

Wieso Wavelet Shrinkage?

Motivation und Anwendung

Dirk A. Lorenz

`dlorenz@math.uni-bremen.de`

Zentrum für Technomathematik, Uni Bremen

Oberseminar Rhein-Ruhr

11. November 2005





Übersicht

- 1 Einleitung: Entrauschen. Wieso Shrinkage?
 - Wie Shrinkage funktioniert
 - Deshalb Shrinkage!
- 2 Zwei Verallgemeinerungen
 - Shrinkage als Projektion
 - Soft- und Hard-Shrinkage und dazwischen
- 3 Anwendung auf Inverse Probleme

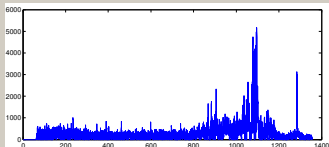


Übersicht

- 1 Einleitung: Entrauschen. Wieso Shrinkage?
 - Wie Shrinkage funktioniert
 - Deshalb Shrinkage!
- 2 Zwei Verallgemeinerungen
 - Shrinkage als Projektion
 - Soft- und Hard-Shrinkage und dazwischen
- 3 Anwendung auf Inverse Probleme

Das Problem des Entrauschens

Daten sind verrauscht



(Daten eines Massenspektrogramms zur Analyse der Zusammensetzung von Blut)



Ziel

Entferne das Rauschen, aber behalte die Struktur bei.



Möglichkeiten der Mathematik

- Faltung
- Partielle
Differentialgleichungen
- Statistik
- Differentialgeometrie
- Harmonische Analysis

Möglichkeiten der Mathematik

- Faltung
- Partielle
Differentialgleichungen
- Statistik
- Differentialgeometrie
- Harmonische Analysis

Faltung

$$\bar{u}(x) = \int K(x - y)u(y)dx$$

Möglichkeiten der Mathematik

- Faltung
- Partielle
Differentialgleichungen
- Statistik
- Differentialgeometrie
- Harmonische Analysis

Faltung

$$\bar{u}(x) = \int K(x - y)u(y)dx$$



Möglichkeiten der Mathematik

- Faltung
- Partielle Differentialgleichungen
- Statistik
- Differentialgeometrie
- Harmonische Analysis

Faltung

$$\bar{u}(x) = \int K(x - y)u(y)dx$$



Möglichkeiten der Mathematik

- Faltung
- Partielle
Differentialgleichungen
- Statistik
- Differentialgeometrie
- **Harmonische Analysis**

Faltung

$$\bar{u}(x) = \int K(x - y)u(y)dx$$





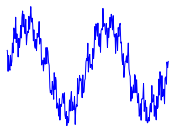
Falten = Filtern im Fourier-Raum

$$\widehat{f * k} = \hat{f} \hat{k}$$

Falten = Filtern im Fourier-Raum

$$\widehat{f * k} = \hat{f} \hat{k}$$

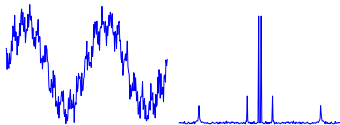
- Fourier Transformation des Signals



Falten = Filtern im Fourier-Raum

$$\widehat{f * k} = \hat{f} \hat{k}$$

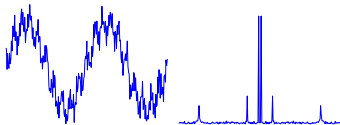
- Fourier Transformation des Signals



Falten = Filtern im Fourier-Raum

$$\widehat{f * k} = \hat{f} \hat{k}$$

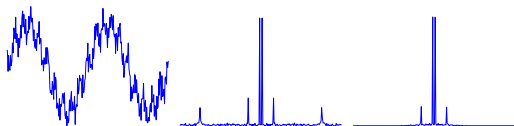
- Fourier Transformation des Signals
- Multipliziere mit \hat{k} .



Falten = Filtern im Fourier-Raum

$$\widehat{f * k} = \hat{f} \hat{k}$$

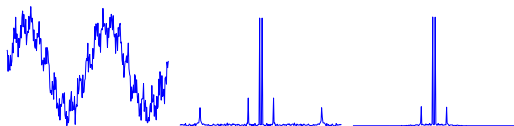
- Fourier Transformation des Signals
- Multipliziere mit \hat{k} .



Falten = Filtern im Fourier-Raum

$$\widehat{f * k} = \hat{f} \hat{k}$$

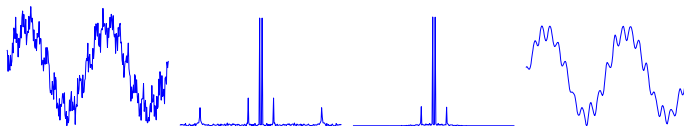
- Fourier Transformation des Signals
- Multipliziere mit \hat{k} .
- Transformiere zurück.



Falten = Filtern im Fourier-Raum

$$\widehat{f * k} = \hat{f} \hat{k}$$

- Fourier Transformation des Signals
- Multipliziere mit \hat{k} .
- Transformiere zurück.



Übersicht

- 1 Einleitung: Entrauschen. Wieso Shrinkage?
 - Wie Shrinkage funktioniert
 - Deshalb Shrinkage!
- 2 Zwei Verallgemeinerungen
 - Shrinkage als Projektion
 - Soft- und Hard-Shrinkage und dazwischen
- 3 Anwendung auf Inverse Probleme



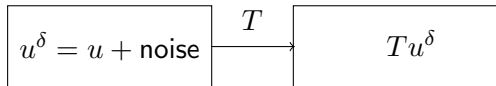
Shrinkage: Drei Schritte zum Entrauschen

- Transformiere Bild in “dünne Darstellung”.

$$u^\delta = u + \text{noise}$$

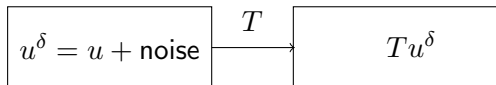
Shrinkage: Drei Schritte zum Entrauschen

- Transformiere Bild in “dünne Darstellung”.



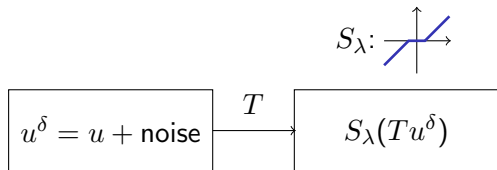
Shrinkage: Drei Schritte zum Entrauschen

- Transformiere Bild in “dünne Darstellung”.
- Wende nichtlineare Shrinkage Funktion an.



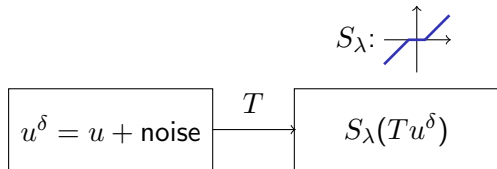
Shrinkage: Drei Schritte zum Entrauschen

- Transformiere Bild in “dünne Darstellung”.
- Wende nichtlineare Shrinkage Funktion an.



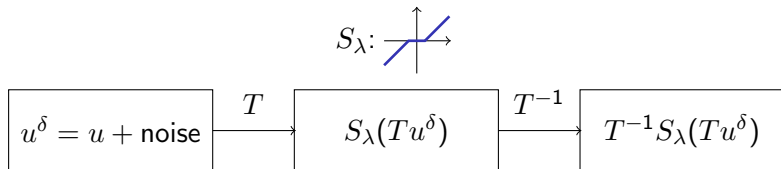
Shrinkage: Drei Schritte zum Entrauschen

- Transformiere Bild in “dünne Darstellung”.
- Wende nichtlineare Shrinkage Funktion an.
- Transformiere zurück.



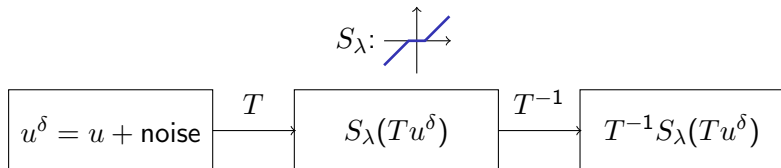
Shrinkage: Drei Schritte zum Entrauschen

- Transformiere Bild in “dünne Darstellung”.
- Wende nichtlineare Shrinkage Funktion an.
- Transformiere zurück.



Shrinkage: Drei Schritte zum Entrauschen

- Transformiere Bild in “dünne Darstellung”.
- Wende nichtlineare Shrinkage Funktion an.
- Transformiere zurück.

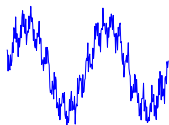


Weaver et. al 1991, Donoho et. al 1992



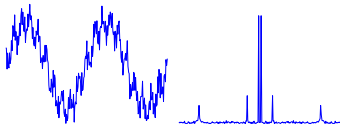
Fourier Shrinkage

- Fourier Transformation des Signals



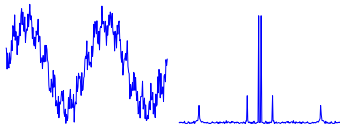
Fourier Shrinkage

- Fourier Transformation des Signals



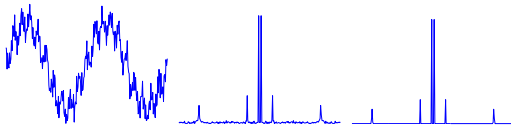
Fourier Shrinkage

- Fourier Transformation des Signals
- Wende nichtlineare Shrinkage Funktion an.



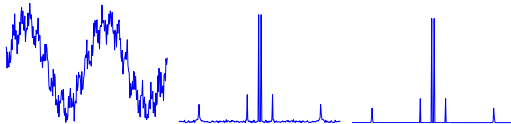
Fourier Shrinkage

- Fourier Transformation des Signals
- Wende nichtlineare Shrinkage Funktion an.



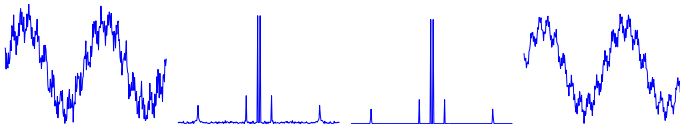
Fourier Shrinkage

- Fourier Transformation des Signals
- Wende nichtlineare Shrinkage Funktion an.
- Transformiere zurück.

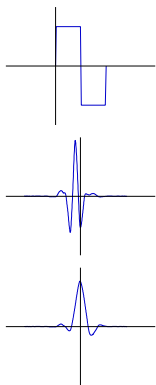


Fourier Shrinkage

- Fourier Transformation des Signals
- Wende nichtlineare Shrinkage Funktion an.
- Transformiere zurück.



Die Waveletzerlegung im Schnelldurchlauf



- Wavelet-Basen von L^2 sind spezielle orthogonale Basen.
- Ein Mutter-Wavelet ψ und die Translate und Dilationen

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$$

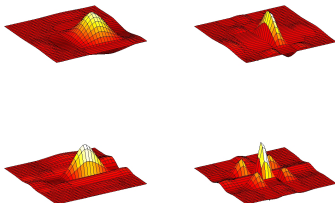
liefert orthogonale Entwicklung

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \underbrace{\langle f | \psi_{j,k} \rangle}_{=: f_{j,k}} \psi_{j,k}.$$

- Zugehörige Skalierungsfunktion ϕ :

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f | \phi_k \rangle \phi_k + \sum_{k \in \mathbb{Z}, j \geq 0} f_{j,k} \psi_{j,k}$$

Tensorprodukte für höhere Dimensionen, Periodisierung für Kuben



Abkürzende Schreibweise:

$$f = \langle f|1 \rangle + \sum_{\gamma \in \Gamma} f_{\gamma} \psi_{\gamma}$$

- In 2d benutze

Tensor-Produkte:

$$\phi(x, y) = \phi(x)\phi(y)$$

$$\psi_h(x, y) = \psi(x)\phi(y)$$

$$\psi_v(x, y) = \phi(x)\psi(y)$$

$$\psi_d(x, y) = \psi(x)\psi(y).$$

- Wavelets auf $[0, 1]^2$
über Periodisierung

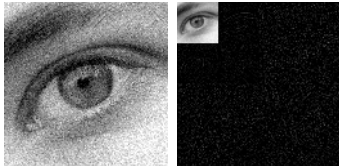
Wavelet Shrinkage

- Wavelet Transformation des Bildes



Wavelet Shrinkage

- Wavelet Transformation des Bildes



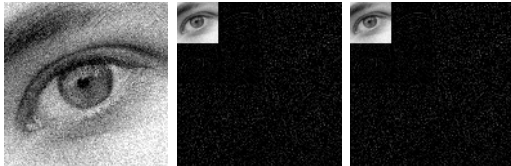
Wavelet Shrinkage

- Wavelet Transformation des Bildes
- Wende nichtlineare Shrinkage Funktion an.



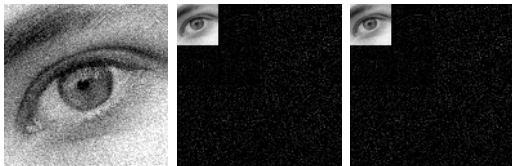
Wavelet Shrinkage

- Wavelet Transformation des Bildes
- Wende nichtlineare Shrinkage Funktion an.



Wavelet Shrinkage

- Wavelet Transformation des Bildes
- Wende nichtlineare Shrinkage Funktion an.
- Transformiere zurück.



Wavelet Shrinkage

- Wavelet Transformation des Bildes
- Wende nichtlineare Shrinkage Funktion an.
- Transformiere zurück.



Wavelet Shrinkage

- Wavelet Transformation des Bildes
- Wende nichtlineare Shrinkage Funktion an.
- Transformiere zurück.



In Formeln:

$$u^\delta = \sum_{\gamma} \langle u^\delta | \psi_\gamma \rangle \psi_\gamma \quad \{\psi_\gamma\} \text{ Wavelet Basis, } \gamma = (i, j, k).$$

Wavelet Shrinkage

- Wavelet Transformation des Bildes
- Wende nichtlineare Shrinkage Funktion an.
- Transformiere zurück.



In Formeln:

$$\bar{u} = \sum_{\gamma} S_{\lambda}(\langle u^{\delta} | \psi_{\gamma} \rangle) \psi_{\gamma} \quad \{ \psi_{\gamma} \} \text{ Wavelet Basis, } \gamma = (i, j, k).$$



Übersicht

- 1 Einleitung: Entrauschen. Wieso Shrinkage?
 - Wie Shrinkage funktioniert
 - Deshalb Shrinkage!
- 2 Zwei Verallgemeinerungen
 - Shrinkage als Projektion
 - Soft- und Hard-Shrinkage und dazwischen
- 3 Anwendung auf Inverse Probleme



Entrauschen als Variationsproblem: H^s und BV Strafterme

$$\bar{u} = \operatorname{argmin} \underbrace{\|u - u^\delta\|^2}_{\text{Distanz}} + 2\lambda \underbrace{\Phi(u)}_{\text{Rausch-Ma\ss}}$$



Entrauschen als Variationsproblem: H^s und BV Strafterme

$$\bar{u} = \operatorname{argmin} \underbrace{\|u - u^\delta\|^2}_{\text{Distanz}} + 2\lambda \underbrace{\Phi(u)}_{\text{Rausch-Maß}}$$

$\Phi(u) = |u|_{H^s}^2 \rightarrow$ lineare Methode

$$\hat{u} = \frac{\hat{u}^\delta}{(1 + \lambda|\omega|)^{2s}}$$

Aber: $u = \chi_A \notin H^s \quad s \geq 1 \implies$ Kanten werden nicht erhalten.

Entrauschen als Variationsproblem: H^s und BV Strafterme

$$\bar{u} = \operatorname{argmin} \underbrace{\|u - u^\delta\|^2}_{\text{Distanz}} + 2\lambda \underbrace{\Phi(u)}_{\text{Rausch-Maß}}$$

$$\Phi(u) = |u|_{BV}$$

$$|u|_{BV} = \sup \left\{ \int u \operatorname{div} g : g \in C_0^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2), |g| \leq 1 \right\}$$

$$|\chi_A|_{BV} = l(\partial A) \text{ Kanten werden erhalten.}$$

Rudin, Osher, Fatemi, 1992

Entrauschen als Variationsproblem: H^s und BV Strafterme

$$\bar{u} = \operatorname{argmin} \underbrace{\|u - u^\delta\|^2}_{\text{Distanz}} + 2\lambda \underbrace{\Phi(u)}_{\text{Rausch-Maß}}$$

$$\Phi(u) = |u|_{BV}$$

$$|u|_{BV} = \sup \left\{ \int u \operatorname{div} g : g \in C_0^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2), |g| \leq 1 \right\}$$

$$|\chi_A|_{BV} = l(\partial A) \text{ Kanten werden erhalten.}$$

Rudin, Osher, Fatemi, 1992

Aber: Minimierung schwierig und sehr aufwändig.

Einfaches Rechnen: Besov-Räume statt BV

$$\bar{u} = \operatorname{argmin} \|u - u^\delta\|^2 + 2\lambda|u|_{B_{1,1}^1}$$

Es gilt:

$$B_{1,1}^1 \subset BV \subset B_{1,\infty}^1$$

Exkurse:

[Besov-Räume](#)

[Normäquivalenzen](#)

[Weiter](#)

Einfaches Rechnen: Besov-Räume statt BV

$$\bar{u} = \operatorname{argmin} \|u - u^\delta\|^2 + 2\lambda|u|_{B_{1,1}^1}$$

Es gilt:

$$B_{1,1}^1 \subset BV \subset B_{1,\infty}^1$$

Exkurse: [Besov-Räume](#) [Normäquivalenzen](#) [Weiter](#)

Besov-Räume verallgemeinern Sobolev-Räume.

Definition: Über Stetigkeitsmodule...

$$C^s \asymp B_{\infty,\infty}^s \quad (s > 0), \quad H^s \asymp B_{2,2}^s \quad (s \in \mathbb{R})$$
$$W^{s,p} \asymp B_{p,p}^s \quad (s \notin \mathbb{N}, 1 < p < \infty)$$

Einfaches Rechnen: Besov-Räume statt BV

$$\bar{u} = \operatorname{argmin} \|u - u^\delta\|^2 + 2\lambda|u|_{B_{1,1}^1}$$

Es gilt:

$$B_{1,1}^1 \subset BV \subset B_{1,\infty}^1$$

Exkurse: [Besov-Räume](#) [Normäquivalenzen](#) [Weiter](#)

Charakterisierung über Wavelet-Entwicklung

$\{\psi_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ Wavelet Basis, $\gamma = (i, j, k)$, $f_\gamma = \langle \psi_\gamma | f \rangle$:

$$|f|_{B_{p,q}^s}^q \asymp \sum_j \left(2^{sjp} 2^{j(p-2)} \sum_k |f_\gamma|^p \right)^{q/p}$$



Ein eindimensionales Problem für Waveletkoeffizienten

$$\operatorname{argmin} \|u - u^\delta\|^2 + 2\lambda|u|_{B_{1,1}^1}$$





Ein eindimensionales Problem für Waveletkoeffizienten

$$|f|_{B_{1,1}^1} \asymp \sum_{\gamma} |f_{\gamma}|$$

$$\operatorname{argmin} \|u - u^{\delta}\|^2 + 2\lambda |u|_{B_{1,1}^1}$$

Ein eindimensionales Problem für Waveletkoeffizienten

$$|f|_{B_{1,1}^1} \asymp \sum_{\gamma} |f_{\gamma}|$$

$$\operatorname{argmin} \|u - u^{\delta}\|^2 + 2\lambda |u|_{B_{1,1}^1}$$

$$\rightsquigarrow \operatorname{argmin}_{\gamma} \sum_{\gamma} (u_{\gamma} - u_{\gamma}^{\delta})^2 + 2\lambda |u_{\gamma}|$$

Ein eindimensionales Problem für Waveletkoeffizienten

$$|f|_{B_{1,1}^1} \asymp \sum_{\gamma} |f_{\gamma}|$$

$$\operatorname{argmin} \|u - u^{\delta}\|^2 + 2\lambda|u|_{B_{1,1}^1}$$

$$\rightsquigarrow \operatorname{argmin} \sum_{\gamma} (u_{\gamma} - u_{\gamma}^{\delta})^2 + 2\lambda|u_{\gamma}|$$

$$\rightsquigarrow \operatorname{argmin} (u_{\gamma} - u_{\gamma}^{\delta})^2 + 2\lambda|u_{\gamma}|$$

Ein eindimensionales Problem für Waveletkoeffizienten

$$|f|_{B_{1,1}^1} \asymp \sum_{\gamma} |f_{\gamma}|$$

$$\operatorname{argmin} \|u - u^{\delta}\|^2 + 2\lambda|u|_{B_{1,1}^1}$$

$$\rightsquigarrow \operatorname{argmin} \sum_{\gamma} (u_{\gamma} - u_{\gamma}^{\delta})^2 + 2\lambda|u_{\gamma}|$$

$$\rightsquigarrow \operatorname{argmin} (u_{\gamma} - u_{\gamma}^{\delta})^2 + 2\lambda|u_{\gamma}|$$

Zu gegebenem y finde Minimierer von $x \mapsto (x - y)^2 + 2\lambda|x|$.



Einfache Minimierung mit Subgradienten

Finde den Minimierer von $x \mapsto (x - y)^2 + 2\lambda|x|$.



Einfache Minimierung mit Subgradienten

Finde den Minimierer von $x \mapsto (x - y)^2 + 2\lambda\phi(x)$.

Einfache Minimierung mit Subgradienten

Finde den Minimierer von $x \mapsto (x - y)^2 + 2\lambda\phi(x)$.

ϕ konvex und differenzierbar:

$$\bar{x} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} (x - y)^2 + 2\lambda\phi(x)$$

$$0 = (\bar{x} - y) + \lambda\partial\phi(\bar{x})$$

$$y = \bar{x} + \lambda\partial\phi(\bar{x})$$

$$\bar{x} = (I + \lambda\partial\phi)^{-1}(y)$$

Exkurs: [Subgradienten](#)

Einfache Minimierung mit Subgradienten

Finde den Minimierer von $x \mapsto (x - y)^2 + 2\lambda\phi(x)$.

ϕ konvex und differenzierbar:

$$\bar{x} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} (x - y)^2 + 2\lambda\phi(x)$$

$$0 = (\bar{x} - y) + \lambda\partial\phi(\bar{x})$$

$$y = \bar{x} + \lambda\partial\phi(\bar{x})$$

$$\bar{x} = (I + \lambda\partial\phi)^{-1}(y)$$

$$\phi(x) = x^2:$$



Exkurs: [Subgradienten](#)

Einfache Minimierung mit Subgradienten

Finde den Minimierer von $x \mapsto (x - y)^2 + 2\lambda\phi(x)$.

ϕ nur konvex:

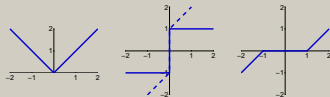
$$\bar{x} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} (x - y)^2 + 2\lambda\phi(x)$$

$$0 \in (\bar{x} - y) + \lambda\partial\phi(\bar{x})$$

$$y \in \bar{x} + \lambda\partial\phi(\bar{x})$$

$$\bar{x} = (I + \lambda\partial\phi)^{-1}(y)$$

$$\phi(x) = |x|:$$



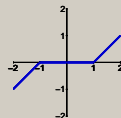
Exkurs: [Subgradienten](#)

Deshalb Wavelet Shrinkage!

Lemma

Die Abbildung $S_\lambda : y \mapsto \operatorname{argmin}_x (x - y)^2 + 2\lambda|x|$ hat die Form

$$S_\lambda(y) = (|y| - \lambda)_+ \operatorname{sign}(y).$$



Satz (Chambolle, DeVore, Lee, Lucier, 1998)

Der Minimierer von

$$\|u - u^\delta\|^2 + 2\lambda|u|_{B_{1,1}^1}$$

ist

$$\bar{u} = \sum_\gamma S_\lambda(u_\gamma^\delta) \psi_\gamma.$$

Zusammenfassung

- Entrauschen von Bilddaten

$$\bar{u} = \operatorname{argmin}_u \|u - u^\delta\|^2 + 2\lambda|u|_{BV}$$

- Annährende Lösung durch $BV \rightsquigarrow B_{1,1}^1$:

$$\bar{u} = \sum_{\gamma} S_{\lambda}(u_{\gamma}^{\delta})\psi_{\gamma}$$



Übersicht

- 1 Einleitung: Entrauschen. Wieso Shrinkage?
 - Wie Shrinkage funktioniert
 - Deshalb Shrinkage!
- 2 Zwei Verallgemeinerungen
 - Shrinkage als Projektion
 - Soft- und Hard-Shrinkage und dazwischen
- 3 Anwendung auf Inverse Probleme



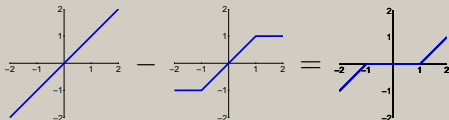
Übersicht

- 1 Einleitung: Entrauschen. Wieso Shrinkage?
 - Wie Shrinkage funktioniert
 - Deshalb Shrinkage!
- 2 Zwei Verallgemeinerungen
 - Shrinkage als Projektion
 - Soft- und Hard-Shrinkage und dazwischen
- 3 Anwendung auf Inverse Probleme

Abstrakt: Shrinkage = 1 – Projektion

Beobachtung

$$S_\lambda = I - \Pi_{[-\lambda, \lambda]}$$

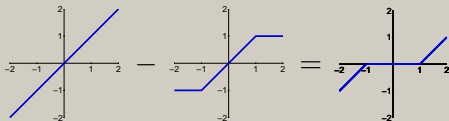


Insgesamt: “ $\bar{u} = (I - \Pi_{D_\lambda^\infty(0)})(u^\delta)$ ”.

Abstrakt: Shrinkage = 1 – Projektion

Beobachtung

$$S_\lambda = I - \Pi_{[-\lambda, \lambda]}$$



Insgesamt: “ $\bar{u} = (I - \Pi_{D_\lambda^\infty(0)})(u^\delta)$ ”.

Betrachte nun

$$\|u - u^\delta\|^2 + 2\lambda\Phi(u)$$

mit positiv homogenem Φ

$$\alpha > 0 \implies \Phi(\alpha u) = \alpha\Phi(u).$$

Abstrakt: Shrinkage = 1 – Projektion

Satz

Der Minimierer von

$$\|u - u^\delta\|^2 + 2\lambda\Phi(u)$$

ist

$$\bar{u} = (I - \Pi_{\lambda C})(u^\delta)$$

wobei

$$C = \{v : \langle v|w \rangle \leq \Phi(w) \text{ für alle } w\}.$$

Abstrakt: Shrinkage = 1 – Projektion

Satz

Der Minimierer von

$$\|u - u^\delta\|^2 + 2\lambda\Phi(u)$$

ist

$$\bar{u} = (I - \Pi_{\lambda C})(u^\delta)$$

wobei

$$C = \{v : \langle v|w \rangle \leq \Phi(w) \text{ für alle } w\}.$$

Beweis:

Bedingung für Minimierer:

$$0 \in u - u^\delta + \lambda\partial\Phi(u).$$

Abstrakt: Shrinkage = 1 – Projektion

Satz

Der Minimierer von

$$\|u - u^\delta\|^2 + 2\lambda\Phi(u)$$

ist

$$\bar{u} = (I - \Pi_{\lambda C})(u^\delta)$$

wobei

$$C = \{v : \langle v|w \rangle \leq \Phi(w) \text{ für alle } w\}.$$

Beweis:

Bedingung für Minimierer:

$$\frac{u^\delta - u}{\lambda} \in \partial\Phi(u).$$

Abstrakt: Shrinkage = 1 – Projektion

Satz

Der Minimierer von

$$\|u - u^\delta\|^2 + 2\lambda\Phi(u)$$

ist

$$\bar{u} = (I - \Pi_{\lambda C})(u^\delta)$$

wobei

$$C = \{v : \langle v|w \rangle \leq \Phi(w) \text{ für alle } w\}.$$

Beweis:

Exkurs Dualität

Bedingung für Minimierer:

$$u \in \partial\Phi^*\left(\frac{u^\delta - u}{\lambda}\right).$$

Abstrakt: Shrinkage = 1 – Projektion

Satz

Der Minimierer von

$$\|u - u^\delta\|^2 + 2\lambda\Phi(u)$$

ist

$$\bar{u} = (I - \Pi_{\lambda C})(u^\delta)$$

wobei

$$C = \{v : \langle v|w \rangle \leq \Phi(w) \text{ für alle } w\}.$$

Beweis:

Exkurs Dualität

Bedingung für Minimierer:

$$u = u^\delta - \lambda(I + \frac{1}{\lambda}\partial\Phi^*)^{-1}(\frac{u^\delta}{\lambda}).$$

Abstrakt: Shrinkage = 1 – Projektion

Beweis (cont):

Bleibt zu zeigen:

$$(I + \partial\Phi^*)^{-1} = \Pi_C.$$

Dazu:

$$\Phi^*(u) = \begin{cases} \infty, & u \notin C \\ 0, & u \in C \end{cases}.$$

Dann:

$$w = (I + \partial\Phi^*)^{-1}(v) \implies w \text{ minimiert } \|v - w\|^2 + 2\Phi^*(w).$$

Insgesamt:

$$\operatorname{argmin}_u \|u - u^\delta\|^2 + 2\lambda\Phi(u) = (I - \Pi_{\lambda C})(u^\delta).$$

Konkret: Ziehe Anteil aus Dualraum ab

Strafterme: Seminormen von Glattheitsräumen:

$$\Phi(u) = |u|_X \text{ mit } X \subset L^2.$$

Dann

$$C = \{v : |v|_{X'} \leq 1\}, \quad \Phi^*(u) = \begin{cases} \infty, & |u|_{X'} > 1 \\ 0, & |u|_{X'} \leq 1 \end{cases}.$$

Konkret: Ziehe Anteil aus Dualraum ab

Strafterme: Seminormen von Glattheitsräumen:

$$\Phi(u) = |u|_X \text{ mit } X \subset L^2.$$

Dann

$$C = \{v : |v|_{X'} \leq 1\}, \quad \Phi^*(u) = \begin{cases} \infty, & |u|_{X'} > 1 \\ 0, & |u|_{X'} \leq 1 \end{cases}.$$

Beispiel ($X = H^1$)

$$\operatorname{argmin}_u \|u - u^\delta\|^2 + 2\lambda|u|_{H^1} = (I - \Pi_{\lambda C})(u^\delta), \quad C = |u|_{H^{-1}} \leq 1$$

“ u^δ minus Anteil von u^δ in H^{-1} der Größe λ ”.

H^{-1} kleinster Sobolev-Raum der weißes Rauschen enthält.

Konkret: Ziehe Anteil aus Dualraum ab

Strafterme: Seminormen von Glattheitsräumen:

$$\Phi(u) = |u|_X \text{ mit } X \subset L^2.$$

Dann

$$C = \{v : |v|_{X'} \leq 1\}, \quad \Phi^*(u) = \begin{cases} \infty, & |u|_{X'} > 1 \\ 0, & |u|_{X'} \leq 1 \end{cases}.$$

Beispiel ($X = B_{1,1}^1$)

$$\operatorname{argmin}_u \|u - u^\delta\|^2 + 2\lambda|u|_{B_{1,1}^1} = (I - \Pi_{\lambda C})(u^\delta), \quad C = |u|_{B_{\infty,\infty}^{-1}} \leq 1$$

“ u^δ minus Anteil von u^δ in $B_{\infty,\infty}^{-1}$ der Größe λ ”.

$B_{\infty,\infty}^{-1}$ misst oszillierende Funktionen (Y. Meyer).



Übersicht

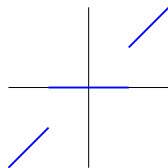
- 1 Einleitung: Entrauschen. Wieso Shrinkage?
 - Wie Shrinkage funktioniert
 - Deshalb Shrinkage!
- 2 Zwei Verallgemeinerungen
 - Shrinkage als Projektion
 - Soft- und Hard-Shrinkage und dazwischen
- 3 Anwendung auf Inverse Probleme

Alternativ zu Soft Shrikage: Hard Shrinkage

Ebenso populär wie Soft-Shrinkage:

$$\text{Hard Shrinkage: } \bar{u} = \sum_{\gamma} H_{\lambda}(\langle u^{\delta} | \psi_{\gamma} \rangle) \psi_{\gamma} \quad H_{\lambda}(x) = \begin{cases} x, & |x| > \lambda \\ 0, & |x| \leq \lambda \end{cases}$$

“Nur die großen Koeffizienten behalten.”



Hard Shrinkage als Variationsproblem

$$\operatorname{argmin}_u \|u - u^\delta\|^2 + 2\lambda \#\{u_\gamma \neq 0\}$$

wird gelöst durch

$$\bar{u} = \sum_{\gamma} H_{\sqrt{2\lambda}}(\langle u^\delta | \psi_{\gamma} \rangle) \psi_{\gamma}.$$

$$\operatorname{argmin}_u \|u - u^\delta\|^2 + 2\lambda \#\{u_\gamma \neq 0\}$$

$$\rightsquigarrow \operatorname{argmin}_u \sum_{\gamma} (u_\gamma - u_\gamma^\delta)^2 + 2\lambda |u_\gamma|^0$$

$$\rightsquigarrow \operatorname{argmin}_{u_\gamma} (u_\gamma - u_\gamma^\delta)^2 + 2\lambda |u_\gamma|^0$$



Zwischen Hard und Soft Shrinkage

Hard und Soft Shrinkage sind Extremfälle

$$\operatorname{argmin}_x (x - y)^2 + 2\lambda\phi(x), \quad \phi(x) = |x|^p.$$



Zwischen Hard und Soft Shrinkage

Hard und Soft Shrinkage sind Extremfälle

$$\operatorname{argmin}_x (x - y)^2 + 2\lambda\phi(x), \quad \phi(x) = |x|^p.$$

Zwischen Hard und Soft Shrinkage

Hard und Soft Shrinkage sind Extremfälle

$$\operatorname{argmin}_x (x - y)^2 + 2\lambda\phi(x), \quad \phi(x) = |x|^p.$$

ϕ konvex und differenzierbar :

$$\bar{x} = \operatorname{argmin}_x (x - y)^2 + 2\lambda\phi(x)$$

$$0 = (\bar{x} - y) + \lambda\partial\phi(\bar{x})$$

$$y = \bar{x} + \lambda\partial\phi(\bar{x})$$

$$\bar{x} = (I + \lambda\partial\phi)^{-1}(y)$$

Zwischen Hard und Soft Shrinkage

Hard und Soft Shrinkage sind Extremfälle

$$\operatorname{argmin}_x (x - y)^2 + 2\lambda\phi(x), \quad \phi(x) = |x|^p.$$

ϕ konvex und differenzierbar :

$$\bar{x} = \operatorname{argmin}_x (x - y)^2 + 2\lambda\phi(x)$$

$$0 = (\bar{x} - y) + \lambda\partial\phi(\bar{x})$$

$$y = \bar{x} + \lambda\partial\phi(\bar{x})$$

$$\bar{x} = (I + \lambda\partial\phi)^{-1}(y)$$

$$\phi(x) = x^2:$$



Zwischen Hard und Soft Shrinkage

Hard und Soft Shrinkage sind Extremfälle

$$\operatorname{argmin}_x (x - y)^2 + 2\lambda\phi(x), \quad \phi(x) = |x|^p.$$

ϕ nur konvex :

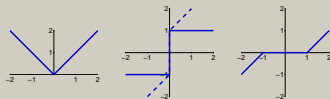
$$\bar{x} = \operatorname{argmin}_x (x - y)^2 + 2\lambda\phi(x)$$

$$0 \in (\bar{x} - y) + \lambda\partial\phi(\bar{x})$$

$$y \in \bar{x} + \lambda\partial\phi(\bar{x})$$

$$\bar{x} = (I + \lambda\partial\phi)^{-1}(y)$$

$$\phi(x) = |x|:$$



Zwischen Hard und Soft Shrinkage

Hard und Soft Shrinkage sind Extremfälle

$$\operatorname{argmin}_x (x - y)^2 + 2\lambda\phi(x), \quad \phi(x) = |x|^p.$$

ϕ weder konvex noch differenzierbar:

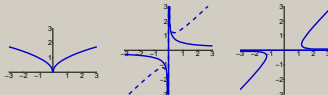
$$\bar{x} = \operatorname{argmin}_x (x - y)^2 + 2\lambda\phi(x)$$

$$0 \in (\bar{x} - y) + \lambda\partial\phi(\bar{x})$$

$$y \in \bar{x} + \lambda\partial\phi(\bar{x})$$

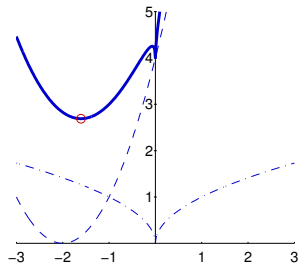
$$\bar{x} \in (I + \lambda\partial\phi)^{-1}(y)$$

$$\phi(x) = \sqrt{|x|}:$$



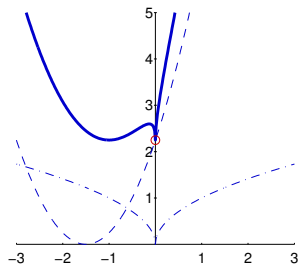
Was passiert zwischen 0 und 1?

$$(x - y)^2 + 2\lambda|x|^p$$



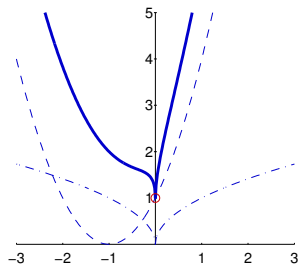
Was passiert zwischen 0 und 1?

$$(x - y)^2 + 2\lambda|x|^p$$



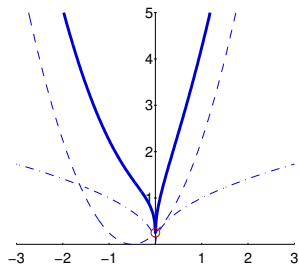
Was passiert zwischen 0 und 1?

$$(x - y)^2 + 2\lambda|x|^p$$



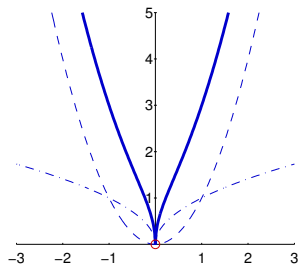
Was passiert zwischen 0 und 1?

$$(x - y)^2 + 2\lambda|x|^p$$



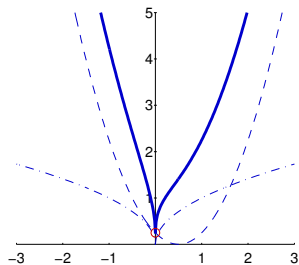
Was passiert zwischen 0 und 1?

$$(x - y)^2 + 2\lambda|x|^p$$



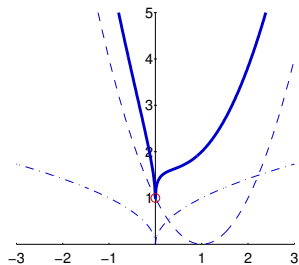
Was passiert zwischen 0 und 1?

$$(x - y)^2 + 2\lambda|x|^p$$



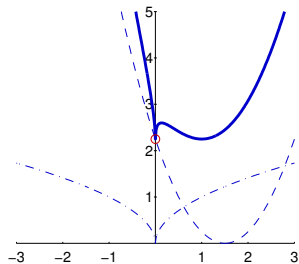
Was passiert zwischen 0 und 1?

$$(x - y)^2 + 2\lambda|x|^p$$



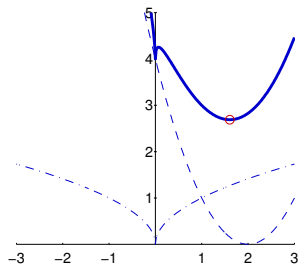
Was passiert zwischen 0 und 1?

$$(x - y)^2 + 2\lambda|x|^p$$



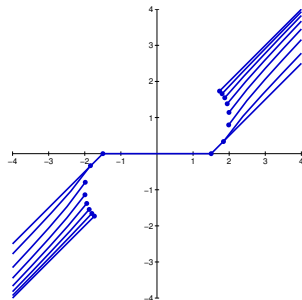
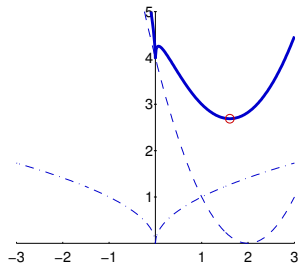
Was passiert zwischen 0 und 1?

$$(x - y)^2 + 2\lambda|x|^p$$



Was passiert zwischen 0 und 1?

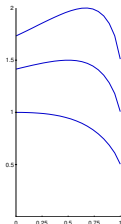
$$(x - y)^2 + 2\lambda|x|^p$$



Zwischen Hard und Soft Shrinkage

Für $0 < p < 1$ ist die Shrinkage Funktion

$$S_{\lambda}^p(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \leq \lambda_{\text{eff}} \\ \text{der Wert mit größtem Betrag} \\ \text{der inversen Abbildung von} & \\ x \mapsto x + \lambda p |x|^{p-1} \text{sign}(x) & \text{für } |x| \geq \lambda_{\text{eff}}. \end{cases}$$



Der effektive Schwellwert:

$$\lambda_{\text{eff}} = \frac{2-p}{2-2p} \left(2\lambda(1-p) \right)^{\frac{1}{2-p}}$$

Zurück zu Besov-Straftermen

$$|f|_{B_{p,p}^s}^p \asymp \sum_{\gamma} w_{\gamma} |f_{\gamma}|^p \text{ mit } w_{\gamma} = 2^{sjp} 2^{j(p-2)}$$

Satz

Der Minimierer von

$$\|u - u^{\delta}\|^2 + 2\lambda |u|_{B_{p,p}^s}^p$$

ist

$p = 1$: das Soft Shrinkage von u^{δ} mit Parameter $w_{\gamma} \lambda$

$0 < p < 1$: das Shrinkage von u^{δ} mit Shrinkage Funktion S^p
und Parameter $\lambda_{\text{eff}}(w_{\gamma})$

' $p = 0$ ': das Hard Shrinkage von u^{δ} mit Parameter $\sqrt{2\lambda}$



Zusammenfassung

- Shrinkage \leftrightarrow positiv homogene Strafterme
- Strafterm $|\cdot|_X \leftrightarrow$ ziehe Anteil aus X' ab
- Soft Shrinkage $\leftrightarrow l^1$ Strafterme
- Hard Shrinkage $\leftrightarrow l^0$ Strafterme
- $0 < p < 1$ liefert Interpolation



Übersicht

- 1 Einleitung: Entrauschen. Wieso Shrinkage?
 - Wie Shrinkage funktioniert
 - Deshalb Shrinkage!
- 2 Zwei Verallgemeinerungen
 - Shrinkage als Projektion
 - Soft- und Hard-Shrinkage und dazwischen
- 3 Anwendung auf Inverse Probleme

Deblurring statt Denoising: Ein schlechtgestelltes Problem

A : Blurring-Operator, z. B. $Au = k * u$

u^δ : Unscharfes und verrauschtes Bild

Finde gute Approximation an das Original
durch Minimierung der Diskrepanz

$$\bar{u} = \underset{u}{\operatorname{argmin}} \|Au - u^\delta\|^2 \rightsquigarrow \bar{u} = (A^*A)^{-1}A^*u^\delta.$$

Probleme:

- Geht nur für $A^*u^\delta \in R(A^*A)$.
- A^*A nicht beschränkt invertierbar.

Deblurring mit Regularisierung

Regularisiere die Inversion durch Vorwissen:

$$\|u\| \leq \beta$$

$$\bar{u} = \underset{u}{\operatorname{argmin}} \|Au - u^\delta\|^2 + 2\lambda\|u\|^2 \quad \text{“Tikhonov Regularisierung”}.$$

Dies liefert

$$\bar{u} = (A^*A + \lambda I)^{-1}A^*u^\delta \rightsquigarrow \text{stabil invertierbar.}$$

Nachteile:

- Regularisierung nicht an Problem angepasst.
- Lösung zu glatt (siehe SVD).
- Auch Strafterme $|u|_{H^s}^2$ liefern zu glatte Lösungen



Regularisierung mit Besov-Straftermen: Ein System nichtlinearer Gleichungen

$$\bar{u} = \operatorname{argmin}_u \|Au - u^\delta\|^2 + 2\lambda|u|_{B_{1,1}^1}$$

als Ausweg.

Notwendige und hinreichende Bedingung:

$$0 \in (A^*Au)_\gamma + (A^*u^\delta)_\gamma + \lambda \operatorname{sign}(u_\gamma).$$

Ein System nichtlinearer Gleichungen.

Ausweg: Entkopple die Probleme

“Surrogate-Funktional”:

$$J(u, a) = \|Au - u^\delta\|^2 + 2\lambda|u|_{B_{1,1}^1} - \|Au - Aa\|^2 + \|u - a\|^2.$$

Minimiere abwechselnd bezüglich u und a .

Satz (Daubechies, Defrise, De Mol, 2003)

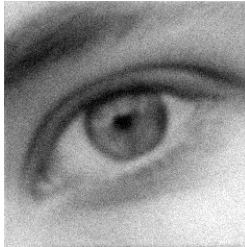
$$u_{n+1} = S_\lambda(u_n - A^*(Au - u^\delta))$$

konvergiert stark gegen einen Minimierer von

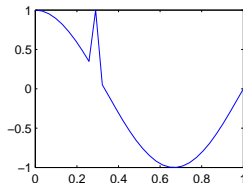
$$\|Au - u^\delta\|^2 + 2\lambda|u|_{B_{1,1}^1}$$



Illustration



Was Shrinkage noch kann: Dünne Darstellungen finden

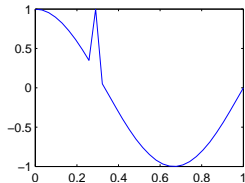


- Signal $x \in \mathbb{R}^n$.
- Weder in Pixel-Basis noch in Fourier-Basis einfach darzustellen.
- (e_k) Pixel-Basis, (f_k) Fourier-Basis.
 $D = [e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n]$

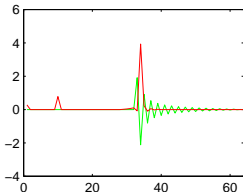
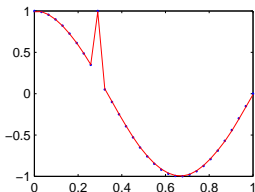
$$\min \|Dy - x\|_2^2 + 2\lambda \|y\|_2^2?$$

$$\min \|Dy - x\|_2^2 + 2\lambda \|y\|_1?$$

Was Shrinkage noch kann: Dünne Darstellungen finden



- Signal $x \in \mathbb{R}^n$.
- Weder in Pixel-Basis noch in Fourier-Basis einfach darzustellen.
- (e_k) Pixel-Basis, (f_k) Fourier-Basis.
 $D = [e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n]$

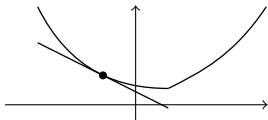


(Donoho, Elad, Teschke)

Zusammenfassung

- Wavelet Shrinkage ist äquivalent zum Lösen von Variationsproblemen mit Besov-Straftermen (ähnlich zu BV-Entrauschen).
- Die Idee von Shrinkage lässt sich als “abziehen von unerwünschten Strukturen” interpretieren ($I - \Pi_{\lambda C}$).
- Soft und Hard Shrinkage lassen sich im gleichen Kontext behandeln (l^1 und l^0 Strafterme).
- Inverse Probleme lassen sich durch Shrinkage-Methoden regularisieren.

Nicht differenzierbares differenzieren: Subgradienten

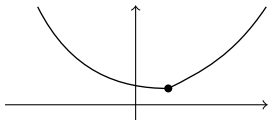


ϕ konvex:

$$x^* = \phi'(\bar{x}) \implies \phi(x) \geq \phi(\bar{x}) + x^*(x - \bar{x})$$

Zurück in den Vortrag

Nicht differenzierbares differenzieren: Subgradienten



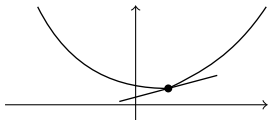
ϕ konvex:

$$x^* \in \partial\phi(\bar{x}) \iff$$

$$\forall x : \phi(x) \geq \phi(\bar{x}) + x^*(x - \bar{x})$$

Zurück in den Vortrag

Nicht differenzierbares differenzieren: Subgradienten



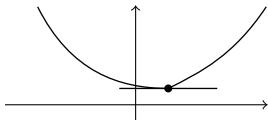
ϕ konvex:

$$x^* \in \partial\phi(\bar{x}) \iff$$

$$\forall x : \phi(x) \geq \phi(\bar{x}) + x^*(x - \bar{x})$$

Zurück in den Vortrag

Nicht differenzierbares differenzieren: Subgradienten



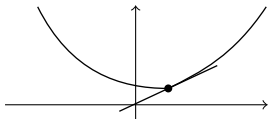
ϕ konvex:

$$x^* \in \partial\phi(\bar{x}) \iff$$

$$\forall x : \phi(x) \geq \phi(\bar{x}) + x^*(x - \bar{x})$$

Zurück in den Vortrag

Nicht differenzierbares differenzieren: Subgradienten



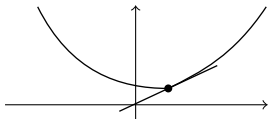
ϕ konvex:

$$x^* \in \partial\phi(\bar{x}) \iff$$

$$\forall x : \phi(x) \geq \phi(\bar{x}) + x^*(x - \bar{x})$$

Zurück in den Vortrag

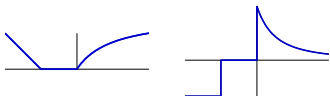
Nicht differenzierbares differenzieren: Subgradienten



ϕ konvex:

$$x^* \in \partial\phi(\bar{x}) \iff$$

$$\forall x : \phi(x) \geq \phi(\bar{x}) + x^*(x - \bar{x})$$



ϕ nicht konvex:

$$x^* \in \partial\phi(\bar{x}) \iff$$

$$\liminf_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{\phi(x) - \phi(\bar{x}) - x^*(x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|} \geq 0$$

Zurück in den Vortrag



Dualität in der konvexen Analysis: Fenchel-Transformation

Definition (Fenchel-Transformation)

$\Phi : X \rightarrow [-\infty, \infty]$, X Hilbert.

$$\Phi^*(x^*) = \sup_x (\langle x^* | x \rangle - \Phi(x)).$$

Dualität in der konvexen Analysis: Fenchel-Transformation

Definition (Fenchel-Transformation)

$\Phi : X \rightarrow [-\infty, \infty]$, X Hilbert.

$$\Phi^*(x^*) = \sup_x (\langle x^* | x \rangle - \Phi(x)).$$

Beispiel

$$\Phi(x) = |x| \implies \Phi^*(x^*) = \sup_x (x^* x - |x|) = \begin{cases} 0, & |x^*| \leq 1 \\ \infty, & |x^*| > 1 \end{cases}$$

$$\Phi(x) = \frac{x^p}{p} \implies \Phi^*(x^*) = \frac{x^{*q}}{q}$$

Dualität in der konvexen Analysis: Fenchel-Transformation

Definition (Fenchel-Transformation)

$\Phi : X \rightarrow [-\infty, \infty]$, X Hilbert.

$$\Phi^*(x^*) = \sup_x (\langle x^* | x \rangle - \Phi(x)).$$

Eigenschaften

Φ konvex, unterhalbstetig, $\neq \infty \implies \Phi^*$ auch

Φ konvex, unterhalbstetig, $\neq \infty \implies \Phi = \Phi^{**}$

Dualität in der konvexen Analysis: Fenchel-Transformation

Definition (Fenchel-Transformation)

$\Phi : X \rightarrow [-\infty, \infty]$, X Hilbert.

$$\Phi^*(x^*) = \sup_x (\langle x^* | x \rangle - \Phi(x)).$$

Satz (Umkehrregel für Subgradienten)

$$(\partial\Phi)^{-1} = \partial\Phi^*$$

Dualität in der konvexen Analysis: Fenchel-Transformation

Definition (Fenchel-Transformation)

$\Phi : X \rightarrow [-\infty, \infty]$, X Hilbert.

$$\Phi^*(x^*) = \sup_x (\langle x^* | x \rangle - \Phi(x)).$$

Satz (Umkehrregel für Subgradienten)

$$(\partial\Phi)^{-1} = \partial\Phi^*$$

[Zurück in den Vortrag](#)