M. Künzer

Abgabe Montag, 07.12.09

Homologische Algebra, WS 09/10

Blatt 6

Aufgabe 23 (3+3+4+2+3 Punkte) Sei R ein Ring. Zeige.

(1) Sei A eine Menge. Sei für jedes $\alpha \in A$ ein projektiver R-Linksmodul P_α gegeben. Dann ist $\coprod_{\alpha \in A} P_\alpha$ projektiv.

(2) Sind X und Y zwei R-Linksmoduln so, daß $X \oplus Y$ projektiv ist, dann sind auch X und Y projektiv.

(3) Ein R-Linksmodul P ist genau dann projektiv, wenn es eine Menge A und einen R-Linksmodul Q so gibt, daß $P \oplus Q \simeq \coprod_{\alpha \in A} R$. Insbesondere ist also $R^{\oplus n}$ projektiv für $n \geqslant 0$.

(4) Für jeden R-Linksmodul M gibt es eine surjektive R-lineare Abbildung $P \longrightarrow M$ von einem projektiven R-Linksmodul P.

(5) Sei P ein projektiver R-Linksmodul. Sei $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X''$ eine kurz exakte Sequenz von R-Rechtsmoduln. Zeige, daß die Sequenz $X' \underset{R}{\otimes} P \xrightarrow{i \otimes P} X \underset{R}{\otimes} P \xrightarrow{p \otimes P} X'' \underset{R}{\otimes} P$ von $\mathbf{Z}$-Moduln kurz exakt ist.

Aufgabe 24 (6 Punkte) Sei R ein Ring. Zeige.

(1) Sei A eine Menge. Sei für jedes $\alpha \in A$ ein injektiver R-Linksmodul I_α gegeben. Dann ist $\prod_{\alpha \in A} I_\alpha$ injektiv.

(2) Sind X und Y zwei R-Linksmoduln so, daß $X \oplus Y$ injektiv ist, dann sind auch X und Y injektiv.

Aufgabe 25 (3 Punkte)
Welche der folgenden $\begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$-Linksmoduln sind projektiv? $\begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 26 (8 Punkte) Zeige oder widerlege.

(1) In (Sets) ist ein Morphismus genau dann monomorph, wenn er injektiv ist.

(2) In (Rings) ist ein Morphismus genau dann epimorph, wenn er surjektiv ist.

(3) In (Sets) ist jeder Epimorphismus eine Retraktion.

(4) Sei R ein Ring. In R-Mod ist jeder Monomorphismus eine Coretraktion.