ X' & \xrightarrow{(10)} & X' \oplus X'' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & X'' \\ \parallel & & \downarrow \begin{pmatrix} i \\ q \end{pmatrix} & & \parallel \\ X' & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{r} & X'' \end{array}$$

Diese invertieren sich gegenseitig, da $(pr) \begin{pmatrix} i \\ q \end{pmatrix} = pi + rq = 1$ und $\begin{pmatrix} i \\ q \end{pmatrix} (pr) = \begin{pmatrix} ip & ir \\ qp & qr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (3) Sei $V \xleftarrow{n} U$ mit $mn = 1$.

Sei U azyklisch. Für $i \in \mathbf{Z}$ erhalten wir mittels Bemerkung 123.(2) Morphismen von Sequenzen wie folgt.

$$\begin{array}{ccccc} I_{d_V^{i-1}} & \xrightarrow{d_V^{i-1}} & V^i & \xrightarrow{\bar{d}_V^i} & I_{d_V^i} \\ b \downarrow & & \downarrow m^i & & \downarrow \\ I_{d_U^{i-1}} & \xrightarrow{d_U^{i-1}} & U^i & \xrightarrow{\bar{d}_U^i} & I_{d_U^i} \\ c \downarrow & & \downarrow n^i & & \downarrow \\ I_{d_V^{i-1}} & \xrightarrow{d_V^{i-1}} & V^i & \xrightarrow{\bar{d}_V^i} & I_{d_V^i} \end{array}$$

Wegen der Eindeutigkeit der Induzierten komponieren diese beiden Morphismen zur Identität auf der zu V gehörigen Sequenz.

Da die zu U gehörige Sequenz kurz exakt ist, gilt dies nach (1) auch für die zu V gehörige. Also ist auch V azyklisch.

Sei U split azyklisch. Dann ist \bar{d}_U^{i-1} eine Coretraktion für alle $i \in \mathbf{Z}$, da die entsprechende Aussage in einem zu U isomorphen Komplex der Form wie in Beispiel 130.(2) gilt. Sei etwa $\bar{d}_U^{i-1} s = 1$. Dann ist

$$d_V^{i-1} m^i s c = b \bar{d}_U^{i-1} s c = b c = 1.$$

Also ist auch \bar{d}_V^{i-1} eine Coretraktion. Es folgt mit (2), daß die zu V gehörige Sequenz isomorph zu $I_{d_V^{i-1}} \xrightarrow{(10)} I_{d_V^{i-1}} \oplus I_{d_V^i} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} I_{d_V^i}$ ist, wobei es einen Isomorphismus gibt, der Identitäten auf den äußeren Termen stehen hat.

Verwendet man diese Isomorphismen für alle $i \in \mathbf{Z}$, so erkennt man, daß V split azyklisch ist.

- (4) Seien zum einen V und V' split azyklisch.

Sei $i \in \mathbf{Z}$ gegeben. Es ist $I_{d_V^i} \xrightarrow{d_V^i} V^{i+1}$ eine Coretraktion, da die entsprechende Aussage in einem zu V isomorphen Komplex der Form wie in Beispiel 130.(2) gilt. Genauso ist $I_{d_{V'}^i} \xrightarrow{d_{V'}^i} V'^{i+1}$ eine Coretraktion. Die Faktorisierung

$$d_{V \oplus V'}^i = \begin{pmatrix} d_V^i & \\ & d_{V'}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{d}_V^i & \\ & \bar{d}_{V'}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_V^i & \\ & d_{V'}^i \end{pmatrix}$$

in einen Epimorphismus, gefolgt von einem Monomorphismus zeigt, daß aus \bar{d}_V^i und $\bar{d}_{V'}^i$ Coretraktion folgt, daß $\bar{d}_{V \oplus V'}^i$ eine Coretraktion ist.

Ferner ist $\left(\begin{pmatrix} d_V^i & \\ & d_{V'}^i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{d}_V^{i+1} & \\ & \bar{d}_{V'}^{i+1} \end{pmatrix}\right)$ kurz exakt. Dazu zeigen wir, daß $\begin{pmatrix} d_V^i & \\ & d_{V'}^i \end{pmatrix}$ ein Kern von $\begin{pmatrix} \bar{d}_V^{i+1} & \\ & \bar{d}_{V'}^{i+1} \end{pmatrix}$ ist. Ist $(t \ t') \begin{pmatrix} \bar{d}_V^{i+1} & \\ & \bar{d}_{V'}^{i+1} \end{pmatrix} = (0 \ 0)$, so ist $t\bar{d}_V^{i+1} = 0$ und also $t = \hat{t}d_V^i$ für ein \hat{t} , da (d_V^i, \bar{d}_V^{i+1}) kurz exakt ist. Analog ist $t' = \hat{t}'d_{V'}^i$ für ein \hat{t}' . Insgesamt ist also $(t \ t') = (\hat{t} \ \hat{t}') \begin{pmatrix} d_V^i & \\ & d_{V'}^i \end{pmatrix}$. Die Eindeutigkeit von $(\hat{t} \ \hat{t}')$ bezüglich dieser Gleichung folgt aus der Monomorphie von $\begin{pmatrix} d_V^i & \\ & d_{V'}^i \end{pmatrix}$.

Dank (2) hat dies $V \oplus V'$ split azyklisch zur Folge.

Sei zum anderen $V \oplus V'$ split azyklisch. Dann ist $V \xrightarrow{(1 \ 0)} V \oplus V'$ eine Coretraktion. Dank (3) ist V split azyklisch.