M. Künzer

Abgabe Montag, 02.11.09

Homologische Algebra, WS 09/10

Blatt 1

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Sei R ein Ring. Seien $r,\, s \in R$. Zeige, daß $(-r)\cdot s = -(r\cdot s) = r\cdot(-s)$.

Aufgabe 2 (4+2 Punkte)

Sei R ein Ring. Sei $n \geqslant 1$. Zeige.

(1) Es bildet die Menge $R^{n\times n}$ der $n\times n$-Matrizen mit Einträgen in R, der Matrixaddition $(+)$ und der Matrixmultiplikation $(\cdot)$ einen Ring.

(2) Es ist $R^{n\times n}$ nicht kommutativ, falls $n \geqslant 2$ und $0 \neq 1$ in R.

Aufgabe 3 (2+4 Punkte)

Sei R ein Ring. Sei $I \subseteq R$ ein Ideal. Für $r \in R$ schreiben wir $r + I = \{r + x \;:\; x \in I\}$. Zeige.

(1) Es ist $r + I = r' + I$ genau dann, wenn $r - r' \in I$, wobei $r,\, r' \in R$.

(2) Es wird $R/I := \{r + I \;:\; r \in R\}$ mittels $(r + I) + (r' + I) := (r + r') + I$ und $(r + I)\cdot(r' + I) := (r\cdot r') + I$ ein Ring. (Hinweis: Wohldefiniertheit!)

Aufgabe 4 (4+4+? Punkte)

(1) Zeige, daß jedes Ideal in $\mathbf{Z}$ von der Form $n\mathbf{Z}$ ist für ein eindeutig bestimmtes $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$.

(2) Zeige, daß $\mathbf{Z}/n$ für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ genau dann ein Körper ist, wenn n prim ist.

(3) Ein Element r in einem kommutativen Ring heiße *invertierbar,* falls es ein s in diesem Ring gibt mit $rs = 1$.

Finde verschiedene Werte für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ so, daß $\mathbf{Z}/n$ genau 8 invertierbare Elemente enthält. (Pro Wert ein Punkt.)

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Zeige oder widerlege.

(1) Ist R ein Ring, so folgt für $x \in R$ aus $x^2 = 1$, daß $x \in \{-1, +1\}$.

(2) Sei $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Sei $x \in \mathbf{Z}/n$ invertierbar. Es ist die *Ordnung* $\min\{i \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \;:\; x^i = 1\}$ von x ein Teiler von $n(n-1)$.