M. Künzer Abgabe Montag, 04.01.10

Homologische Algebra, WS 09/10

Blatt 8

Aufgabe 31 (4 Punkte)

Zeige, daß die Kategorie (Rel) der Mengen mit Relationen als Morphismen ein Nullobjekt hat, sowie zwar (Add 1), nicht aber (Add 2) erfüllt.

Aufgabe 32 (3+3+3+3+3+2+2 Punkte) Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie.

(1) Sei $m \geqslant 0$. Seien $X_1, \ldots, X_m \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Zeige, daß $(X_1, \ldots, X_m)$ eine direkte Summe besitzt. (Hinweis: Induktion.)

(2) Seien $\ell, m, n \geqslant 0$. Seien $X_i \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ für $i \in [1,\ell]$, $Y_j \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ für $j \in [1,m]$ und $Z_k \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ für $k \in [1,n]$. Seien $\bigoplus_{i\in[1,\ell]} X_i \xrightarrow{(f_{i,j})_{i,j}} \bigoplus_{j\in[1,m]} Y_j \xrightarrow{(g_{j,k})_{j,k}} \bigoplus_{k\in[1,n]} Z_k$ in $\mathcal{A}$ gegeben. Zeige, daß $(f_{i,j})_{i,j}\,(g_{j,k})_{j,k} = \big(\sum_{j\in[1,m]} f_{i,j}g_{j,k}\big)_{i,k}$.

(3) Seien $k, \ell \geqslant 0$. Seien $f_1, \ldots, f_{k+\ell} : X \longrightarrow Y$ in $\mathcal{A}$. Zeige, daß $(\sum_{i\in[1,k]} f_i) + (\sum_{i\in[k+1,\,k+\ell]} f_i) = \sum_{i\in[1,k+\ell]} f_i$.

(4) Seien $k, \ell \geqslant 0$. Seien $f_i : X \longrightarrow Y$ für $i \in [1,k]$ und $g_j : Y \longrightarrow Z$ für $j \in [1,\ell]$ in $\mathcal{A}$. Zeige, daß $(\sum_{i\in[1,k]} f_i)(\sum_{j\in[1,\ell]} g_j) = \sum_{i\in[1,k]} \sum_{j\in[1,\ell]} f_i g_j$.

(5) Seien $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Zeige, daß $\big({}_{\mathcal{A}}(X,Y), +\big)$ eine abelsche Gruppe ist, mit neutralem Element $0 = 0_{X,Y}$.

(6) Seien $m, n \geqslant 0$. Seien $X_i \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ für $i \in [1,m]$ und $Y_j \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ für $j \in [1,n]$. Seien $\bigoplus_{i\in[1,m]} X_i \underset{(f'_{i,j})_{i,j}}{\overset{(f_{i,j})_{i,j}}{\rightrightarrows}} \bigoplus_{j\in[1,n]} Y_j$ in $\mathcal{A}$. Zeige, daß $(f_{i,j})_{i,j} + (f'_{i,j})_{i,j} = (f_{i,j} + f'_{i,j})_{i,j}$.

(7) Seien $X, Y, Z \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Gib einen Isomorphismus von $(X \oplus Y) \oplus Z$ nach $X \oplus Y \oplus Z$ in Matrixform an.

Aufgabe 33 (6 Punkte) Zeige oder widerlege.

Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie. Sei $X \oplus Y \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)} X' \oplus Y'$ aus $\mathcal{A}$.

(1) Falls $b = 0$, dann ist $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ genau dann ein Isomorphismus, wenn a und d Isomorphismen sind.

(2) Es ist $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ genau dann ein Isomorphismus, wenn a und d Isomorphismen sind.

(3) Falls $X = X'$ und jede Retraktion von X nach X ein Automorphismus ist, dann ist $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ genau dann ein Isomorphismus, wenn a und d Isomorphismen sind.

Aufgabe 34 (3 Punkte)

Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie. Seien $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Zeige, daß in einem geeigneten Sinn $\operatorname{End}_{\mathcal{A}}(X)$ ein Ring und $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)$ ein $\operatorname{End}_{\mathcal{A}}(X)$-$\operatorname{End}_{\mathcal{A}}(Y)$-Bimodul ist.