Homologische Algebra, WS 09/10

Blatt 12

Aufgabe 46 (5 Punkte)

Sei

$$\begin{array}{ccc} (X', X, X'') & \xrightarrow{(f', f, f'')} & (Y', Y, Y'') \\ {\scriptstyle (x', x, x'')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (y', y, y'')} \\ (\tilde{X}', \tilde{X}, \tilde{X}'') & \xrightarrow[(\tilde{f}', \tilde{f}, \tilde{f}'')]{} & (\tilde{Y}', \tilde{Y}, \tilde{Y}'') \end{array}$$

ein kommutatives Viereck von Sequenzen. Sei (X', X, X'') rechts- und (Y', Y, Y'') linksexakt. Sei $(\tilde{X}', \tilde{X}, \tilde{X}'')$ rechts- und $(\tilde{Y}', \tilde{Y}, \tilde{Y}'')$ linksexakt. Verwende bzgl. (f', f, f'') alle Bezeichungen aus Lemma 135 und dessen Beweis; bzgl. $(\tilde{f}', \tilde{f}, \tilde{f}'')$ entsprechend. Bemerkung 123.(2) gibt uns Morphismen k' mit $k'\tilde{i}' = i'x'$, k mit $k\tilde{i} = ix$, k'' mit $k''\tilde{i}'' = i''x''$, c' mit $r'c' = y'\tilde{r}'$, c mit $rc = y\tilde{r}$, c'' mit $r''c'' = y''\tilde{r}''$. Zeige die Kommutativität von

$$\begin{array}{ccccccccccc} K' & \xrightarrow{\alpha} & K & \xrightarrow{\beta} & K'' & \xrightarrow{\gamma} & C' & \xrightarrow{\delta} & C & \xrightarrow{\varepsilon} & C'' \\ {\scriptstyle k'}\downarrow & & {\scriptstyle k}\downarrow & & {\scriptstyle k''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c'} & & \downarrow{\scriptstyle c} & & \downarrow{\scriptstyle c''} \\ \tilde{K}' & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \tilde{K} & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & \tilde{K}'' & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} & \tilde{C}' & \xrightarrow{\tilde{\delta}} & \tilde{C} & \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}} & \tilde{C}'' \end{array}$$

Folgere, daß γ bei fester Wahl von i'' und r' nicht von den während der Konstruktion getroffenen sonstigen Wahlen abhängt.

Aufgabe 47 (4 Punkte)

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Sei $k \in \mathbf{Z}$. Zeige, daß $\mathrm{H}^k : \mathrm{C}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ ein additiver Funktor ist.

Aufgabe 48 (6 Punkte) Zeige oder widerlege.

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.

(1) Sei $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$ eine kurz exakte Sequenz in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Sind zwei der Komplexe X', X, X'' azyklisch, so auch der dritte.

(2) Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Sind X und Y azyklisch, so auch I_f.

Aufgabe 49 (4+3+3 Punkte)

(1) Zu $\mathbf{Z}/4 \xrightarrow{4} \mathbf{Z}/8$ ist in $\mathbf{Z}/64$-mod eine projektive und eine injektive Auflösung anzugeben.

(2) Zu $\left(\begin{pmatrix}\mathbf{Q}\\\mathbf{Q}\\0\end{pmatrix} / \begin{pmatrix}\mathbf{Q}\\0\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix}\mathbf{Q}\\\mathbf{Q}\\\mathbf{Q}\end{pmatrix} / \begin{pmatrix}\mathbf{Q}\\0\\0\end{pmatrix},\ x + \begin{pmatrix}\mathbf{Q}\\0\\0\end{pmatrix} \longmapsto x + \begin{pmatrix}\mathbf{Q}\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ ist in $\begin{pmatrix}\mathbf{Q}&\mathbf{Q}&\mathbf{Q}\\0&\mathbf{Q}&\mathbf{Q}\\0&0&\mathbf{Q}\end{pmatrix}$-Mod eine projektive Auflösung anzugeben.

(3) Zu $\mathbf{Z}/2 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/4 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2$ ist in $\mathbf{Z}/8$-mod eine injektive Hufeisenauflösung anzugeben.