M. Künzer Abgabe Montag, 11.01.10

Homologische Algebra, WS 09/10

Blatt 9

Aufgabe 35 (4+4+1 Punkte)

Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie und $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}$ eine volle additive Teilkategorie. Sei $\mathcal{B}$ eine additive Kategorie. Zeige.

(1) Es ist $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ eine additive Kategorie. Es ist $\mathcal{A} \xrightarrow{R} \mathcal{A}/\mathcal{N}$ ein additiver Funktor.

(2) Sei $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ ein additiver Funktor so, daß $FX \simeq 0$ für alle $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Dann gibt es genau einen additiven Funktor $\mathcal{A}/\mathcal{N} \xrightarrow{\bar{F}} \mathcal{B}$ mit $\bar{F} \circ R = F$.

(3) Seien $\mathcal{A} \overset{F}{\underset{G}{\rightrightarrows}} \mathcal{B}$ additive Funktoren so, daß $FX \simeq 0$ und $GX \simeq 0$ für alle $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Sei $F \xrightarrow{a} G$ eine Transformation. Dann gibt es genau eine Transformation $\bar{F} \xrightarrow{\bar{a}} \bar{G}$ so, daß $\bar{a}RX = aX$ für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$.

Aufgabe 36 (4 Punkte)

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ additive Kategorien. Seien $\mathcal{A} \overset{F}{\underset{G}{\rightrightarrows}} \mathcal{B}$ additive Funktoren. Sei $F \xrightarrow{\alpha} G$ eine Transformation. Seien $X,\, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ so gegeben, daß αX und αY Isomorphismen sind. Sei $Z \simeq X \oplus Y$ in $\mathcal{A}$. Zeige, daß αZ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 37 (3+3+2+4+4 Punkte)

Sei $k \geqslant 2$. Sei $\mathbf{Z}/k$-mod die volle Teilkategorie der endlichen $\mathbf{Z}/k$-Moduln in $\mathbf{Z}/k$-Mod $\subseteq \mathbf{Z}$-Mod ; vgl. §1.2.7.

(1) Zeige, daß der Funktor $F := {}_{\mathbf{Z}}(-, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) : \mathbf{Z}\text{-Mod}^\circ \longrightarrow \mathbf{Z}\text{-Mod}$ zu einer Äquivalenz $F_k : \mathbf{Z}/k\text{-mod}^\circ \longrightarrow \mathbf{Z}/k\text{-mod}$ einschränkt. Zeige hierzu, daß es eine Transformation $\mathrm{id} \xrightarrow{\tau} F^2$ gibt, für welche τX ein Isomorphismus ist wann immer $X \in \operatorname{Ob}(\mathbf{Z}/k\text{-mod})$.

(2) Sei $\mathbf{Z}/\ell \xrightarrow{s} \mathbf{Z}/m$ in $\mathbf{Z}/k$-mod, wobei $s \in \mathbf{Z}$. Ersetze $F(\mathbf{Z}/\ell \xrightarrow{s} \mathbf{Z}/m)$ isomorph durch einen Morphismus zwischen zyklischen abelschen Gruppen.

(3) Sei $\bigoplus_{i\in[1,p]} \mathbf{Z}/\ell_i \xrightarrow{(s_{i,j})_{i,j}} \bigoplus_{j\in[1,q]} \mathbf{Z}/m_j$ in $\mathbf{Z}/k$-mod, wobei $s_{i,j} \in \mathbf{Z}$. Ersetze sein Bild unter F isomorph durch einen Morphismus zwischen direkten Summen zyklischer abelscher Gruppen.

(4) Bestimme in Aufgabe 15.(3) eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung $W \xrightarrow{h} X$ so, daß $W \xrightarrow{h} X \xrightarrow{f} Y$ linksexakt und W direkte Summe zyklischer abelscher Gruppen ist. (Bei der erforderlichen Cokern-Berechnung genügt die Angabe des Ergebnisses unter Verweis auf die Methode aus Aufgabe 15.)

(5) Wie (4), nur in Aufgabe 15.(4).