M. Künzer Abgabe Montag, 14.12.09

Homologische Algebra, WS 09/10

Blatt 7

Aufgabe 27 (16 Punkte) Zeige oder widerlege.

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Seien $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ Morphismen in $\mathcal{C}$. Sei $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ ein Funktor.

(1) Ist fg ein Monomorphismus, so auch f.

(2) Ist f eine Retraktion, so ist f epimorph.

(3) Ist f monomorph und epimorph, so ist f ein Isomorphismus.

(4) Ist f eine Coretraktion und epimorph, so ist f ein Isomorphismus.

(5) Ist f epimorph, so ist f eine Retraktion.

(6) Ist f ein Endomorphismus und eine Retraktion, so ist f ein Automorphismus.

(7) Ist f ein Monomorphismus, so auch Ff.

(8) Ist f eine Coretraktion, so auch Ff.

Aufgabe 28 (4 Punkte)

Dualisiere die Aussagen aus Aufgabe 27 (egal ob zutreffend oder nicht).

Aufgabe 29 (6 Punkte)

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Schreibe $\hat{\mathcal{C}} := [\![\mathcal{C}^\circ, (\mathrm{Sets})]\!]$. Sei $F \in \operatorname{Ob}\hat{\mathcal{C}}$. Sei $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

(1) Gib eine Bijektion zwischen ${}_{\hat{\mathcal{C}}}\big({}_{\mathcal{C}}(-,X), F\big)$ und FX an.

(2) Zeige, daß $\mathcal{C} \longrightarrow \hat{\mathcal{C}}$, $X \longmapsto {}_{\mathcal{C}}(-,X)$, mit der naheliegenden Definition auf den Morphismen, ein voller und treuer Funktor ist.

Aufgabe 30 (3+3+2 Punkte)

(1) Sei $M = (M, \leqslant)$ eine teilgeordnete Menge. Zeige, daß es eine Kategorie M^{k} gibt mit $\operatorname{Ob} M^{\mathrm{k}} = M$ und $|{}_{M^{\mathrm{k}}}(a,b)| = 1$, falls $a \leqslant b$, und $|{}_{M^{\mathrm{k}}}(a,b)| = 0$ sonst, wobei $a,\ b \in M$.

(2) Sei $\mathcal{M}$ eine Kategorie, in welcher $|{}_{\mathcal{M}}(a,b)| \in \{0,1\}$ für alle $a,\ b \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}$ und in welcher alle Isoklassen einelementig sind. Zeige, daß $\mathcal{M}$ derart eine teilgeordnete Menge $\mathcal{M}^{\mathrm{t}}$ zugeordnet werden kann, daß $\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}^{\mathrm{tk}}$. Zeige, daß $M = M^{\mathrm{kt}}$ für eine teilgeordnete Menge M.

(3) Seien $M = (M, \leqslant)$ und $N = (N, \leqslant)$ teilgeordnete Mengen. Gib eine Bijektion von der Menge der monotonen Abbildungen von M nach N in die Menge der Funktoren von M^{k} nach N^{k} an.