



Zentrum für Technomathematik



Universität Bremen



Risikoanalyse bei Schiffsmanövern unter dem Einfluss von Wind

zur Erlangung des Grades
Master of Science



vorgelegt von

Maria Höffmann

Matrikelnummer: 4220768

Fachbereich 3

1. Gutachter: Dr. Sylvain Roy, Universität Bremen
2. Gutachter: Prof. Dr. Christof Büskens, Universität Bremen

18. Juni 2020

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Aufbau der Arbeit	2
2	Theoretische Grundlagen optimaler Steuerprozesse	4
2.1	Nichtlineare Optimierung	5
2.1.1	Problemstellung	5
2.1.2	Optimalitätsbedingungen	6
2.1.2.1	Notwendige Optimalitätsbedingungen 1. Ordnung	7
2.1.2.2	Notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen 2. Ordnung	8
2.1.3	Lösungsstrategien	9
2.1.3.1	Das Newton-Verfahren	9
2.1.3.2	SQP-Verfahren	10
2.1.4	Parametrische Sensitivitätsanalyse	12
2.1.5	Softwarebibliothek WORHP	14
2.2	Optimale Steuerprozesse	16
2.2.1	Problemstellung	16
2.2.2	Äquivalente Formulierung von Steuerprozessen	19
2.2.2.1	Transformation einer freien Endzeit auf eine feste Endzeit	19
2.2.3	Lösungsstrategie: Diskretisierung	20
2.2.4	Softwarebibliothek TransWORHP	21
3	Modellierung der Schiffsdynamik und äußeren Kräfte	23
3.1	Kinematik	24
3.1.1	Bezugssysteme	24
3.1.2	Systemvariablen	26
3.1.3	Reduzierung auf drei Freiheitsgrade	27
3.1.4	Kinematische Bewegungsgleichungen	29

3.2	Kinetik	30
3.3	Äußere Kräfte	34
3.3.1	Hydrodynamische Kräfte	35
3.3.1.1	Zusätzliche Masse	35
3.3.1.2	Weitere Rumpfkkräfte	36
3.3.2	Aerodynamische Kräfte	40
3.3.3	Schlepperkräfte	43
3.4	Gesamtsystem	45
4	Vereinfachte Risikoanalyse im Modell mit einem Freiheitsgrad	47
4.1	Modellreduzierung auf einen Freiheitsgrad	47
4.2	Zulässigkeit des wahren Windes	50
4.3	Analytische Berechnung der Zulässigkeitsmenge	51
4.4	Berechnung der Zulässigkeitsmenge durch einen Optimalsteuerungsprozess	59
4.5	Vergleich der Ergebnisse beider Methoden	60
5	Risikoanalyse	62
5.1	Zulässigkeit	63
5.2	Kontrollierte Manöver	67
5.2.1	Manöver mit konstanter Position	68
5.2.2	Kontrollierte Manöver in Bewegung	82
5.2.2.1	Analytische Berechnung der kontrollierten Zulässigkeitsmenge	85
5.2.2.2	Berechnung der kontrollierten Zulässigkeitsmenge durch einen Optimalsteuerungsprozess	88
6	Auswertung der Risikoanalyse	90
6.1	Stationäre Manöver	90
6.2	Kontrollierte Manöver in Bewegung	94
6.3	Vergleich des numerischen mit dem analytischen Ansatz	95
6.4	Sensitivitätsanalyse	96
7	Zusammenfassung und Ausblick	101
7.1	Ausblick	103

Kapitel 1

Einführung

Die Überseehäfen in Bremerhaven sind Hauptumschlagpunkt für den Import und Export unterschiedlichster Waren. Täglich können dort mehrere Millionen Container und Autos beobachtet werden, welche durch riesige Containerschiffe und Autotransporter verschifft werden. Diese „Großen“ wären ohne die Schlepperboote allerdings verloren in den engen Schleusen und Anlegestellen des Hafens. Die „Kleinen“ mit besonders großer Leistung sind dafür verantwortlich, dass alle Schiffe sicher im Hafen Bremerhaven festmachen können. Moderne Schlepper verfügen über eine Zugkraft von circa 80 Tonnen, damit sie auch den größten Containerschiffen sicher im Hafen assistieren können [7]. Die Schlepper arbeiten dabei vor allem im Team, um noch schneller und effektiver manövrieren zu können [3].

Beim Anlaufen der großen Schiffe an Häfen übernehmen die Hafenlotsen die Steuerung des Schiffes beziehungsweise der Schlepperboote, um das Schiff zum Be- und Entladen sicher an der Kaimauer anzulegen. Die Lotsen sind revierkundige Nautiker, deren Erfahrungen und Kenntnisse des Hafens und der Strömungsverhältnisse nicht durch GPS und elektronische Seekarten zu ersetzen sind. Insbesondere aufgrund der immer größer, breiter und tiefer werdenden Transportschiffe wird den Lotsen zur Sicherung des Schiffsverkehrs in Häfen eine immer wichtigere Bedeutung zugesprochen [5].

Das stetig wachsende maritime Verkehrsaufkommen und die zunehmenden Schiffsgrößen erfordern modernste Technik und die Weiterentwicklung der Automatisierung. Um den Schiffsverkehr damit effektiver zu regeln und die Anzahl an Unfällen zu reduzieren, hat das Bundesministerium für Wirtschaft und Energie im Jahr 2016 in das Projekt *GALILEOnautic* investiert, welches den Machbarkeitsnachweis für autonome Navigation und optimierte Manöver von vernetzten Schiffen in Häfen im „kleinen Maßstab“ liefern konnte. Im Folgeprojekt *GALILEOnautic 2* sollen diese Methoden ergänzt und weiterentwickelt werden, sodass deren Verwendung in relevanten Anwendungen ermöglicht wird. Neben einer assistierten Fährüberfahrt vom Hafen Rostock nach Gedser steht beispielsweise eine reale Lotsung im Hafen Bremerhaven auf dem Plan. Eine solche Lotsung soll dabei auf SAE-Level 1 umgesetzt werden, das heißt es soll ein Assistenzsystem bereitgestellt werden, das den Nautiker unterstützt und Aktionen durch diesen benötigt. Im Zusammenhang damit ist eine weitere Zielstellung des Projektes die Entwicklung eines Werkzeugs, um eine Risikobewertung der derzeitigen und zukünftigen Fahrsituation für die Lotsen zur Verfügung zu stellen [2][1].

Zum Erreichen des Ziels forschen viele Universitäten, genauer die RWTH Aachen, die Universität Rostock, die HS Wismar und die Universität Bremen in Kooperation mit den Unternehmen SCISYS Deutschland GmbH, Raytheon Anschütz GmbH und der Trezn GmbH. Dabei wurde das Projekt in Teilprojekte zwischen den einzelnen Forschungsgruppen aufgeteilt, wobei die Universität Bremen für die echtzeitfähige Optimalsteuerung für vernetzte maritime Systeme zuständig ist. Weiterhin ist sie zuständig für die Umsetzung der oben genannten Risikoanalyse in Abhängigkeit von gegebenen Umwelteinflüssen wie Wind und Strömung. Das Ziel dieser Arbeit ist die Untersuchung des Einflusses des Windes auf die Trajektorien zur Durchführung von Schiffsmanövern. Im Zusammenhang damit soll eine Risikobewertung für den Lotsen zur Verfügung gestellt werden, ob ein geplantes Schiffsmanöver durch die zur Verfügung stehenden Schlepperboote bei dem aktuellen Wind ohne Bedenken durchgeführt werden kann oder ob besondere Vorsicht geboten ist.

1.1 Aufbau der Arbeit

In Kapitel 2 werden zunächst die theoretischen Grundlagen der nichtlinearen Optimierung und optimalen Steuerung dargestellt. Diesbezüglich werden unter anderem die Sequentielle Quadratische Programmierung zur Lösung nichtlinearer Optimierungsprobleme und die Anwendung einer Sensitivitätsanalyse genauer betrachtet. Zur Lösung optimaler Steuerprozesse wird der Diskretisierungsansatz diskutiert, mit welchem ein dynamischer Steuerprozess auf ein nichtlineares Optimierungsproblem zurückgeführt werden kann. Im Zuge dessen werden die Softwarebibliotheken WORHP und TransWORHP zur numerischen Lösung solcher Probleme vorgestellt.

Die Modellierung der dynamischen Schiffsbewegung erfolgt anschließend in Kapitel 3. Sie beruht auf der Annahme, dass sich das Schiff innerhalb einer Horizontalebene bewegt und dementsprechend nur drei statt der sonst üblichen sechs Freiheitsgrade besitzt. Weiterhin wird angenommen, dass sich das Schiff in diesem Szenario nicht selbst antreibt und steuert, sondern dies allein von zwei Schlepperbooten, die vorne und hinten am Schiff befestigt sind, übernommen wird. Neben der kinematischen und kinetischen Bewegungsgleichungen wird die Schiffsbewegung durch die wirkenden Kräfte charakterisiert. Es folgt eine detaillierte Modellierung der hydrodynamischen und aerodynamischen Kräfte und ebenso eine vereinfachte Modellierung der Schlepperboote als Kraftvektoren. Diese Kräfte werden dann in einem Gesamtsystem zusammengefasst, welches die Schiffsbewegung mit drei Freiheitsgraden beschreibt.

Anschließend folgt in den Kapiteln 4 und 5 die Entwicklung einer Risikoanalyse dieser Bewegung. Dabei ist Kapitel 4 eher als eine Motivation und vorbereitend für Kapitel 5 anzusehen, denn die Schiffsbewegung wurde auf ausschließlich einen Freiheitsgrad beschränkt. Die grundlegende Idee der Risikoanalyse in beiden Kapiteln basiert auf der Entwicklung einer *Zulässigkeitsmenge*, einer Menge von Winden, bei denen ein geplantes Manöver unbedenklich durchgeführt werden kann. Diese Menge soll dem Lotsen in einer anschaulichen Darstellung übergeben werden, sodass er durch Messung des aktuellen Windes das Risiko bezüglich dieses Windes einschätzen kann.

In Kapitel 6 werden die erhaltenen Ergebnisse der Risikoanalyse anhand von realen Beispielen sowohl analytisch als auch unter Anwendung von TransWORHP ausgewer-

tet. Zusätzlich wird eine Sensitivitätsanalyse durchgeführt, um die Abhängigkeit der Risikobewertungen von den Schiffsparemtern zu untersuchen und dem Lotsen so noch genauere Informationen zukommen zu lassen.

Abschließend wird die gesamte Arbeit mit den Ergebnissen der Risikoanalyse in Kapitel 7 zusammengefasst und ein Ausblick gegeben, was in weiteren Arbeiten noch untersucht werden könnte.

Kapitel 2

Theoretische Grundlagen optimaler Steuerprozesse

Die Optimalsteuerungsprobleme entwickelten sich historisch gesehen aus den Variationsproblemen, wobei diese bereits seit dem 17. Jahrhundert von berühmten Mathematikern wie Bernoulli (1667-1748), Newton (1643-1727) und Leibniz (1646-1716) gelöst wurden, wenn auch mit unterschiedlichen Methoden. Optimalsteuerungsprobleme sind eine Verallgemeinerung dieser Variationsprobleme, da zwischen Zustands- und Steuervariablen unterschieden wird. Angetrieben durch in erster Linie militärische Anwendungen entwickeln sie sich seit Mitte des 20. Jahrhunderts. Ein regelrechter Aufschwung wurde durch den Mathematiker Pontryagin (1908-1988) mit dem Beweis des Maximumprinzips hervorgerufen, wodurch er in der Lage war, notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen für Optimalsteuerungsprobleme zu liefern (vgl. deutsche Übersetzung [60]). Es folgten seit diesem Durchbruch unzählige Beiträge sowohl zur Theorie als auch zur Numerik der optimalen Steuerung. Es haben sich die unterschiedlichsten Anwendungsgebiete in den Bereichen der Natur-, Ingenieurs- und Wirtschaftswissenschaften entwickelt, beispielsweise die Simulation von Fahrmanövern, die Steuerung von Robotern oder die Unternehmenssteuerung [36].

Ein optimales Steuerungsproblem beinhaltet die Identifizierung eines zulässigen Schemas, einer Politik oder einer Strategie, um den bestmöglichen Ausgang eines Systems zu erzielen. Formaler ausgedrückt beinhaltet ein Optimalsteuerungsproblem die Steuerung von Parametern eines mathematischen Modelles, um mithilfe von Optimierungstechniken ein optimales Ergebnis zu erzielen. Das Problem vereint damit ein Zielfunktional zur Bewertung der Optimalität und eine Menge von Beschränkungen, welche durch das Modell, das die Entwicklung des Systems beschreibt, konstruiert wurden. Das zugrunde liegende mathematische Modell wird beispielsweise als System von gewöhnlichen, partiellen oder stochastischen Differentialgleichungen formuliert [68].

Im nachfolgenden Abschnitt wird ein mathematisches Modell zur Simulation von Schiffsmanövern hergeleitet. Durch Anwendung optimaler Steuerung können damit planbare Schiffsmanöver unter verschiedensten Gesichtspunkten optimiert und analysiert werden.

Obwohl durch das Maximumprinzip von Pontryagin eine Grundlage zur Lösung durch notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen geschaffen wurde, werden Opti-

malsteuerungsprobleme im Allgemeinen mittels Diskretisierung gelöst. Diese Diskretisierung kann das unendlichdimensionale Steuerungsproblem auf ein endlichdimensionales nichtlineares Optimierungsproblem zurückführen. Aus diesem Grund werden wir im Folgenden in Abschnitt 2.1 zunächst die Theorie der nichtlinearen Optimierung diskutieren, bevor wir in Abschnitt 2.2 genauer auf die optimalen Steuerprozesse eingehen werden.

2.1 Nichtlineare Optimierung

Die Lösung endlichdimensionaler „kleiner“ nichtlinearer Optimierungsprobleme spielte in der Forschung im Gegensatz zur Lösung „großer“ Probleme, den Optimalsteuerungsprozessen, oft eine untergeordnete Rolle, da die erforderliche Rechenzeit unter Kontrolle gehalten werden konnte. Mithilfe geeigneter Diskretisierungsverfahren werden allerdings diese „großen“ Steuerprozesse auf hochdimensionale nichtlineare Optimierungsprobleme reduziert, womit deren Theorie einen neuen Stellenwert einnimmt [18]. Die nichtlineare Optimierung ist damit ein unverzichtbares Hilfsmittel in der angewandten Mathematik. In allen Bereichen, in denen ein mathematisches Modell mit noch unbekanntem Parametern zur Lösung eines Problems aufgestellt wird, wird Optimierung genutzt [46].

Ziel dieses Abschnitts ist es, die theoretischen Grundlagen der nichtlinearen Optimierung darzustellen. Dazu wird zunächst in Abschnitt 2.1.1 die grundlegende Problemstellung vorgestellt und anschließend in Abschnitt 2.1.2 die zur Lösung notwendigen und hinreichenden Optimalitätsbedingungen diskutiert. Im Anschluss daran werden in Abschnitt 2.1.3 zwei häufig genutzte Lösungsstrategien vorgestellt. In Abschnitt 2.1.4 erfolgt dann eine kurze Einführung in die Sensitivitätsanalyse. Abschließend folgt in Abschnitt 2.1.5 eine kurze Einführung in die Softwarebibliothek WORHP, welche zur Lösung hochdimensionaler Optimierungsprobleme entwickelt wurde.

2.1.1 Problemstellung

Das Ziel der nichtlinearen Optimierung ist die Bestimmung von Parametern eines Systems, sodass eine Zielfunktion unter Einhaltung von Nebenbedingungen minimiert wird [46].

Definition 2.1. (Allgemeines nichtlineares Optimierungsproblem)

Ein Problem

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^{N_x}} \quad & f(x) \\ \text{unter} \quad & g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, N_e \\ & g_i(x) \leq 0, \quad i = N_e + 1, \dots, N_g \end{aligned} \tag{NLP}$$

mit der Zielfunktion $f : \mathbb{R}^{N_x} \rightarrow \mathbb{R}$ und den Nebenbedingungen $g : \mathbb{R}^{N_x} \rightarrow \mathbb{R}^{N_g}$ nennt man *allgemeines nichtlineares Optimierungsproblem*. Dabei wird $x \in \mathbb{R}^{N_x}$ die *Optimierungsvariable* genannt.

Mit dieser Problemformulierung einher geht die Definition der *zulässigen Menge*.

Definition 2.2. (Zulässige Menge)

Die Menge aller $x \in \mathbb{R}^{N_x}$, die die Nebenbedingungen durch die Funktion g aus (NLP) erfüllen, wird *zulässige Menge* X genannt.

Zur Lösung des Problems (NLP) werden unter den zulässigen Punkten Minimalstellen x^* der Zielfunktion f gesucht. Dabei wird unterschieden zwischen

- i. *lokalen Minimalstellen*, d.h. für eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^{N_x}$ von x^* gilt

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in X \cap V,$$

- ii. *strengen lokalen Minimalstellen*, d.h. für eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^{N_x}$ von x^* gilt

$$f(x^*) < f(x) \quad \forall x \in X \cap V, \quad x \neq x^*,$$

- iii. *(strengen) globalen Minimalstellen*, d.h. die Eigenschaften aus i. oder ii. gelten für alle Umgebungen $V \subset \mathbb{R}^{N_x}$ von x^* .

Im Kontext der linearen [26] oder konvexen [15] Optimierung ist jede lokale ebenso auch eine globale Minimalstelle. Aufgrund der Tatsache, dass heutige Lösungsverfahren im Allgemeinen nur lokale Minimalstellen berechnen, ist dies ein großer Vorteil gegenüber allgemeinen nichtlinearen Optimierungsproblemen, wie wir sie hier betrachten. Lokale Minimalstellen sind hier nicht gezwungenermaßen auch globale, sodass im Allgemeinen keine Aussagen über die Globalität der gefundenen Lösungen gemacht werden können [19].

An dieser Stelle wird eine weitere Menge eingeführt, die *Menge der aktiven Indizes*. Mithilfe dieser kann analysiert werden, welche der Ungleichungsnebenbedingungen aus (NLP) zur Lagebestimmung einer optimalen Lösung x^* beitragen oder aber keine Rolle spielen [45].

Definition 2.3. (Menge der aktiven Nebenbedingungen)

Die Menge

$$\mathcal{A}(x^*) = \{i \in \{N_e + 1, \dots, N_g\} \text{ mit } g_i(x^*) = 0\}$$

wird als die *Menge der aktiven Ungleichungsnebenbedingungen* bzgl. x^* und

$$\bar{\mathcal{A}}(x^*) = \mathcal{A}(x^*) \cup \{1, \dots, N_e\}$$

als die *Menge der aktiven Nebenbedingungen* bzgl. x^* bezeichnet.

2.1.2 Optimalitätsbedingungen

Zur Formulierung von Optimalitätsbedingungen wird die folgende Eigenschaft zulässiger Punkte benötigt, welche im weiteren Verlauf vorausgesetzt wird [45].

Definition 2.4. Ein zulässiger Punkt $x^* \in X$ heißt *normal*, wenn die Gradienten $\nabla_x g_i(x^*)$ für $i \in \bar{\mathcal{A}}(x^*)$ linear unabhängig sind.

Zur Charakterisierung von lokalen Minimalstellen des Problems (NLP) werden in diesem Abschnitt notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen diskutiert.

2.1.2.1 Notwendige Optimalitätsbedingungen 1. Ordnung

Die Bestimmung von Extrema unter Einhaltung von Nebenbedingungen ist unter anderem in den Wirtschaftswissenschaften eine beliebte Aufgabenstellung. Dabei wird die *Multiplikatormethode von Lagrange* genutzt. Details dazu findet man beispielsweise in [47]. In Analogie zu dieser Methode wird zur Lösung der verwandten Problematik eines nichtlinearen Optimierungsproblems ebenfalls eine *Lagrange-Funktion* definiert [45].

Definition 2.5. (Lagrange-Funktion)

Die Funktion $L : \mathbb{R}^{N_x} \times \mathbb{R}^{N_g} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$L(x, \lambda) := f(x) + \lambda^T g(x)$$

heißt *Lagrange-Funktion* und die Komponenten von $\lambda \in \mathbb{R}^{N_g}$ werden *Lagrange-Multiplikatoren* genannt.

Der folgende Satz liefert damit notwendige Optimalitätsbedingungen, die sogenannten *Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen (KKT)*, für eine lokale Minimalstelle. Die Bedingungen wurden dabei zuerst in der damals noch unveröffentlichten Masterarbeit von Karush (1939) (dargestellt in [50]) genannt, haben sich allerdings erst nach der Arbeit von Kuhn und Tucker (1951) [51] weiter verbreitet.

Satz 2.6. (KKT-Bedingungen)

Sei $x^* \in X$ eine lokale Minimalstelle von (NLP) und normal. Weiterhin sei die Funktion f stetig differenzierbar und die Funktion g komponentenweise stetig differenzierbar in einer Umgebung um x^* . Dann existiert ein eindeutiges $\lambda \in \mathbb{R}^{N_g} \setminus \{0\}$, sodass folgende Bedingungen gelten:

i. Multiplikatorregel:
$$\nabla_x L(x^*, \lambda) = \nabla_x f(x^*) + \sum_{i=1}^{N_g} \lambda_i \nabla_x g_i(x^*) = 0 \quad (2.1)$$

ii. Vorzeichenbedingung:
$$\lambda_i \geq 0, \quad \text{für } i \in \mathcal{A}(x^*) \quad (2.2)$$

iii. Komplementarität:
$$\lambda_i = 0, \quad \text{für } i \notin \bar{\mathcal{A}}(x^*) \quad (2.3)$$

Beweis. Der Beweis dieses Satzes ist in [30] nachzulesen. □

Durch die Komplementaritätsbedingung (2.3) wird sichergestellt, dass für jedes $i \in \{1, \dots, N_g\}$ der Lagrange-Multiplikator λ_i oder die ausgewertete Nebenbedingung $g_i(x^*)$ gleich Null ist. Damit verschwinden die Lagrange-Multiplikatoren zu den inaktiven Nebenbedingungen, sie spielen keine weitere Rolle in der Lagebestimmung einer optimalen Lösung. Dies bedeutet mit der Multiplikatorregel (2.1) anschaulich, dass sich der Gradient der Zielfunktion als Linearkombination der Gradienten der aktiven Nebenbedingungen darstellen lässt [19].

Zulässige Punkte $x \in X$, welche die KKT-Bedingungen bezüglich des Optimierungsproblems (NLP) erfüllen, sind mögliche Kandidaten für lokale Minimalstellen, auch *kritische Punkte* genannt. Zur Überprüfung, ob diese kritischen Punkte tatsächlich die gewünschte Optimalität erfüllen, werden hinreichende Bedingungen für lokale Minimalstellen benötigt [19].

2.1.2.2 Notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen 2. Ordnung

Während die Bedingungen erster Ordnung mit Hilfe des Gradienten $\nabla_x L(x^*, \lambda)$ der Lagrange-Funktion formuliert werden, nutzen Bedingungen zweiter Ordnung die Hesse-Matrix $\nabla_x^2 L(x^*, \lambda)$. Dabei wird dessen positive Definitheit über einer Menge C überprüft, wobei durch diese Menge

$$C := \left\{ v \in \mathbb{R}^n \mid \begin{aligned} \nabla_x g_i(x^*)v &\leq 0, \quad i \in \mathcal{A}(x^*), \quad \lambda_i = 0, \\ \nabla_x g_i(x^*)v &= 0, \quad i \in \mathcal{A}(x^*), \quad \lambda_i > 0, \\ \nabla_x g_i(x^*)v &= 0, \quad i \in \{1, \dots, N_e\} \end{aligned} \right\}$$

ein Kegel beschrieben wird [19].

Satz 2.7. (Optimalitätsbedingungen 2. Ordnung)

Sei $x^* \in X$ ein zulässiger normaler Punkt von (NLP). Weiterhin sei die Funktion f zweimal stetig differenzierbar und die Funktion g komponentenweise zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung um x^* . Dann gelten die folgenden Bedingungen.

- i. **Notwendige Bedingungen 2. Ordnung:** Ist x^* eine lokale Minimalstelle von (NLP), so gibt es ein eindeutiges $\lambda \in \mathbb{R}^{N_g} \setminus \{0\}$, wobei die KKT-Bedingungen (2.1)-(2.3) und zusätzlich

$$v^T \nabla_x^2 L(x^*, \lambda)v \geq 0 \quad \text{für alle } v \in C \setminus \{0\}$$

erfüllt sind.

- ii. **Hinreichende Bedingungen 2. Ordnung:** Existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}^{N_g} \setminus \{0\}$, sodass

$$v^T \nabla_x^2 L(x^*, \lambda)v > 0 \quad \text{für alle } v \in C \setminus \{0\}$$

gilt, so gibt es Konstanten $\varepsilon > 0$ und $c > 0$, sodass

$$f(x) \geq f(x^*) + c\|x - x^*\|^2 \quad \text{für } x \in X, \quad \|x - x^*\| \leq \varepsilon.$$

Insbesondere ist x^* damit eine strenge lokale Minimalstelle von (NLP).

Beweis. Der Beweis dieses Satzes findet sich ebenfalls in [30]. \square

Mithilfe der notwendigen und hinreichenden Bedingungen ist es möglich, optimale Lösungen von (NLP) analytisch zu berechnen. Für komplexe und hochdimensionale Probleme ist jedoch eine explizite analytische Berechnung nicht oder nur sehr speicher- und rechenintensiv möglich. Man greift auf numerische Lösungsverfahren zurück, welche im Allgemeinen auf den genannten Bedingungen beruhen [19].

2.1.3 Lösungsstrategien

Basierend auf den theoretischen Resultaten des letzten Abschnitts folgt nun die Betrachtung numerischer Verfahren zur Lösung eines allgemeinen Optimierungsproblems (NLP). Dabei werden zunächst das Newton-Verfahren und einige Modifikationen betrachtet. Anschließend folgt der Übergang zur Diskussion des SQP-Verfahrens, welches für hochdimensionale Optimierungsprobleme erfahrungsgemäß effizientere Ergebnisse liefert [19].

Ausgehend vom allgemeinen nichtlinearen Optimierungsproblem (NLP) ergibt sich

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^{N_x}} f(x) \\ \text{unter } g_a(x) = 0, \quad g_a(x) \in \mathbb{R}^{N_a} \end{aligned} \quad (\text{NLP}_a)$$

als ein äquivalentes nichtlineares Optimierungsproblem. Dabei beinhaltet der Vektor

$$g_a(x) := (g_i(x))_{i \in \bar{A}(x)}$$

die aktiven Nebenbedingungen für ein zulässiges $x \in X$ und $N_a := |\bar{A}(x)|$ gibt dessen Anzahl an. Der zugehörige Vektor der Lagrange-Multiplikatoren wird mit $\lambda_a \in \mathbb{R}^{N_a}$ bezeichnet. Diese Transformation ist zulässig, da inaktive Nebenbedingungen aus (NLP) verschwindende Lagrange-Multiplikatoren besitzen. Sie spielen deshalb keine Rolle bei der Lagebestimmung optimaler Punkte und können vernachlässigt werden. Das reduzierte Problem (NLP_a) besitzt ausschließlich Gleichungsnebenbedingungen und keine Ungleichungsnebenbedingungen. Gemeinsam mit der notwendigen KKT-Bedingung (2.1), welche in einem optimalen Punkt erfüllt sein muss, liegt ein Nullstellenproblem vor. Das wohl bekannteste Hilfsmittel zur Nullstellenberechnung ist das Newton-Verfahren [19].

2.1.3.1 Das Newton-Verfahren

Um (NLP_a) numerisch zu lösen, kann das Newton-Verfahren angewandt werden. Es ist ein optimales x^* zu finden, sodass die Nullstellengleichung

$$K(x^*, \lambda_a) := \begin{pmatrix} \nabla_x L(x^*, \lambda_a) \\ g_a(x^*) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

(näherungsweise) erfüllt ist. Damit wird die Erfüllung der notwendigen Bedingungen für einen kritischen Punkt aus Satz 2.6 sichergestellt, ebenso die Zulässigkeit. Es ergibt sich zusammen mit einem geeignet gewählten Startwert $(x^{[0]}, \lambda_a^{[0]})$ die Iterationsvorschrift

$$\begin{pmatrix} x^{[k+1]} \\ \lambda_a^{[k+1]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{[k]} \\ \lambda_a^{[k]} \end{pmatrix} - \left(\nabla_{(x, \lambda_a)} K(x^{[k]}, \lambda_a^{[k]}) \right)^{-1} K(x^{[k]}, \lambda_a^{[k]}),$$

wobei $(x^{[k]}, \lambda_a^{[k]})$ die k -ten Iterierten beschreibt. Dieses Verfahren genügt quadratischer Konvergenz [33]. Allerdings wird in jedem Iterationsschritt die Berechnung des Gradienten

$$\nabla_{(x, \lambda_a)} K(x^{[k]}, \lambda_a^{[k]}) = \begin{pmatrix} \nabla_x^2 L(x^{[k]}, \lambda_a^{[k]}) & \nabla_x g_a(x^{[k]})^\top \\ \nabla_x g_a(x^{[k]}) & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

benötigt. Dies ist in komplizierten Fällen sehr aufwendig, da dabei $\mathcal{O}((N_x + N_a)^2)$ partielle Ableitungen benötigt werden [19]. Um diesen Umstand zu umgehen, bietet sich das *vereinfachte Newton-Verfahren* mit der Iterationsvorschrift

$$\begin{pmatrix} x^{[k+1]} \\ \lambda_a^{[k+1]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{[k]} \\ \lambda_a^{[k]} \end{pmatrix} - \left(\nabla_{(x, \lambda_a)} K(x^{[0]}, \lambda_a^{[0]}) \right)^{-1} K(x^{[k]}, \lambda_a^{[k]})$$

an. Der Gradient muss dabei nur ein einziges Mal für einen möglichst guten Startwert $(x^{[0]}, \lambda_a^{[0]})$ berechnet werden. Durch diese Vereinfachung muss das Verfahren allerdings Konvergenzgeschwindigkeit einbüßen, denn es konvergiert lediglich linear.

Eine weitere Modifikation sind *Quasi-Newton-Methoden*. Dabei wird die Hesse-Matrix $\nabla_x^2 L(x^{[k]}, \lambda_a^{[k]})$ in (2.4) nicht explizit berechnet, sondern durch geeignete sogenannte Update-Matrizen $B^{[k]}$ angenähert und ersetzt. Für explizite Ausführungen dieses Verfahrens sei an dieser Stelle auf [37] verwiesen. Durch diese Technik wird superlineare Konvergenz erreicht und stellt damit einen geeigneten Kompromiss zwischen Aufwand und Effizienz dar [19]. Detailliertere Ausführungen zum Newton-Verfahren und dessen unterschiedliche Variationen werden in [64] beschrieben. Die nachfolgende Lösungsmethode nutzt die Idee der Quasi-Newton-Methoden aus.

2.1.3.2 SQP-Verfahren

Eine weitere Methode zur Lösung nichtlinearer Optimierungsprobleme wie (NLP_a) ist die *Sequentielle-Quadratische-Programmierung (SQP)*. Die Grundlage dieses Verfahrens bildet die Formulierung und Lösung quadratischer Teilprobleme (QP-Unterprobleme), die eine lokale quadratische Approximation des Ausgangsproblems (NLP_a) darstellen [19].

Die sequentielle Abarbeitung des Algorithmus besteht aus Haupt- und Nebeniterationen. Die Nebeniterationen dienen der Lösung der QP-Unterprobleme. Die Hauptiterationen berechnen unter Verwendung von Quasi-Newton-Verfahren durch die Vorschrift

$$x^{[k+1]} = x^{[k]} + \alpha^{[k]} p^{[k]} \quad (2.5)$$

eine Folge von Iterierten $\{x^{[k]}\}$, die gegen die optimale Lösung x^* konvergieren soll. Dabei beschreibt $\alpha^{[k]}$ eine Schrittweite und $p^{[k]}$ die Suchrichtung. Der typische Ablauf einer Hauptiteration besteht aus den folgenden Schritten:

- i. Berechnung der Suchrichtung $p^{[k]}$ durch Lösung der QP-Unterprobleme
- ii. Bestimmung einer Schrittlänge $\alpha^{[k]}$ durch Nutzung von Bewertungsfunktionen
- iii. Korrektur der (approximierten) Hesse-Matrix der Lagrange-Funktion $B^{[k]}$.

Wie bereits in Abschnitt 2.1.3.1 erwähnt, basieren Quasi-Newton-Methoden auf der Approximation der Hesse-Matrix, anstatt sie explizit zu berechnen. Diese Idee wird hier genutzt, um lange Rechenzeiten zu vermeiden. Der Verlust der Konvergenzgeschwindigkeit von quadratischer zu superlinearer Konvergenz wird im Allgemeinen durch die enorm verkürzten Rechenzeiten der Approximation der Hesse-Matrix mehr als kompensiert [19]. Im Folgenden werden nun die drei Teilschritte des SQP-Verfahrens genauer erläutert.

Berechnung der Suchrichtung $p^{[k]}$ Die Nebeniterationen dienen der Lösung der QP-Unterprobleme und damit der Bestimmung der jeweiligen Suchrichtung $p^{[k]}$. Die Unterprobleme werden durch eine quadratische Approximation der Lagrange-Funktion und eine Linearisierung der Beschränkungen definiert und besitzen die Form

$$\begin{aligned} \min_{p \in \mathbb{R}^{N_x}} \quad & \nabla_x f(x^{[k]})p + \frac{1}{2}p^T B^{[k]}p \\ \text{unter} \quad & g_a(x^{[k]}) + \nabla_x g_a(x^{[k]})p = 0, \end{aligned} \quad (\text{QP})$$

wobei $B^{[k]}$ eine geeignete Approximation der Hesse-Matrix $\nabla_x^2 L(x^{[k]}, \lambda_a^{[k]})$ darstellt und $x^{[k]}$ die aktuelle Hauptiterierte ist. Die Lösung von (QP) bildet die Suchrichtung $p^{[k]}$. Zudem wird der zur optimalen Lösung $p^{[k]}$ gehörige Lagrange-Multiplikator als $\lambda^{[k+1]}$ gesetzt. Damit kann $(x^{[k]} + p^{[k]}, \lambda^{[k+1]})$ als lokale Approximation von (x^*, λ^*) genutzt werden [19].

Berechnung einer Schrittweite $\alpha^{[k]}$ Ein neuer Iterationspunkt $x^{[k+1]} = x^{[k]} + p^{[k]}$ muss nicht notwendigerweise ein zulässiger Punkt für das Problem (NLP_a) sein. In der Regel ist die Suchrichtung $p^{[k]}$ keine zulässige Abstiegsrichtung von f in $x^{[k]}$. Die Berechnung einer geeigneten Schrittweite $\alpha^{[k]}$ ist deshalb notwendig, um in den Hauptiterationen (2.5) zulässige Punkte zu erhalten. Dazu wird eine *Bewertungsfunktion* ϕ eingeführt. Diese zeichnet sich dadurch aus, dass eine zulässige lokale Lösung x^* von (NLP_a) ein lokales, unrestringiertes Minimum von ϕ ist und die Suchrichtung $p^{[k]}$ eine Abstiegsrichtung von ϕ in $x^{[k]}$ ist [12]. Bewährt haben sich differenzierbare Bewertungsfunktionen der Form

$$\phi(x, \lambda_a, \beta) = L(x, \lambda_a) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_a} \beta_i g_{a_i}^2(x)$$

mit $\beta \in \mathbb{R}_+^{N_a}$. Durch die zusätzliche Summe in dieser Funktion im Gegensatz zur einfachen Lagrange-Funktion werden die Verletzungen der Gleichungsnebenbedingungen aus (NLP_a) bestraft. Daher wird ϕ auch *Penalty-Funktion* genannt. Die Idee zur Wahl einer geeigneten Schrittweite $\alpha^{[k]}$ wird durch

$$\phi(x^{[k+1]}, \lambda_a^{[k+1]}, \beta) \approx \min_{\alpha^{[k]} \in (0,1]} \phi(x^{[k]} + \alpha^{[k]} p^{[k]}, \lambda_a^{[k+1]}, \beta)$$

charakterisiert. Gesucht ist die Schrittweite $\alpha^{[k]} \in (0, 1]$, sodass die Bewertungsfunktion ϕ einen nahezu minimalen Wert annimmt [19].

Berechnung der approximierten Hesse-Matrix $B^{[k]}$ Für die Wahl der Approximationsmatrizen $B^{[k]}$ soll die Berechnung von zweiten Ableitungen vermieden werden, die Konvergenzordnung soll dennoch hinreichend gut sein. Damit bietet sich die Berechnung von BFGS-Update-Matrizen durch eine Quasi-Newton-Korrektur an. Für eine genauere Beschreibung dieser Methode sei hier auf [57] oder [12] verwiesen. Durch dieses Verfahren wird superlineare Konvergenz erreicht. Für sparse Probleme ist eine derartige Vorgehensweise jedoch ineffizient, da die Dünnbesetztheit des Problems bei der Approximation durch Update-Matrizen verloren geht [19].

Detailliertere Betrachtungen der Theorie des SQP-Algorithmus und seiner genauen Durchführung finden sich in [12] und [57]. Die Softwarebibliothek WORHP, die genau auf diesem Algorithmus basiert, wird im folgenden Abschnitt kurz vorgestellt.

2.1.4 Parametrische Sensitivitätsanalyse

In der praxisbezogenen Anwendung ist es oftmals nicht ausreichend, ausschließlich die Lösung des modellierten Optimierungsproblems zu kennen, denn ein solches Problem kann beispielsweise durch Messungenauigkeiten oder veränderte Umwelteinflüsse kleine Störungen aufweisen. Nun ist weiterhin von Interesse, wie die berechnete optimale Lösung auf diese Störungen reagiert. Dies wird in der parametrischen Sensitivitätsanalyse genauer untersucht.

Wir wollen dazu zunächst das *gestörte Problem der nichtlinearen Optimierung* betrachten.

Definition 2.8. (Gestörtes Problem der nichtlinearen Optimierung)

Ein Problem

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^{N_x}} \quad & f(x, z) \\ \text{unter} \quad & g_i(x, z) = 0, \quad i = 1, \dots, N_e \\ & g_i(x, z) \leq 0, \quad i = N_e + 1, \dots, N_g \end{aligned} \quad (\text{NLP}(z))$$

mit der Zielfunktion $f : \mathbb{R}^{N_x} \times \mathbb{R}^{N_z} \rightarrow \mathbb{R}$ und den Nebenbedingungen $g : \mathbb{R}^{N_x} \times \mathbb{R}^{N_z} \rightarrow \mathbb{R}^{N_g}$, welche zusätzlich vom Störparameter $z \in \mathbb{R}^{N_z}$ abhängig sind, nennt man *gestörtes nichtlineares Optimierungsproblem*.

Da die Nebenbedingungen vom Störparameter z abhängen, gilt dies ebenso für die Menge der zulässigen Lösungen $X(z)$. Bezeichne für ein zulässiges $x^* \in X(z)$ die Menge der aktiven (Ungleichungs-)Nebenbedingungen mit $\mathcal{A}(x^*, z)$ bzw. $\bar{\mathcal{A}}(x^*, z)$, definiert wie in Definition 2.3.

Sei nun $z_0 \in \mathbb{R}^{N_z}$ ein Referenzwert. Dann wird $(\text{NLP}(z_0))$ als das *ungestörte Problem* bezeichnet. Gemeinsam mit $f(x) := f(x, z_0)$ und $g(x) := g(x, z_0)$ gelten für dieses ungestörte Problem die diskutierten Optimalitätsbedingungen aus Abschnitt 2.1.2.

Die parametrische Sensitivitätsanalyse untersucht, welchen Einfluss kleine Abweichungen des Störparameters vom Referenzwert auf die optimale Lösung des Problems haben. Im Zuge dessen werden sogenannte *Sensitivitätsdifferentialiale* berechnet und genutzt.

Dieser Abschnitt stellt nur kompakt die für die vorliegende Arbeit relevanten Ergebnisse der Sensitivitätsanalyse zusammen. Für eine umfassende Darstellung der Theorie und

zusätzlichen Anwendungen sei auf [29] verwiesen. Untersuchungen im Kontext der nichtlinearen Optimierung werden weiterhin von Büskens und Maurer in [21] aufgearbeitet.

Liegen nur kleine Störungen des Systems vor, so lassen sich die Änderungen der Optimallösung über eine stetig differenzierbare Abhängigkeit beschreiben. Der Sensitivitätssatz bildet das Fundament der parametrischen Sensitivitätsanalyse und beschreibt genau diese Abhängigkeit [46].

Satz 2.9. (Sensitivitätssatz)

Sei $x^* \in X(z_0)$ zulässig bezüglich $(\text{NLP}(z_0))$ und normal, außerdem seien die Funktionen f und g zweimal stetig differenzierbar bezüglich x und die Gradienten $\nabla_x f$ und $\nabla_x g$ sowie g seien einmal stetig differenzierbar bezüglich z in einer Umgebung von $(x^*, z_0) \in \mathbb{R}^{N_x} \times \mathbb{R}^{N_z}$. Weiterhin gelten die Bedingungen:

- i. In x^* sind die hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung erfüllt und die zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren sind λ_i^* für $i \in \bar{\mathcal{A}}(x^*, z_0)$.
- ii. Die Lagrange-Multiplikatoren sind strikt positiv $\lambda_i^* > 0$ für alle $i \in \mathcal{A}(x^*, z_0)$.

Dann gibt es in einer Umgebung $Z \subseteq \mathbb{R}^{N_z}$ von z_0 eindeutig bestimmte, differenzierbare Funktionen $x : Z \rightarrow \mathbb{R}^{N_x}$ und $\lambda : Z \rightarrow \mathbb{R}^{N_g}$ mit den Eigenschaften:

- i. Für den Referenzwert gilt $x(z_0) = x^*$, $\lambda(z_0) = \lambda^*$.
- ii. Für $z \in Z$ erfüllt $x(z)$ mit den Multiplikatoren $\lambda(z)$ die hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung des gestörten Problems $(\text{NLP}(z))$ und ist damit eine eindeutig bestimmte strenge lokale Minimalstelle.
- iii. Für $z \in Z$ bleibt die Menge der aktiven Nebenbedingungen unverändert, das heißt es gilt $\bar{\mathcal{A}}(x^*, z_0) = \bar{\mathcal{A}}(x(z), z)$.
- iv. Die Lösung $x(z)$ ist weiterhin normal.
- v. Die Lagrange-Multiplikatoren sind strikt positiv $\lambda_i(z) > 0$ für $i \in \mathcal{A}(x^*, z_0)$.

Insbesondere ist x^* eine isolierte Minimalstelle des Problems $(\text{NLP}(z_0))$.

Beweis. Der vollständig ausgeführte Beweis findet sich beispielsweise in [29]. In [54] und [20] führt eine Orientierung an den aktiven Beschränkungen zu einer deutlichen Verkürzung des Beweises. \square

Innerhalb der Beweisführung werden insbesondere Formeln zur Berechnung der Sensitivitätsdifferenziale entwickelt. Wir stellen an dieser Stelle nur das Ergebnis dar, für nachvollziehbare und dennoch kompakte Folgerungen sei auf [46] verwiesen.

Proposition 2.10. (Berechnung der Sensitivitätsdifferenziale)

Es gelten die Voraussetzungen des Sensitivitätssatzes 2.9. Sei weiterhin die Funktion

$g_a(x, z) := (g_i(x, z))_{i \in \bar{\mathcal{A}}(x, z)}$ definiert wie in (NLP_a) mit den zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_a(z) \in \mathbb{R}^{N_a}$ mit $N_a := |\bar{\mathcal{A}}(x, z)|$. Dann ergeben sich für die stetig differenzierbaren Funktionen $x : Z \rightarrow \mathbb{R}^{N_x}$ und $\lambda_a : Z \rightarrow \mathbb{R}^{N_a}$ die Differentiale

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dz}(z_0) \\ \frac{d\lambda_a}{dz}(z_0) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_x^2 L(x^*, \lambda^*, z_0) & \nabla_x g_a^T(x^*, z_0) \\ \nabla_x g_a(x^*, z_0) & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \nabla_{xz} L(x^*, \lambda^*, z_0) \\ \nabla_z g_a(x^*, z_0) \end{pmatrix}.$$

Mithilfe dieser Darstellung lassen sich die Sensitivitätsdifferentialen der Optimierungsvariablen $\frac{dx}{dz}(z_0)$ und der Lagrange-Multiplikatoren $\frac{d\lambda_a}{dz}(z_0)$ direkt aus der ungestörten Lösung mit dem Referenzparameter z_0 berechnen.

Aus der optimalen Lösung (x^*, λ_a^*) des ungestörten Problems und den Sensitivitätsdifferentialen aus Proposition 2.10 können wir nun Approximationen der optimalen Lösung des gestörten Problems (NLP(z)) berechnen. Bei nur geringfügiger Abweichung des Störparameters vom Referenzwert p_0 bleibt die Menge der aktiven Nebenbedingungen unverändert, wie bereits im Sensitivitätssatz angemerkt. Damit können wir weiterhin die auf die aktiven Nebenbedingungen eingeschränkten Funktionen g_a und λ_a betrachten, und es ergeben sich mittels Taylor-Entwicklung erster Ordnung die Approximationen

$$\begin{aligned} x(z) &\approx x^* + \frac{dx}{dz}(z_0) \cdot (z - z_0) \\ \lambda_a(z) &\approx \lambda_a^* + \frac{d\lambda_a}{dz}(z_0) \cdot (z - z_0). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Unter Betrachtung des Fehlers, der bei Einsetzen dieser Approximationen in die Nebenbedingungen auftritt, lässt sich iterativ eine Folge (x_k, z) berechnen, wobei der Fehler schrittweise reduziert wird. Die Folge konvergiert gegen einen Fixpunkt (x, z) , welcher eine optimale Lösung des betrachteten Problems ist. Eine detailliertere Beschreibung dieser iterativen Lösungsfindung findet sich beispielsweise in [17].

2.1.5 Softwarebibliothek WORHP

Zur effizienten Lösung nichtlinearer Probleme wie (NLP) wird in dieser Arbeit die mathematische Softwarebibliothek WORHP („*We Optimize Really Huge Problems*“) genutzt, entwickelt von der AG Optimierung und Optimale Steuerung an der Universität Bremen. Diese ist - wie der Name vermuten lässt - besonders zur Lösung großer Systeme mit vielen Variablen geeignet. Der verwendete Algorithmus beruht dabei auf dem SQP-Verfahren [9] oder den Innere-Punkte-Methoden [48].

Die Bibliothek WORHP wurde entwickelt, um allgemeine nichtlineare beschränkte Optimierungsprobleme der Form

$$\begin{aligned} &\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ \text{unter} \quad &\begin{pmatrix} l \\ L \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} u \\ U \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{OP})$$

zu lösen. Dabei sind die Beschränkungen $l, u \in \mathbb{R}^n$ die sogenannten *Boxbeschränkungen* an die Optimierungsvariable $x \in \mathbb{R}^n$ und $L, U \in \mathbb{R}^m$ bilden die Grenzen der Nebenbedingungen. Gleichheitsnebenbedingungen werden in diesem Kontext realisiert, indem obere

und untere Beschränkungen den gleichen Wert erhalten. Die Zielfunktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und die Nebenbedingung $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ seien zweimal stetig differenzierbar. Die Forderung der zweimaligen Differenzierbarkeit muss nicht zwangsläufig erfüllt sein, um Minimalstellen zu finden. Glattheit in Umgebungen um lokale Minimalstellen ist im Allgemeinen ausreichend [9]. Die Probleme (NLP) und (OP) sind bis auf Transformation und die Forderung der zweimaligen Differenzierbarkeit äquivalent zueinander. Streng genommen besitzen sie verschiedene Notationen der Dimensionen und Beschränkungen, was im Folgenden nicht weiter betrachtet wird. Die Formulierung in (NLP) wird genutzt, um mathematische Eigenschaften auszudrücken, während (OP) genutzt wird, um die numerische Umsetzung zu verdeutlichen [9]. Weitere Informationen zur Anwendung der Softwarebibliothek sind [9] zu entnehmen.

Die Softwarebibliothek WORHP wurde dafür entwickelt, hochdimensionale Optimierungsprobleme mit einer sehr großen Anzahl an Optimierungsvariablen und Beschränkungen zu lösen. Zur Lösung eines Problems ist wie im vorangegangenen Abschnitt die Berechnung der Jacobi-Matrix der Nebenbedingungen und der Hesse-Matrix der Lagrange-Funktion notwendig. Dies führt bei naiver Implementierung zu einem enormen Rechen- und Speicheraufwand. Da solche hochdimensionalen Probleme häufig durch die Diskretisierung von Optimalsteuerungsproblemen entstehen (vgl. dazu Abschnitt 2.2), besitzen sie in diesen Fällen eine dünnbesetzte Struktur, sodass die Jacobi- und Hesse-Matrix nur verhältnismäßig wenige Einträge ungleich Null besitzen. Durch die effiziente Implementierung von WORHP werden nur diese Einträge statt der gesamten Matrizen gespeichert [70]. Es lassen sich eine Vielzahl solcher hochdimensionaler und gleichzeitig dünnbesetzter Optimierungsprobleme nennen, beispielsweise Niedrigschubtrajektorien für Raumfahrzeuge im Hinblick auf Zeitoptimalität nennen [56], aber auch modellprädiktive Regelung von Schwärmen [71] oder allgemeine optimale Steuerprozesse [16][27].

Eine weitere Besonderheit, die durch WORHP geboten wird, ist das integrierte Modul WORHP Zen. Mithilfe dieses Moduls ist es möglich, eine Sensitivitätsanalyse für die implementierten Optimierungsprobleme ohne großen Mehraufwand durchzuführen. Neben der effizienten Berechnung und Speicherung der Sensitivitätsdifferentialen sind Echtzeit-Updates möglich, um eine approximative Lösung des parameter-gestörten Optimierungsproblems zu liefern [49].

Die Softwarebibliothek wird ununterbrochen durch die wissenschaftlichen Mitarbeiter an der Universität Bremen weiterentwickelt und verbessert. In der Dissertation [44] werden Methoden zur effizienten Bestimmung von Ableitungen entwickelt und untersucht. Weiterhin liefert [34] verschiedene Methoden zur Steigerung der Effizienz numerischer Optimierungsverfahren im Hinblick auf die Implementierung von WORHP. Die Ansätze in [35] zur Entwicklung eines Multi-Core-Interfaces für WORHP, um dessen Berechnungen parallelisieren zu können, resultieren in vielversprechenden Ergebnissen. Mithilfe einer solchen parallelen Berechnungsmethode könnten neben der Variation von Parametern beispielsweise auch viele Probleme mit variierten Startschätzungen effizient gleichzeitig berechnet werden, sodass Erkenntnisse im Hinblick auf die Globalität der gefundenen Lösung gewonnen werden können. Viele weitere Dissertationen, die im Zusammenhang mit der Entwicklung und Anwendung von WORHP stehen, können [9] entnommen werden.

2.2 Optimale Steuerprozesse

Die nichtlineare Optimierung aus Abschnitt 2.1 dient der Bestimmung von Zahlen zur Minimierung einer Zielfunktion unter Einhaltung von Nebenbedingungen. Diese Systeme sind zeitunabhängig. Zur Betrachtung dynamischer Systeme wird die optimale Steuerung genutzt. In diesem Teilgebiet der angewandten Mathematik werden auf ähnliche Weise Funktionen gesucht, die ein Zielfunktional unter Einhaltung von Nebenbedingungen minimieren [46].

Ziel dieses Abschnitts ist die Darstellung der theoretischen Grundlagen optimaler Steuerprozesse. Dazu wird zunächst in Abschnitt 2.2.1 die grundlegende Problemstellung und damit einhergehend die Definition der notwendigen Systemvariablen vorgestellt. In Abschnitt 2.2.2 werden äquivalente Formulierungen dieser Problemstellung diskutiert, insbesondere eine für diese Arbeit später noch interessante. Weiter geht es in Abschnitt 2.2.3 mit den Strategien zur Lösung optimaler Steuerprozesse, wobei zwei unterschiedliche Vorgehensweisen diskutiert und verglichen werden. Abschließend wird die Softwarebibliothek TransWORHP in Abschnitt 2.2.4 vorgestellt, eine Erweiterung der Bibliothek WORHP, welche zur Lösung von Optimalsteuerungsproblemen genutzt werden kann.

2.2.1 Problemstellung

Zur Beschreibung eines dynamischen Systems auf dem Zeitintervall $[t_0, t_f]$ werden zunächst Systemvariablen eingeführt. Dabei wird ohne Einschränkung der Startzeitpunkt $t_0 = 0$ angenommen, da durch lineare Transformation jeder beliebige Startpunkt auf diesen zurückgeführt werden kann[19].

Definition 2.11. (Zustandsvektor)

Der Zustand eines Systems zu einem beliebigen Zeitpunkt $t \in [0, t_f]$ lässt sich durch den *Zustandsvektor*

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_{N_x}(t))^T \in \mathbb{R}^{N_x}$$

beschreiben, der aus den *Zustandsvariablen* $x_i(t)$, $i = 1, \dots, N_x$ besteht. Diese seien stetig und stückweise stetig differenzierbar auf dem gesamten Intervall $[0, t_f]$. Dabei bezeichnet $x(0) \in \mathbb{R}^{N_x}$ den *Anfangszustand* und $x(t_f) \in \mathbb{R}^{N_x}$ den *Endzustand*.

Definition 2.12. (Steuervektor)

Das Verhalten eines Systems zu einem beliebigen Zeitpunkt $t \in [0, t_f]$ kann über einen *Steuervektor*

$$u(t) = (u_1(t), \dots, u_{N_u}(t))^T \in \mathbb{R}^{N_u}$$

kontrolliert werden, der aus den *Steuerungen* $u_j(t)$, $j = 1, \dots, N_u$ besteht. Diese seien stückweise stetig auf dem Intervall $[0, t_f]$.

Definition 2.13. (Freie Parameter)

Das Verhalten eines Systems kann zusätzlich noch von einer beliebigen Anzahl *freier Parameter*

$$p = (p_1, \dots, p_{N_p})^T \in \mathbb{R}^{N_p}.$$

abhängen.

Beispielsweise kann ein Auto durch Drehen des Lenkrads und durch Betätigen des Gaspedals oder der Bremse gesteuert werden. Ebenso kann ein Schiff durch Nutzung des Ruders und Propellers gesteuert werden, oder aber durch Schlepperboote.

Die zeitliche Änderung des zuvor beschriebenen Systemzustands wird charakterisiert durch die *Systemdynamik* [46].

Definition 2.14. (Systemdynamik)

Die Systemdynamik besteht aus einem System von Differentialgleichungen erster Ordnung der Form

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), p, t), \quad t \in [0, t_f]$$

wobei die Funktion $f : \mathbb{R}^{N_x} \times \mathbb{R}^{N_u} \times \mathbb{R}^{N_p} \times [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^{N_x}$ stetig und bezüglich x , u und p außerdem stetig partiell differenzierbar ist.

Die freien Parameter dienen einer genauen und flexiblen Beschreibung des zu betrachtenden Problems. Beispielsweise das Lenkverhalten oder die Übersetzung des Motors unterscheiden sich bei verschiedenen Fahrzeugen. Um dennoch eine allgemeine Dynamik anwenden zu können, werden freie Parameter genutzt, um diese individuellen Eigenschaften abbilden zu können. Für ein explizites Problem werden diese freien Parameter auf einen festen Wert gesetzt. Im Gegensatz dazu dienen die Sensitivitätsparameter aus Abschnitt 2.1.4 der Untersuchung des Einflusses auf das System bei Veränderungen.

Die Endzeit t_f des Systems kann sowohl fest vorgegeben als auch frei wählbar sein. Im zweiten Fall wird die Dynamik des Systems um eine weitere Gleichung erweitert und kann so auf ein System mit fester Endzeit zurückgeführt werden. Eine detaillierte Beschreibung dieser Transformation erfolgt in Abschnitt 2.2.2. Falls die Systemdynamik f nicht explizit von der Zeitvariablen t abhängt, also $f = f(x(t), u(t), p)$ gilt, ist von einem *autonomen System* die Rede [46].

An den Anfangszustand $x(0)$ und den Endzustand $x(t_f)$ sind unter Umständen bestimmte Bedingungen geknüpft. Diese werden in den *Randbedingungen* formuliert.

Definition 2.15. (Randbedingungen)

Der Anfangszustand $x(0)$ und der Endzustand $x(t_f)$ des Systems sollen vorgeschriebenen *Randbedingungen*

$$r(x(0), x(t_f)) = 0 \tag{2.7}$$

genügen, wobei $r : \mathbb{R}^{N_x} \times \mathbb{R}^{N_x} \rightarrow \mathbb{R}^{N_r}$ eine stetig differenzierbare Funktion ist. Dabei gilt $N_r \leq 2N_x$.

Für jeden Zeitpunkt $t \in [0, t_f]$ können außerdem Beschränkungen an die Zustände $x(t)$ und Steuerungen $u(t)$ gefordert sein. Diese werden in *Nebenbedingungen* zusammengefasst [46].

Definition 2.16. (Nebenbedingungen)

Der Zustandsvektor $x(t)$ und der Steuervektor $u(t)$ sollen vorgeschriebenen *Nebenbedingungen*

$$g(x(t), u(t), p) \leq 0, \quad t \in [0, t_f]$$

genügen, wobei $g : \mathbb{R}^{N_x} \times \mathbb{R}^{N_u} \times \mathbb{R}^{N_p} \rightarrow \mathbb{R}^{N_g}$ eine hinreichend oft stetig differenzierbare Funktion ist.

Die Beschränkungen können dabei aus Sicherheitsgründen oder physikalischen Bedingungen resultieren. Beispielsweise sollte die Flughöhe eines Flugzeugs immer oberhalb der Erdoberfläche sein. Bei der Fahrzeugsteuerung existiert eine Beschränkung an den Lenkwinkel. Die eingesetzten Schlepperboote können nicht unendlich viel Kraft aufwenden, sondern besitzen in dieser Hinsicht eine Beschränkung.

Das Maß für die „Optimalität“ eines Steuerprozesses ist gegeben durch ein *Zielfunktional*.

Definition 2.17. (Zielfunktional)

Das Funktional

$$I[x, u, p] = \phi(x(0), x(t_f), p) + \int_0^{t_f} f_0(x(t), u(t), p, t) dt \quad (2.8)$$

wird *Zielfunktional* genannt, wobei $\phi : \mathbb{R}^{N_x} \times \mathbb{R}^{N_x} \times \mathbb{R}^{N_p} \rightarrow \mathbb{R}$ und $f_0 : \mathbb{R}^{N_x} \times \mathbb{R}^{N_u} \times \mathbb{R}^{N_p} \times [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionale bezüglich aller Argumente sind.

Ein Auto soll beispielsweise möglichst energieeffizient oder aber möglichst schnell das geplante Manöver durchführen.

Dabei unterscheidet man zwischen der allgemeinen *Bolza-Form* wie in (2.8), der *Lagrange-Form* für $\phi \equiv 0$ und der *Mayer-Form* für $f_0 \equiv 0$. Diese unterschiedlichen Darstellungen sind durch Transformation jeweils äquivalent ineinander überführbar. Solche Transformationen sind unter anderem in [19] explizit ausgeführt. Die Wahl der Formulierung ist abhängig von der vorliegenden Aufgabe. In numerischen Auswertungen wird häufig die Mayer-Formulierung genutzt, während sich für analytische Betrachtungen vermehrt die Lagrange-Formulierung durchgesetzt hat [19].

Bei den in dieser Arbeit zu untersuchenden Steuervorgängen hängt das Funktional $f_0 = f_0(x(t), u(t), p)$ nicht explizit von t ab. Im Folgenden werden deshalb nur diese Art von Zielfunktionalen betrachtet. Gemeinsam mit einer autonomen Dynamik f ergibt sich damit ein *autonomer Steuerprozess* [46].

Das optimale Steuerungsproblem besteht nun darin, den Steuervektor $u(t)$ zu bestimmen, sodass ein vorgegebenes Zielfunktional (2.8) unter Berücksichtigung der Systemdynamik (2.14), der Randbedingungen (2.7) und der Beschränkungen (2.16) für alle Zeitpunkte $t \in [0, t_f]$ minimiert wird [19].

Definition 2.18. (Optimales Steuerungsproblem)

Das Problem

$$\begin{aligned} \min \quad & I[x, u, p] = \phi(x(0), x(t_f), p) + \int_0^{t_f} f_0(x(t), u(t), p, t) dt \\ \text{unter} \quad & \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), p, t), \\ & r(x(0), x(t_f)) = 0, \\ & g(x(t), u(t), p) \leq 0, \quad t \in [0, t_f] \end{aligned} \quad (\text{OCP})$$

heißt *optimales Steuerungsproblem*.

Zur Charakterisierung der Lösungen optimaler Steuerprozesse werden die Begriffe der *Zulässigkeit* und *Optimalität* definiert.

Definition 2.19. (Zulässigkeit und Optimalität)

Erfüllt ein Tupel (x^*, u^*, p^*) mit $x^* : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^{N_x}$ und $u^* : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^{N_u}$ und $p^* \in \mathbb{R}^{N_p}$ die Nebenbedingungen aus (OCP), handelt es sich um eine *zulässige Lösung*. Gilt für diese zulässige Lösung außerdem

$$I[x^*, u^*, p^*] \leq I[x, u, p]$$

für alle zulässigen Lösungen (x, u, p) , dann heißt sie *optimale Lösung*. Dabei bezeichnet x^* die *optimale Trajektorie* und u^* die *optimale Steuerung* des Problems (OCP).

Lösungen von Optimalsteuerungsproblemen genügen ebenso notwendigen und hinreichenden Bedingungen wie Lösungen nichtlinearer Optimierungsprobleme. Als notwendiges Optimalitätskriterium gilt das *Pontryaginsche Minimumprinzip*, detailliert ausgeführt in [19]. Dessen Formulierung und insbesondere auch die der hinreichenden Bedingungen sind mit wesentlich mehr Aufwand verbunden als im Bereich der nichtlinearen Optimierung. Da eine praktische Anwendung dieser Bedingungen zur Lösung von Optimalsteuerungsproblemen (OCP) im Allgemeinen nicht stattfindet und auch in dieser Arbeit darauf verzichtet wird, soll an dieser Stelle nur auf entsprechende Literatur verwiesen werden, in welcher die Bedingungen ausführlicher diskutiert werden. In [19] werden das Minimumprinzip und zusätzliche Erweiterungen und Verallgemeinerungen besprochen, wobei auch die hinreichenden Bedingungen genannt werden.

2.2.2 Äquivalente Formulierung von Steuerprozessen

Wie bereits im vorangegangenen Abschnitt erwähnt, lassen sich einige zunächst unterschiedlich scheinende optimale Steuerprozesse durch äquivalente Transformationen ineinander überführen. Um nur einige zu nennen, lässt sich beispielsweise jeder Steuerprozess in Bolza-Form äquivalent in die Lagrange- und in die Mayer-Form umwandeln [19]. Ebenso können nichtautonome Systeme in autonome Systeme transformiert werden. Weitere äquivalente Formulierungen sind in [19] aufgeführt.

Eine in dieser Arbeit interessante äquivalente Transformation existiert zwischen einem Steuerprozess mit freier und fester Endzeit. Diese Transformation wird im folgenden Abschnitt genauer betrachtet.

2.2.2.1 Transformation einer freien Endzeit auf eine feste Endzeit

Aufgrund der Äquivalenz der Darstellungen werden wir uns im Folgenden auf ein Problem in Mayer-Form beschränken mit $t_0 = 0$ und freier Endzeit t_f . Das Ziel besteht nun darin, das Problem in eines mit fester Endzeit umzuwandeln.

Zunächst wird eine neue Zeitvariable $s \in [0, 1]$ mit $t = st_f$ eingeführt, wobei $t \in [0, t_f]$ die ursprüngliche Zeitvariable darstellt. Außerdem werden neue Zustände und Steuerungen durch

$$\hat{x}(s) := x(st_f) \quad \text{und} \quad \hat{u}(s) := u(st_f) \quad \text{für } s \in [0, 1]$$

definiert. Weiterhin wird eine neue Zustandsvariable eingeführt, die die ursprüngliche freie Endzeit repräsentiert

$$\hat{x}_{n+1}(s) = t_f \quad \text{mit} \quad \frac{d\hat{x}_{n+1}(s)}{ds} = 0 \quad \text{für } s \in [0, 1].$$

Durch Anwendung der Kettenregel erhalten wir außerdem

$$\frac{d\hat{x}(s)}{ds} = \frac{dx(st_f)}{ds} = \frac{dx(t)}{dt} \cdot t_f \quad \text{für } s \in [0, 1].$$

Damit ergibt sich nun der äquivalente Steuerprozess

$$\begin{aligned} \min \quad & I[\hat{x}, \hat{u}, p] = \phi(\hat{x}(0), \hat{x}(1), p) \\ \text{unter} \quad & \begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}(s) \\ \hat{x}_{n+1}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\hat{x}(s), \hat{u}(s), p, s\hat{x}_{n+1}(s))\hat{x}_{n+1}(s) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} r(\hat{x}(0), \hat{x}(1)) \\ \hat{x}_{n+1}(0), \hat{x}_{n+1}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{frei} \end{pmatrix}, \\ & g(\hat{x}(s), \hat{u}(s), p) \leq 0, \quad s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Da der zusätzliche Zustand, welcher die Endzeit repräsentiert, eine konstante Zahl ist, kann dieser auch als ein zusätzlicher freier Parameter in das System aufgenommen werden.

Satz 2.20. (Transformation einer freien Endzeit auf feste Endzeit)

Durch Definition einer neuen Zeitvariablen $s \in [0, 1]$ mit $t = st_f$, Zuständen $\hat{x}(s) = x(st_f)$ und Steuerungen $\hat{u}(s) = u(st_f)$ ergibt sich ein System mit freier Endzeit durch

$$\begin{aligned} \min \quad & I[\hat{x}, \hat{u}, p] = \phi(\hat{x}(0), \hat{x}(1), p) \\ \text{unter} \quad & \dot{\hat{x}}(s) = f(\hat{x}(s), \hat{u}(s), p, st_f)t_f, \\ & r(\hat{x}(0), \hat{x}(1)) = 0, \\ & g(\hat{x}(s), \hat{u}(s), p) \leq 0, \quad s \in [0, 1], \end{aligned}$$

wobei $t_f \in \mathbb{R}_+$ ein weiterer freier Parameter ist.

2.2.3 Lösungsstrategie: Diskretisierung

Zur Lösung von Optimalsteuerungsproblemen der Form (OCP) unterscheidet man zwei unterschiedliche Klassen von Strategien, die *indirekten* und die *direkten Verfahren*. Indirekte Verfahren überführen ein Optimalsteuerungsproblem in ein Mehrpunkttrandwertproblem. Dabei werden die notwendigen Bedingungen der Optimalsteuerungstheorie ausgewertet, um systematisch die Steuerung u aus dem Problem (OCP) zu eliminieren. Die direkten Verfahren hingegen beruhen auf der Idee der Diskretisierung. Die Einsatzmöglichkeiten indirekter gegenüber direkter Verfahren sind in der Regel gering, sodass wir uns in dieser Arbeit auf die direkten Verfahren fokussieren wollen.

Die Idee hinter den direkten Verfahren ist die Diskretisierung der Systemvariablen, um das unendlichdimensionale Optimalsteuerungsproblem (OCP) auf ein nichtlineares Optimierungsproblem (NLP) mit endlich vielen Parametern zurückzuführen [19].

Diskretisierung ist ein wichtiges Hilfsmittel zur Behandlung dynamischer Systeme. Unendlichdimensionale stetige Systeme sollen auf endliche diskrete Systeme reduziert werden, um eine einfache numerische Auswertung möglich zu machen. Das den dynamischen Systemen zugrunde liegende Gebiet wird dazu durch ein nicht notwendigerweise äquidistantes Gitter ersetzt. Nachfolgend wird ausschließlich der eindimensionale Fall mit dem kontinuierlichen Zeitintervall $[0, t_f]$ betrachtet. Dieses wird durch die diskreten Stützstellen

$$0 = t_1 < t_2 < \dots < t_{N_t} = t_f$$

ersetzt. Eine größere Anzahl an *Diskretisierungspunkten* bedeutet im Allgemeinen eine genauere Approximation des Intervalls. Weiterhin werden die Zustands- und Steuerfunktionen durch die approximierten Zustände x^i und Steuerungen u^i zum Zeitpunkt t_i durch

$$\begin{aligned} x^i &\approx (x_1(t_i), \dots, x_{N_x}(t_i))^T = x(t_i) \\ u^i &\approx (u_1(t_i), \dots, u_{N_u}(t_i))^T = u(t_i) \end{aligned}$$

für $i = 1, \dots, N_t$ beschrieben. Damit sind die Zustände und Steuerungen nicht länger auf dem gesamten ursprünglichen Gebiet gegeben, sondern nur noch an den diskreten Gitterpunkten. Zwischen diesen Punkten können sie lediglich approximativ bestimmt werden. Wie bereits erwähnt, wird die Mayer-Form des Zielfunktional für numerische Auswertungen bevorzugt und ist äquivalent zur allgemeinen Form aus (2.8). Durch die diskrete approximative Schreibweise der Zustände und Steuerungen lässt sich die zu minimierende Zielfunktion durch

$$I[x^1, x^{N_t}, p] = \phi(x^1, x^{N_t}, p)$$

darstellen. Das Differentialgleichungssystem wird durch numerische Integrationsverfahren approximiert, wie etwa das *Eulersche Polygonzugverfahren* [64]. Damit erhält man ein *diskretes optimales Steuerungsproblem* zu (OCP). Diese Art der Diskretisierung wird *volle Diskretisierung* genannt.

Definition 2.21. (Diskretes Optimalsteuerungsproblem)

Sei das Zeitintervall $[0, t_f]$ durch die Stützstellen t_i für $i = 1, \dots, N_t$ diskretisiert, wobei $N_t \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Diskretisierungspunkte ist. Weiterhin seien die approximierten Zustände und Steuerungen an diesen Stützstellen jeweils beschrieben durch x^i und u^i . Dann lässt sich ein *diskretes Optimalsteuerungsproblem* mithilfe des *Eulerschen Polygonzugverfahrens* formulieren durch

$$\begin{aligned} \min \quad & I[x^1, x^{N_t}, p] = \phi(x^1, x^{N_t}, p) \\ \text{unter} \quad & x^{i+1} = x^i + (t_{i+1} - t_i)f(x^i, u^i, p), \quad i = 1, \dots, N_t - 1, \\ & r(x^1, x^{N_t}) = 0, \\ & g(x^i, u^i, p) \leq 0, \quad i = 1, \dots, N_t, \end{aligned}$$

wobei x^i, u^i für $i = 1, \dots, N_t$ die freien Optimierungsvariablen bilden.

2.2.4 Softwarebibliothek TransWORHP

Zur Lösung eines Optimalsteuerungsproblems (OCP) hat die AG Optimierung und Optimale Steuerung die Softwarebibliothek TransWORHP entwickelt, welche auf der Biblio-

thek WORHP aus Abschnitt 2.1.5 beruht. Das numerische Lösungsverfahren nutzt die im vorangegangenen Abschnitt diskutierte Diskretisierungsmethode, um das unendlichdimensionale Optimalsteuerungsproblem in ein endlichdimensionales Optimierungsproblem umzuwandeln. Unter Ausnutzung dadurch entstehender sparser Matrixstrukturen kann dieses mithilfe von WORHP effizient gelöst werden [10].

Insbesondere lassen sich mit TransWORHP Probleme lösen, die aus mehreren Phasen zusammengesetzt sind. Dies ermöglicht beispielsweise die gleichzeitige Optimierung sämtlicher Stufen eines Raketenstarts in der Luft- und Raumfahrt. In der Robotik können mehrere zusammenhängende Bahnplanungsprobleme simultan gelöst werden [10]. Neben der Wahl unterschiedlicher Integrationsverfahren oder der adaptiven Zeitgitteranpassung beinhaltet die Bibliothek TransWORHP noch viele weitere Möglichkeiten, um die optimale Lösung eines Steuerungsproblems zu finden. Detaillierte Ausführungen zur Anwendung von TransWORHP finden sich in [8] und [10].

Kapitel 3

Modellierung der Schiffsdynamik und äußeren Kräfte

Zur korrekten Simulation von Schiffsmanövern ist ein mathematisches Modell zur Beschreibung der dynamischen Bewegung des Schiffes unverzichtbar. Die Modellierung kann dabei auf den unterschiedlichsten Vorgehensweisen beruhen, sowohl experimentell als auch theoretisch. Die zwei bekanntesten Ansätze, die dabei verfolgt werden, sind die von Abkowitz (1964) [11] und der *Japanese Mathematical Modeling Group* (kurz JMMG) (1978) [58].

Das sehr formale und systematische Modell von Abkowitz beruht auf der Idee, ein Manöver als Störung eines Gleichgewichts zu betrachten, wobei dieses Gleichgewicht eine Vorwärtsbewegung mit gegebener Geschwindigkeit ist. Unter dieser Annahme stellt er die hydrodynamischen Wechselwirkungen zwischen Schiffsrumpf und Wasser mithilfe einer Taylorapproximation dar. Je nach Wahl des Taylorpolynomgrads kann das Modell beliebig komplex gestaltet werden. Dieses Modell hat sich bereits in vielen experimentellen Anwendungen zur Simulation von Rudermanövern als hilfreich erwiesen, beispielsweise von Strøm-Tejsen und Chislett (1966) [67]. In abgewandelter Form konnte es sogar bei Manövern mit Motoreinsatz angewendet werden, obwohl solche Manöver im Allgemeinen nicht mehr als „kleine“ Störung der konstanten Geradeausfahrt betrachtet werden können [59].

Beim JMMG Modell werden die einzelnen Bestandteile und die daraus resultierenden Effekte separat modelliert. Aus den Teilkräften, hervorgerufen durch beispielsweise Rumpf, Ruder und Propeller, kann dann die Gesamtkraft, die auf das Schiff wirkt, berechnet werden. Auch dieses Modell hat sich bereits in Anwendungen von beispielsweise Matsumoto und Suemitsu (1981) [53] bewährt.

Der Ansatz, den wir in dieser Arbeit verfolgen werden, basiert auf der Idee des JMMG Modells und ist angelehnt an die Modellierung von Oltmann und Sharma [59], wobei wir diese noch erweitern werden. Da wir in dieser Arbeit Schiffe betrachten, die ausschließlich von Schlepperbooten gesteuert werden, können wir die normalerweise in der Modellierung auftauchenden Einflüsse von Ruder und Propeller vernachlässigen und durch eine vereinfachte Modellierung dieser Schlepperkräfte ersetzen. Eine solche Vereinfachung wäre mit dem Ansatz von Abkowitz nicht oder nur schwer möglich. Zusätzlich zu den von

Oltmann und Sharma modellierten hydrodynamischen Rumpfkraften werden wir die aerodynamischen Einflüsse berücksichtigen, da in dieser Arbeit der Einfluss des Windes eine besondere Rolle spielen soll.

Wir werden ein Modell unter den Annahmen herleiten, dass sich das Schiff nur in lokalen Gebieten bewegt, sodass die Krümmung der Erde vernachlässigt werden kann. Ebenso wird dieses Schiff als ein starrer Körper angenommen, der sich in einem Fluid bewegt, welches horizontal und vertikal unbegrenzt ist. Dabei ist das Schiff weder Strömung noch Seegang oder Gezeiten ausgesetzt. Der einzige Umwelteinfluss auf das Schiff ist ein konstanter Wind. Ebenfalls werden andere Schiffe oder Objekte im Wasser ignoriert, die Wellen hervorrufen oder zu Abschirmeffekten aufgrund des Windes führen könnten. Weiterhin wird bezüglich des Schiffes eine Backbord-Steuerbord-Symmetrie angenommen, was zumindest approximativ für den Großteil der üblichen Marineschiffe eine gerechtfertigte Annahme ist [11].

Die Modellierung der Dynamik von Schiffen kann in die zwei Gebiete der Kinematik und der Kinetik aufgeteilt werden. Während sich die Kinematik ausschließlich mit den geometrischen Aspekten der Bewegung befasst, wird im Gebiet der Kinetik der Einfluss von Kräften auf die Bewegung analysiert. Im folgenden Abschnitt befassen wir uns zunächst mit der Betrachtung der Kinematik von Schiffen. Damit einhergehend werden die betrachteten Bezugssysteme eingeführt und die kinematischen Bewegungsgleichungen hergeleitet. Anschließend folgt in Abschnitt 3.2 die Untersuchung der Kinetik des Schiffes und damit die Herleitung der kinetischen Bewegungsgleichungen. In Abschnitt 3.3 werden die auf das Schiff wirkenden Kräfte erläutert und modelliert. Schließlich werden die Bewegungsgleichungen und die Kräfte Modelle in Abschnitt 3.4 zu einem Gesamtsystem zusammengeführt.

3.1 Kinematik

Das Gebiet der Kinematik befasst sich mit den geometrischen Aspekten, die mit der Bewegung eines Körpers einhergehen, ohne dabei dessen Masse oder die auf ihn wirkenden Kräfte zu berücksichtigen. Ziel dieses Abschnittes ist die Einführung der wichtigen Bewegungsgrößen und die Herleitung der kinematischen Bewegungsgleichungen. In diesem Zusammenhang werden in Abschnitt 3.1.1 die betrachteten Bezugssysteme näher erläutert. Anschließend werden die Variablen, die die Bewegung bezüglich der Systeme beschreiben, in Abschnitt 3.1.2 allgemein definiert. Im Anschluss daran wird unter der Annahme, dass sich das betrachtete Schiff nur in der Horizontalebene bewegt, in Abschnitt 3.1.3 die Reduzierung auf ein zweidimensionales Modell eingeführt. Zum Abschluss des Kapitels wird in Abschnitt 3.1.4 die kinematische Transformation genutzt, um die Variablen zueinander in Beziehung zu setzen und damit die kinematischen Bewegungsgleichungen zu formulieren.

3.1.1 Bezugssysteme

Zur vollständigen Bestimmung der Position und Orientierung eines Schiffes, welches sich auf hoher See bewegt, sind sechs unabhängige Koordinaten notwendig. Drei Koordi-

naten und deren zeitliche Ableitung legen die Position des Schiffes und die Translationsgeschwindigkeiten bezüglich drei zueinander orthogonaler Achsen fest. Drei weitere Koordinaten und deren zeitliche Ableitungen werden benötigt, um die Orientierung des Schiffes und seine Rotationsgeschwindigkeit bezüglich dieser Achsen zu ermitteln. Um die Koordinaten hinreichend beschreiben zu können, werden zwei verschiedene Bezugssysteme eingeführt, ein globales Inertialsystem und ein schiffsgebundenes lokales Koordinatensystem.

Das *North-East-Down* (NED)-Koordinatensystem (*n*-System) ist relativ zum Referenzellipsoiden (World Geodetic System, 1984 [66]) der Erde definiert. Dabei handelt es sich um ein geodätisches Referenzsystem zur einheitlichen Angabe von Positionen auf der Erde und dient insbesondere als Grundlage zur Berechnung der GPS-Koordinaten [62]. Aufgrund der Krümmung der Erde wird das NED-Koordinatensystem üblicherweise als eine Tangentialebene definiert, die sich auf der Oberfläche dieses Ellipsoiden gemeinsam mit dem Schiff bewegt. Für Schiffe, die sich in lokalen Gebieten bewegen, beispielsweise in Häfen, kann approximativ eine feste Tangentialebene zur Navigation genutzt werden. Diese Arbeit beschäftigt sich hauptsächlich mit der Untersuchung von Schiffsbewegungen in lokalen Gebieten, sodass wir im Folgenden von einem festen Ursprung des NED-Koordinatensystems ausgehen können, welcher an geeigneter Stelle auf der Oberfläche des Ellipsoiden gewählt wird [31]. Wie der Name bereits vermuten lässt, zeigt die positive x -Achse des Systems in Richtung des wahren Nordens, die positive y -Achse in Richtung Osten und die positive z -Achse zeigt senkrecht zur Tangentialebene in Richtung Erdinneres und vervollständigt damit das Rechtssystem. Weiterhin kann angenommen werden, dass es sich bei dem NED-System um ein Inertialsystem handelt, da die Geschwindigkeit von Marineschiffen gering genug ist, sodass die Kräfte, die aufgrund der Erdrotation auftreten, im Gegensatz zu den wirkenden hydrodynamischen Kräften vernachlässigt werden können. Es gelten damit insbesondere die Newtonschen Gesetze [32]. Im Gegensatz dazu ist es in Navigationsanwendungen im Kontext der Raumfahrt üblich, sternengebundene Systeme oder solche zu nutzen, die die Erdrotation berücksichtigen [23].

Das erdgebundene NED-System wird zur Bestimmung der globalen Position des Schiffes genutzt. Zur Beschreibung der Schiffsbewegung wird standardmäßig ein weiteres, schiffsgebundenes Koordinatensystem eingeführt. Die Wahl dieses Systems richtet sich dabei nach seinem Zweck, der Beschreibung der Bewegungsgleichungen. Schiffe besitzen im Allgemeinen eine Backbord-Steuerbord-Symmetrie, sodass eine Symmetrieebene entlang der Längsachse existiert. Diese Symmetrie wollen wir bei der Definition des Koordinatensystems ausnutzen, indem zwei der drei Koordinatenachsen in der Symmetrieebene gewählt werden, die dritte Achse steht senkrecht auf dieser Ebene. An Symmetrieebenen orientierte Koordinatenachsen liegen in den meisten Fällen parallel zu den Hauptträgheitsachsen, sodass sich die Bewegungsgleichungen durch diese Wahl stark vereinfachen [11]. Das schiffsgebundene Koordinatensystem (*b*-System) wählen wir demnach folgendermaßen: Die positive x -Achse zeigt in Richtung Bug, die positive y -Achse in Richtung Steuerbord und die positive z -Achse in Richtung Schiffsboden. Die Koordinatenachsen bilden dementsprechend ein Rechtssystem [32]. Der Koordinatenursprung liegt innerhalb der bereits erwähnten Symmetrieebene. Er entspricht nicht zwangsläufig dem Schwerpunkt $G(x_G, y_G, z_G)$, allerdings nehmen wir an, dass der Schwerpunkt ebenfalls in dieser

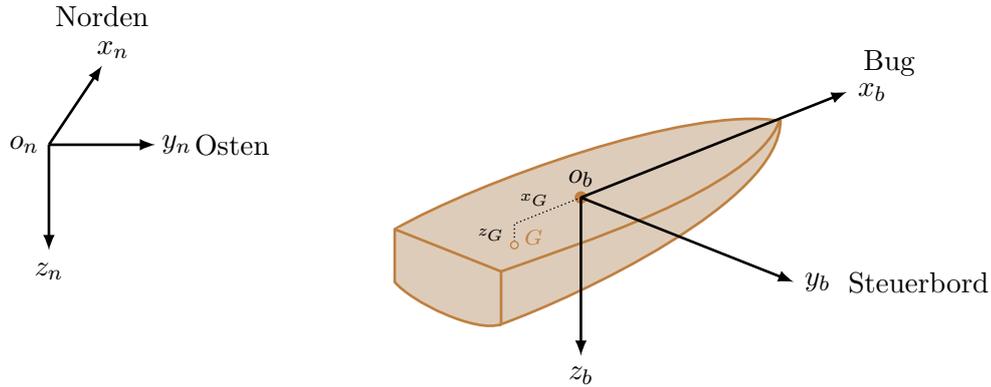


Abbildung 3.1: Erdgebundenes Koordinatensystem (n -System) und schiffsgebundenes Koordinatensystem (b -System) mit Ursprung o_b und Schwerpunkt $G(x_G, 0, z_G)$.

Symmetrieebene liegt, sodass $y_G = 0$ gilt [31]. Die beiden Koordinatensysteme werden in Abbildung 3.1 kompakt zusammengefasst.

3.1.2 Systemvariablen

Die Pose, das heißt die Position und die Orientierung, des Schiffes wird angegeben durch die Pose des b -Systems relativ zum n -System. Die relative Position ergibt sich dabei durch die Koordinaten vom Ursprung des b -Systems im n -System durch $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Die Orientierung des b -Systems relativ zum n -System wird mithilfe von Eulerwinkeln eindeutig bestimmt. Dabei wird das n -System nacheinander mit den drei Eulerwinkeln um die Koordinatenachsen gedreht. Die Drehfolgen und genutzten Koordinatenachsen sind in der Schifffahrt genormt und werden der Gruppe der Tait-Bryan-Drehungen zugeordnet. In dieser Norm ist die intrinsische Drehfolge $z - y' - x''$ sowie die Bezeichnung der Eulerwinkel (φ, θ, ψ) als Roll-, Nick- und Gierwinkel vorgeschrieben. Intrinsisch bedeutet dabei, dass bei jeder Drehung um die jeweils neu entstandenen Koordinatenachsen gedreht wird. Im Detail bedeutet dies, dass das n -System zunächst mit dem Gierwinkel ψ um die z -Achse gedreht wird. Das gedrehte System wird im Anschluss daran mit dem Nickwinkel θ um die y -Achse gedreht. Zuletzt wird das nochmals gedrehte System mit dem Rollwinkel φ um die x -Achse gedreht. Die relative Orientierung des schiffsgebundenen b -Systems zum n -System wird damit angegeben durch die drei Eulerwinkel $(\varphi, \theta, \psi) \in [0, 2\pi)^3$ [31].

Definition 3.1. (Positions-Orientierungsvektor)

Seien $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ die Koordinaten des Ursprungs vom schiffsgebundenen b -System bezüglich des globalen n -Systems. Seien weiterhin $(\varphi, \theta, \psi) \in [0, 2\pi)^3$ die Eulerwinkel des b -Systems relativ zum n -System. Dann wird durch den *Positions-Orientierungsvektor*

$$\eta = (x_0, y_0, z_0, \varphi, \theta, \psi)^T$$

die Pose des Schiffes im n -System eindeutig definiert.

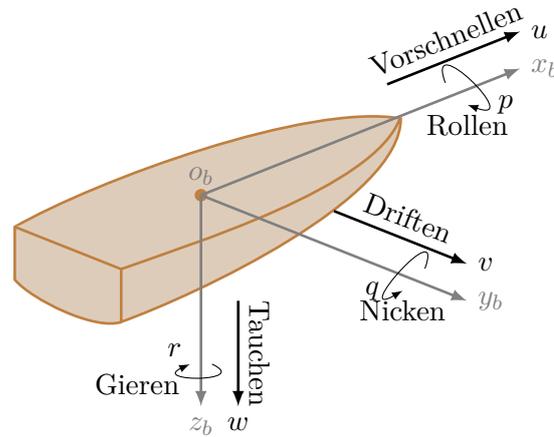


Abbildung 3.2: Sechs Freiheitsgrade: Drei Translationen und drei Rotationen in Richtung der Koordinatenachsen des b -Systems mit den zugehörigen Translationsgeschwindigkeiten u, v, w und Rotationsgeschwindigkeiten p, q, r .

Die translativen Bewegungen des Schiffes entlang der drei schiffsgebundenen Koordinatenachsen werden in der Schifffahrt mit Vorschnellen, Driften und Tauchen bezeichnet. Dabei wird durch u die Vorschnell-, v die Drift- und w die Tauchgeschwindigkeit beschrieben. Ebenso werden Rotationen des Schiffes um die drei Koordinatenachsen, wie oben bereits erwähnt, als Rollen, Nicken und Gieren bezeichnet, mit den zugehörigen Winkelgeschwindigkeiten p, q und r [31]. In Abbildung 3.2 werden diese Geschwindigkeiten dargestellt.

Definition 3.2. (Verallgemeinerter Geschwindigkeitsvektor)

Seien $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ die translativen Geschwindigkeiten des Schiffes bezüglich des schiffsgebundenen b -Systems und $(p, q, r) \in \mathbb{R}^3$ die entsprechenden Rotationsgeschwindigkeiten. Dann wird durch den *verallgemeinerten Geschwindigkeitsvektor*

$$\nu = (u, v, w, p, q, r)^T$$

die Geschwindigkeit des Schiffes relativ zum b -System vollständig beschrieben.

3.1.3 Reduzierung auf drei Freiheitsgrade

Im Folgenden wird die grundlegende Annahme getroffen, dass die Tauch-, Roll- und Nickbewegungen des Schiffes entweder vernachlässigbar sind oder von den Vorschnell-, Drift- und Gierbewegungen getrennt betrachtet werden können. Eine solche Annahme finden wir in der Literatur häufig, beispielsweise in [59]. Die eigentlichen sechs Freiheitsgrade der Bewegung des Schiffes werden an dieser Stelle auf die drei Freiheitsgrade Vorschnellen, Driften und Gieren reduziert. Die vollständige Bewegung des Schiffes findet damit in einer Horizontalebene statt. Die gesamte Modellierung kann aufgrund dessen auf eine zweidimensionale Darstellung reduziert werden.

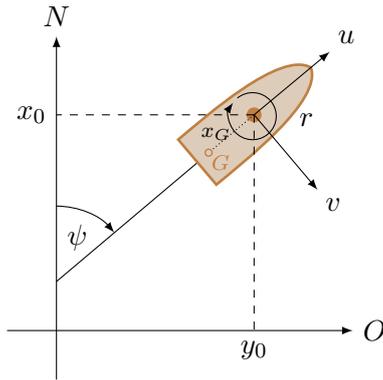


Abbildung 3.3: Koordinatensysteme beim 2D Modell.

Ebenso wie im dreidimensionalen Fall betrachten wir ein erdgebundenes zweidimensionales Inertialsystem, dessen positive x -Achse in Richtung des wahren Nordens zeigt und positive y -Achse in Richtung Osten. Es wird außerdem ein schiffsgebundenes Koordinatensystem betrachtet, dessen x -Achse entlang der Symmetrieachse (Längsachse) verläuft und in Richtung des Bugs zeigt. Die y -Achse verläuft entlang der Querachse und zeigt in Richtung Steuerbord. Der Ursprung des schiffsgebundenen Koordinatensystems muss auch hier nicht zwangsläufig mit dem Schwerpunkt des Schiffes übereinstimmen. Allerdings nehmen wir erneut aufgrund der Backbord-Steuerbord-Symmetrie an, dass sich der Schwerpunkt auf der Längsachse des Schiffes befindet. Damit besitzt dieser die Koordinaten $G(x_G, 0)$ im schiffsgebundenen System.

Die Einschränkung auf die horizontalen Schiffsbewegungen hat zur Folge, dass zur vollständigen Beschreibung der Position und der Orientierung des Schiffes neben den Koordinaten (x_0, y_0) in der Ebene nur noch der Gierwinkel ψ von Interesse ist. Der Positions-Orientierungsvektor reduziert sich damit auf

$$\eta = (x_0, y_0, \psi)^T.$$

Da die Schiffsbewegung auf das Vorschnellen, Driften und Gieren reduziert wurde, ergibt sich der neue verallgemeinerte Geschwindigkeitsvektor durch

$$\nu = (u, v, r)^T.$$

In Abbildung 3.3 wird das zweidimensionale Modell kompakt dargestellt.

Im Kontext der Schiffsmanövrierung im Modell mit drei Freiheitsgraden spielen neben diesen grundlegenden Systemvariablen auch die Begriffe *Kurs*- und *Driftwinkel* eine bedeutende Rolle. In der Literatur werden die Begriffe Kurs und Orientierung fälschlicherweise oft als Synonyme genutzt, obwohl sie zwei unterschiedliche Winkel beschreiben. Um einem solchen Irrtum entgegenzuwirken, werden die Begriffe an dieser Stelle formal definiert.

Bezeichne dazu den Bewegungsvektor des Schiffes in der Ebene mit $U_{\text{res}} = (u, v)^T$.

Definition 3.3. (Kurswinkel)

Der *Kurs* χ ist der Winkel zwischen der x_n -Achse des erdgebundenen n -Systems und dem Bewegungsvektor U_{res} des Schiffes.

Definition 3.4. (Driftwinkel)

Der *Driftwinkel* β ist der Winkel zwischen der x_b -Achse des schiffsgebundenen b -Systems und dem Bewegungsvektor U_{res} des Schiffes.

Mit diesen Definitionen lässt sich nun der Unterschied zwischen dem Kurs χ und der Orientierung ψ des Schiffes ausmachen. Es gilt der Zusammenhang

$$\chi = \psi + \beta,$$

was anhand der Abbildung 3.4 leicht einzusehen ist. Ebenfalls lässt sich daraus die Berechnung des Driftwinkels durch die Gleichungen

$$\sin \beta = \frac{v}{|U_{\text{res}}|} \quad \text{und} \quad \cos \beta = \frac{u}{|U_{\text{res}}|}$$

erklären [31].

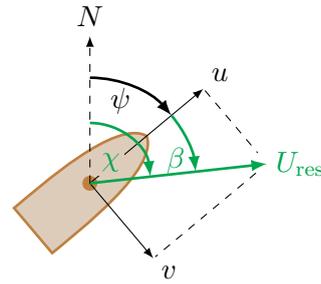


Abbildung 3.4: Kurswinkel χ und Driftwinkel β bei resultierendem Geschwindigkeitsvektor U_{res} .

3.1.4 Kinematische Bewegungsgleichungen

Die eingeführten Variablen zur Beschreibung der Bewegung eines Schiffes sollen nun miteinander in Beziehung gesetzt werden, um die kinematischen Bewegungsgleichungen herzuleiten. In diesem Abschnitt werden die Bewegungsgleichungen für das auf drei Freiheitsgrade reduzierte Modell betrachtet. Eine Herleitung für ein Schiff mit sechs Freiheitsgraden ist beispielsweise in [31] zu finden.

Um die Bewegung des Schiffes in der Ebene mit der Zeit zu beschreiben, muss der Zusammenhang zwischen Pose und Geschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt definiert werden. Bezeichne mit $(\dot{x}_0, \dot{y}_0)^T$ die zeitliche Veränderung der Position des Schiffes im n -System. Ebenso wird per Definition durch $(u, v)^T$ die zeitliche Veränderung der Position des Schiffes im b -System beschrieben. Da es sich um zwei zweidimensionale Koordinatensysteme handelt, wobei das b -System gegenüber dem n -System um den Gierwinkel ψ rotiert ist, lassen sich die Geschwindigkeitsvektoren mithilfe der Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} = R(\psi) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \text{mit } R(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \in \text{SO}(2)$$

ineinander überführen, wobei $R(\psi)$ die Rotation im \mathbb{R}^2 um den Winkel ψ beschreibt. Weiterhin wird mit $\text{SO}(2) \subset \mathbb{R}^2$ die spezielle orthogonale Gruppe bezeichnet, die alle Rotationen in der zweidimensionalen Ebene enthält. Die zeitliche Änderung des einzig übrigen Eulerwinkels $\dot{\psi}$ und die Giergeschwindigkeit r stimmen überein, da sich beide Koordinatensysteme in einer Ebene befinden und die Rotationsachsen somit parallel zueinander liegen.

Satz 3.5. (Kinematische Bewegungsgleichungen)

Betrachte die Bewegung in der zweidimensionalen Horizontalebene. Sei $\eta = (x_0, y_0, \psi)^T \in \mathbb{R}^2 \times [0, 2\pi)$ die Pose des Schiffes im n -System und $\nu = (u, v, r)^T \in \mathbb{R}^3$ der verallgemeinerte Geschwindigkeitsvektor. Dann lauten die *kinematischen Bewegungsgleichungen*

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= u \cos \psi - v \sin \psi \\ \dot{y}_0 &= u \sin \psi + v \cos \psi \\ \dot{\psi} &= r \end{aligned}$$

beziehungsweise in Matrixschreibweise

$$\dot{\eta} = \bar{R}(\psi)\nu, \quad \text{mit } \bar{R}(\psi) = \begin{pmatrix} R(\psi) & 0 \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \in \text{SE}(2), \quad (3.1)$$

wobei $\bar{R}(\psi)$ die Rotation $R(\psi)$ in homogenen Koordinaten darstellt und durch

$$\text{SE}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} R & p \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} : p \in \mathbb{R}^2, R \in \text{SO}(2) \right\}$$

die spezielle euklidische Gruppe bezeichnet wird [63].

3.2 Kinetik

Das Gebiet der Kinetik befasst sich mit der Beschreibung der Veränderung der Bewegungsgrößen, die mit der Einwirkung von Kräften einhergehen, und berücksichtigt in diesem Kontext auch die Masse der bewegten Körper. Ziel dieses Abschnitts ist die Herleitung der kinetischen Bewegungsgleichungen. Wir werden dazu im Folgenden das Schiff als einen Starrkörper annehmen. Zwei beliebige Punkte des Schiffes haben unabhängig von den äußeren Kräften immer denselben Abstand zueinander. Damit werden Verformungen wie Durchbiegung, die äußere Kräfte möglicherweise hervorrufen könnten, ausgeschlossen. Der Vorteil dieser Annahme liegt in der Tatsache, dass zwischen einzelnen Massenpunkten des Körpers keine Kräfte wirken [28]. Dies ist eine in der Literatur gängige Annahme und wird beispielsweise in [31] getroffen.

Wie bereits in der Kinematik in Abschnitt 3.1.3 diskutiert, betrachten wir eine zweidimensionale Bewegungsebene. Auf das Schiff wirken äußere Kräfte und Kraftmomente, zu deren Beschreibung der verallgemeinerte Kraftvektor genutzt wird.

Definition 3.6. (Verallgemeinerter Kraftvektor)

Betrachte die Bewegung eines Schiffes in der zweidimensionalen Horizontalebene. Der *verallgemeinerte Kraftvektor*

$$F = (X, Y, N)^T$$

beschreibt die Kräfte und Kraftmomente, die von außen auf das Schiff wirken. Die Komponenten X und Y beschreiben die Kraft entlang der x - und y -Achse des jeweils betrachteten Systems, die Komponente N das wirkende Moment.

Bezeichne die äußeren Kräfte bezüglich des n -Systems mit (X_0, Y_0) und bezüglich des b -Systems mit (X, Y) . Das Moment ist dabei unabhängig vom gewählten Koordinatensystem, da unsere betrachtete Modellierung zweidimensional ist. Das Ziel ist nun die Modellierung der Bewegung des Schiffes, die aus der Wirkung der äußeren Kräfte resultiert. Für eine Modellierung der Gleichungen im Fall der dreidimensionalen Bewegung sei an dieser Stelle auf [31] verwiesen.

Die Herleitung ist in zwei Abschnitte gegliedert und hält sich damit nah an der Struktur aus [61]. Zunächst werden die Bewegungsgleichungen unter der Annahme hergeleitet,

dass der Ursprung des schiffsgebundenen Koordinatensystems mit dem Schwerpunkt des Schiffes übereinstimmt. In der Anwendung der Schifffahrt ist es allerdings wünschenswert, die Bewegungsgleichungen bezüglich eines beliebigen Koordinatenursprungs herzuleiten, um Vorteile aus eventuellen geometrischen Schiffseigenschaften zu ziehen. Die Gleichungen, die unter der erwähnten Annahme hergeleitet wurden, können wir dann auf den Fall eines beliebigen Ursprungs erweitern.

Starten wir also mit der Annahme, dass der Ursprung des b -Systems im Schwerpunkt liegt. Alle Größen, die auf dieser Annahme beruhen, werden im Folgenden mit einem hochgestellten s markiert. Der Schwerpunktsatz besagt, dass sich der Massenschwerpunkt eines Systems so bewegt, als ob die Gesamtmasse in ihm vereinigt wäre und alle äußeren Kräfte und Momente direkt an ihm angriffen. Die Position des Schiffes wird im erdgebundenen n -System durch die Koordinaten des Ursprungs des b -Systems

$$(x_0^s, y_0^s) = (x_G, y_G)$$

angegeben, welche den Koordinaten des Schwerpunktes G entsprechen. Damit beschreiben $(\dot{x}_0^s, \dot{y}_0^s)$ und $(\ddot{x}_0^s, \ddot{y}_0^s)$ die Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung des Schwerpunktes, angegeben im n -System. Ebenso wird die Orientierung des Schiffes durch ψ^s angegeben, mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}^s$ und der Winkelbeschleunigung $\ddot{\psi}^s$. Da das n -System ein Inertialsystem ist, gelten dort die Newtonschen Gesetze. Das zweite dieser Gesetze setzt die Masse m des Schiffes, die Beschleunigung des Schwerpunktes und die äußeren Kräfte in die Beziehung

$$\begin{pmatrix} X_0^s \\ Y_0^s \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \ddot{x}_0^s \\ \ddot{y}_0^s \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

zueinander. Diese Beziehung beschreibt, wie die äußeren Kräfte die Translationsgeschwindigkeit des Schiffes verändern. Weiterhin besagt der Drehimpulssatz, dass das resultierende äußere Moment N eine Veränderung der Winkelgeschwindigkeit um die durch den Schwerpunkt verlaufende senkrecht auf der Bewegungsebene stehende Hauptträgheitsachse bewirkt. Dieser Zusammenhang wird beschrieben durch

$$N^s = I_z^s \ddot{\psi}^s \quad (3.3)$$

mit dem Trägheitsmoment I_z^s des Schiffes bezüglich der erwähnten Hauptträgheitsachse [28].

Im Kontext der Kinematik haben wir uns unter anderem mit der Koordinatentransformation zwischen dem n -System und dem b -System beschäftigt. Durch Anwendung der Inversen Transformation können wir den Kraftvektor $(X_0^s, Y_0^s)^T$ bezüglich des n -Systems in den Kraftvektor $(X^s, Y^s)^T$ bezüglich des b -Systems umwandeln durch

$$\begin{pmatrix} X^s \\ Y^s \end{pmatrix} = R^T(\psi^s) \begin{pmatrix} X_0^s \\ Y_0^s \end{pmatrix}.$$

Das Moment N^s bleibt unter einer solchen Koordinatentransformation unverändert. Einsetzen der obigen Resultate aus dem Newtonschen Gesetz (3.2) ergibt den Zusammenhang

$$\begin{pmatrix} X^s \\ Y^s \end{pmatrix} = m R^T(\psi^s) \begin{pmatrix} \ddot{x}_0^s \\ \ddot{y}_0^s \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Die bereits hergeleiteten kinematischen Bewegungsgleichungen gelten unabhängig von der Lage des Schwerpunkts. Wir erinnern uns an die in (3.1) gezeigten Gleichungen

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_0^s \\ \dot{y}_0^s \end{pmatrix} = R(\psi^s) \begin{pmatrix} u^s \\ v^s \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\psi}^s = r^s.$$

Mithilfe der Produkt- und Kettenregel können die Gleichungen abgeleitet werden durch

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_0^s \\ \ddot{y}_0^s \end{pmatrix} = R(\psi^s) \begin{pmatrix} \dot{u}^s \\ \dot{v}^s \end{pmatrix} + \dot{\psi}^s R'(\psi^s) \begin{pmatrix} u^s \\ v^s \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \ddot{\psi}^s = \dot{r}^s,$$

wobei mit $R'(\psi^s)$ die komponentenweise Ableitung der Rotationsmatrix nach ψ^s gemeint ist. Setzen wir die Gleichungen gemeinsam mit $\dot{\psi}^s = r^s$ in (3.4) und (3.3) ein, ergibt sich

$$\begin{pmatrix} X^s \\ Y^s \end{pmatrix} = m \left(\begin{pmatrix} \dot{u}^s \\ \dot{v}^s \end{pmatrix} + r^s R^T(\psi^s) R'(\psi^s) \begin{pmatrix} u^s \\ v^s \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad N^s = I_z^s \dot{r}^s$$

aus der Orthogonalität der Rotationsmatrix $R(\psi^s)$. Ausmultiplizieren der Matrizen ergibt schließlich

$$\begin{pmatrix} X^s \\ Y^s \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \dot{u}^s - r^s v^s \\ \dot{v}^s + r^s u^s \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N^s = I_z^s \dot{r}^s, \quad (3.5)$$

wobei dabei die Gleichheit

$$R^T(\psi^s) R'(\psi^s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

nachgerechnet und genutzt wird. Damit haben wir nun die Bewegungsgleichungen für den Fall hergeleitet, dass der Koordinatenursprung des schiffsgebundenen b -Systems und der Schwerpunkt des Schiffes übereinstimmen. Wir wollen daraus den allgemeineren Fall ableiten. Die bereits im Abschnitt der Kinematik angesprochenen Vorteile der Backbord-Steuerbord-Symmetrie sollen weiterhin genutzt werden, sodass wir annehmen, dass sich sowohl Schwerpunkt als auch Koordinatenursprung auf der Längsachse des Schiffes befinden. Damit besitzt der Schwerpunkt die Koordinaten $G(x_G, 0)$ im b -System. Für eine Herleitung der Gleichungen für einen Schwerpunkt mit allgemeinen Koordinaten (x_G, y_G) siehe beispielsweise [31] oder [11].

Das schiffsgebundene Koordinatensystem liegt also, im Gegensatz zum zuvor betrachteten System, entlang der Längsachse verschoben. Insbesondere besitzen beide Systeme dieselbe Orientierung relativ zum n -System. Eine Kraft wird eindeutig bestimmt durch ihren Betrag, ihre Richtung und ihren Angriffspunkt. Die Betrachtung des neuen Systems verändert keine dieser drei Größen, sodass keine Veränderung der äußeren Kräfte auftritt

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^s \\ Y^s \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Anders sieht es bei dem Moment N aus, welches im Koordinatenursprung o_b wirkt. Zur Verdeutlichung schauen wir uns Abbildung 3.5 an. Die Kräfte (roter Pfeil) greifen im Schwerpunkt an, sodass der Weg zwischen dem Schwerpunkt und dem Koordinatenursprung einen Hebelarm darstellt. Das Moment N setzt sich zusammen aus dem Moment N^s , welches im Schwerpunkt wirkt, und dem Moment, welches durch die Krafteinwirkung von (X, Y) auf diesen Hebelarm entsteht. Aufgrund der Lage des Schwerpunkts wirkt die Kraft X parallel zum Hebelarm und bewirkt deshalb kein Moment. Die Kraft Y allerdings wirkt senkrecht auf den Hebelarm der Länge x_G , woraus ein Moment resultiert. Wirkt die Kraft Y wie abgebildet in die positive y -Richtung des b -Systems und ist x_G ebenfalls positiv, bewirkt dies ein Moment im Uhrzeigersinn, also ein positives Moment. Damit ergibt sich insgesamt die Darstellung des im Ursprung wirkenden Moments durch

$$N = N^s + x_G Y. \quad (3.7)$$

Mithilfe des Steinerschen Satzes können Trägheitsmomente eines starren Körpers für parallel verschobene Drehachsen berechnet werden [28]. Damit lässt sich das Trägheitsmoment I_z der um x_G parallel verschobenen Drehachse durch den Ursprung berechnen durch

$$I_z = I_z^s + m x_G^2. \quad (3.8)$$

Die Rotationsgeschwindigkeit bezüglich parallel verschobener Drehachsen ist identisch, sodass sich

$$r = r^s \quad (3.9)$$

ergibt. Die translative Geschwindigkeit des Schiffes im Ursprung setzt sich zusammen aus der translativen Geschwindigkeit im Schwerpunkt und der Geschwindigkeit des Ursprungs relativ zum Schwerpunkt. Da sowohl der Ursprung als auch der Schwerpunkt zwei feste Punkte auf dem Schiff sind, kann die relative Geschwindigkeit nur durch eine Rotation hervorgerufen werden. Da der Schwerpunkt auf der x -Achse des b -Systems liegt, kann dabei keine relative Geschwindigkeit in Längsrichtung entstehen, es folgt

$$u = u^s. \quad (3.10)$$

Um die Driftgeschwindigkeit zu untersuchen, schauen wir uns Abbildung 3.6 an. Eine positive Rotationsgeschwindigkeit r im Koordinatenursprung bewirkt eine Driftgeschwindigkeit im Schwerpunkt (roter Pfeil), abhängig vom Hebelarm x_G . Diese zusätzliche Driftgeschwindigkeit entspricht der Umlaufgeschwindigkeit eines Punktes auf einer Kreisbahn mit Radius x_G und Winkelgeschwindigkeit r . Damit ergibt sich eine negative relative Driftgeschwindigkeit des Ursprungs

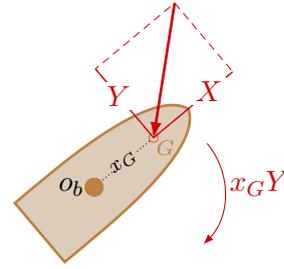


Abbildung 3.5: Am Schwerpunkt G angreifende Kraft bewirkt durch den Hebelarm x_G ein zusätzliches Moment $x_G Y$.

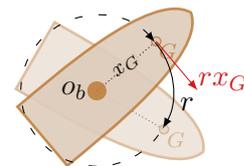


Abbildung 3.6: Rotationsgeschwindigkeit r im Ursprung bewirkt eine zusätzliche Driftgeschwindigkeit $r x_G$ im Schwerpunkt.

relativ zum Schwerpunkt, woraus

$$v = v^s - r x_G \quad (3.11)$$

folgt. Einsetzen der Gleichungen (3.6)-(3.11) in die kinetischen Gleichungen bezüglich des Schwerpunkts (3.5), anschließendes Umstellen und Vereinfachen liefert schließlich die kinetischen Gleichungen für den hier angenommenen allgemeineren Fall.

Satz 3.7. (Kinetische Bewegungsgleichungen)

Betrachte die Bewegung in der zweidimensionalen Horizontalebene, wobei der Ursprung des schiffsgebundenen b -Systems auf der Längsachse des Schiffes gewählt wird. Der Massenschwerpunkt besitzt die lokalen Koordinaten $G(x_G, 0)$. Sei außerdem $\nu = (u, v, r)^T$ der verallgemeinerte Geschwindigkeitsvektor des Schiffes und $F = (X, Y, N)^T$ der verallgemeinerte Kraftvektor. Dann lauten die *kinetischen Bewegungsgleichungen*

$$\begin{aligned} X &= m(\dot{u} - rv - r^2 x_G) \\ Y &= m(\dot{v} + ru + \dot{r} x_G) \\ N &= I_z \dot{r} + x_G m(\dot{v} + ru). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Für den Fall, dass der Schwerpunkt auch in der y -Koordinate vom Ursprung des lokalen Koordinatensystems abweicht, ergäben sich hier zusätzliche Terme, abhängig von der y -Koordinate y_G . Dafür sei an dieser Stelle auf [31] verwiesen.

3.3 Äußere Kräfte

Die auf das Schiff wirkenden äußeren Kräfte müssen modelliert und untersucht werden, um die Schiffsbewegung in seiner Gänze analysieren zu können. Wir nehmen an dieser Stelle an, dass sich das Schiff in einem ungestörten Gewässer bewegt, wobei es weder Seegang noch Gezeiten oder Strömung ausgesetzt ist. Das Gewässer sei horizontal unbegrenzt und besitze eine gleichmäßige Tiefe. Aufgrund dieser Gleichmäßigkeit des Gewässers wirken äußere Kräfte unabhängig von der Position (x_0, y_0) und Orientierung ψ des Schiffes. Wir können die dynamischen Bewegungsgleichungen (3.12) deshalb völlig losgelöst von den kinematischen Gleichungen (3.1) betrachten.

Das Ziel dieses Abschnitts ist die Modellierung der äußeren Kräfte. Fluiddynamische Kräfte wirken auf bewegte Körper in Fluiden. Auf den in das Wasser eingetauchten Teil des Schiffsrumpfes wirken hydrodynamische Kräfte, während auf den übrigen Teil aerodynamische Kräfte wirken. Dazu werden in den Abschnitten 3.3.1 und 3.3.2 zunächst die wirkenden hydrodynamischen und aerodynamischen Kräfte genauer erläutert und geeignet modelliert. Da wir in dieser Arbeit von einem Schiff ausgehen, welches von Schlepperbooten gesteuert wird und dabei weder sein eigenes Ruder noch Propeller nutzt, werden wir in der nachfolgenden Modellierung der einzelnen Kraftkomponenten nicht auf die Kräfte eingehen, die mit Ruder und Propeller einhergehen. Abschließend wird allerdings in Abschnitt 3.3.3 eine sehr stark vereinfachte Modellierung der Kräfte, die die Schlepperboote auf das Schiff ausüben, vorgestellt.

3.3.1 Hydrodynamische Kräfte

Auf den in das Wasser eingetauchten Teil des Schiffsrumpfes wirken hydrodynamische Kräfte, falls das Schiff in Bewegung ist. Der Hauptbestandteil dieser Kräfte ist die zusätzliche Masse, welche im folgenden Abschnitt 3.3.1.1 diskutiert wird. Weitere Rumpfkkräfte wie der Rumpfwiderstand, hervorgerufen durch eine Bewegung in Längsrichtung des Schiffes, und der dynamische Auftrieb und Profilwiderstand, hervorgerufen durch Drift- und Gierbewegungen, werden in Abschnitt 3.3.1.2 erläutert und modelliert.

In nahezu jedem Schiff ist eine Backbord-Steuerbord-Symmetrie vorzufinden. Die einzige Asymmetrie, die einen hydrodynamisch relevanten Effekt hervorruft, wird durch einen einseitig genutzten Propeller verursacht. Da unser Schiff seinen Propeller nicht nutzt, kann dieser Effekt vernachlässigt werden. Die in diesem Abschnitt betrachteten Kräfte wurden unter der Annahme einer solchen Steuerbord-Backbord-Symmetrie modelliert, da dies viele Vereinfachungen nach sich zieht [59].

3.3.1.1 Zusätzliche Masse

Bewegt sich ein starrer Körper in einem idealen unbegrenzten Fluid, können der Körper und das Fluid nicht gleichzeitig denselben physikalischen Raum ausfüllen. Wird der Körper nun beschleunigt, muss er einen Teil des ihn umgebenden Fluids bewegen oder ablenken, es tritt eine zusätzliche Trägheit auf. Aufgrund der zusätzlichen Trägheit verhält sich der Körper so, als hätte er eine höhere Masse. Die hydrodynamische Kraft, die diesen Anstieg der effektiven Masse hervorruft, wird *zusätzliche Masse* genannt. Umgangssprachlich kann sie beschrieben werden als die Kraft, die notwendig ist, um das Fluid zu beschleunigen und Platz für den Körper zu schaffen [55].

Der Effekt der zusätzlichen Masse tritt unter anderem in der Schifffahrt auf. Nicht selten kann die zusätzliche Masse bei Marineschiffen ein Viertel der Gesamtmasse betragen, sodass sie bei der Planung von Schiffen berücksichtigt werden muss. Im Gegensatz dazu ist sie beispielsweise bei Flugzeugen aufgrund der geringen Dichte der Luft häufig zu vernachlässigen. Die zusätzliche Masse kann größer als die Masse des Körpers m werden, falls die Dichte des Fluids vergleichbar oder sogar größer als die Dichte des Körpers ist. Dies können wir bei einem Schiff, welches sich in Wasser bewegt ausschließen.

Mathematisch kann die zusätzliche Masse eines Schiffes durch einen Tensor 2. Stufe aufgefasst werden, welcher sich unter der Annahme der horizontalen Bewegung zu einer 3×3 -Matrix

$$M_{\text{add}} = \begin{pmatrix} X_{\dot{u}} & X_{\dot{v}} & X_{\dot{r}} \\ Y_{\dot{u}} & Y_{\dot{v}} & Y_{\dot{r}} \\ N_{\dot{u}} & N_{\dot{v}} & N_{\dot{r}} \end{pmatrix}$$

vereinfacht. Für eine Herleitung der zusätzlichen Massen im Fall eines Schiffes mit sechs Freiheitsgraden siehe beispielsweise [52]. Die gewählten Symbole verdeutlichen dabei die Interpretation der jeweiligen Matrixeinträge. Beispielsweise gibt der Eintrag $X_{\dot{v}}$ an, welche Kraft in x -Richtung (des schiffsgebundenen Systems) wirkt, wenn das Schiff um eine Einheit in y -Richtung beschleunigt wird. Der Eintrag $Y_{\dot{r}}$ zeigt die Kraft an, die in y -Richtung pro Drehbeschleunigung wirkt. Unter der bereits erwähnten Annahme eines

idealen Fluides kann mithilfe der Kontinuitätsgleichung die Symmetrie der Matrix M_{add} hergeleitet werden, wodurch sich die Anzahl der unbekannt Parameter von neun auf sechs verringert [61]. Nutzen wir außerdem die schon oft erwähnte Steuerbord-Backbord-Symmetrie aus, lassen sich noch weitere Vereinfachungen feststellen. Beschleunigt das Schiff beispielsweise in x -Richtung, wird sich das Strömungs- und Druckfeld aufgrund der genannten Symmetrie ebenfalls symmetrisch entwickeln. Daraus ergibt sich, dass keine zusätzlichen Kräfte entlang der y -Achse und ebenfalls kein zusätzliches Moment entsteht, sodass sich

$$Y_{\dot{u}} = N_{\dot{u}} = 0$$

folgern lässt. Dies gilt aufgrund der Symmetrie auch für die jeweils symmetrischen Matrixeinträge [52]. Damit kann die Matrix unter den gestellten Annahmen zu

$$M_{\text{add}} = \begin{pmatrix} X_{\dot{u}} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{\dot{v}} & Y_{\dot{r}} \\ 0 & Y_{\dot{r}} & N_{\dot{r}} \end{pmatrix}$$

vereinfacht werden. Die daraus resultierenden hydrodynamischen Kräfte X_M, Y_M und das Kraftmoment N_M lassen sich mithilfe der Darstellungen in [55] nun durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} X_M &= X_{\dot{u}}\dot{u} - Y_{\dot{v}}vr - Y_{\dot{r}}r^2 \\ Y_M &= Y_{\dot{v}}\dot{v} + X_{\dot{u}}ur + Y_{\dot{r}}\dot{r} \\ N_M &= N_{\dot{r}}\dot{r} + Y_{\dot{r}}(\dot{v} + ur) + (Y_{\dot{v}} - X_{\dot{u}})uv \end{aligned} \quad (3.13)$$

modellieren. Die analytische Berechnung der zusätzlichen Massen eines konkreten Schiffes ist im Allgemeinen nicht möglich. Allerdings existieren Ansätze zur Lösung für einfache zwei- und dreidimensionale Objekte, die zur Approximation der exakten Lösung genutzt werden können. Die zwei verbreitetsten Methoden sind zum einen die Methode des *äquivalenten Ellipsoiden*, zum anderen die *Streifenmethode*. Bei ersterem wird der eingetauchte Schiffsrumpf durch einen (halben) Ellipsoiden approximiert und dessen zusätzliche Massen berechnet [55]. Die zweite Methode beruht auf der Einteilung des Schiffes in nahezu zweidimensionale Querschnittsflächen, dessen zusätzliche Massen einzeln berechnet werden [43]. Zwar können mit keiner der genannten Methoden alle Matrixeinträge berechnet werden, durch eine Kombination beider Methoden ist dies jedoch möglich. Die Arbeit von Sen und Vinh [65] beschäftigt sich eingehend mit der Zusammenführung dieser Methoden. Die beschriebenen Methoden approximieren allerdings allein die zusätzlichen Massen für den Schiffsrumpf. Für eine Approximation der weiteren Schiffsanhänge sei auf [52] verwiesen. Ebenso können die Methoden nicht auf eine Fahrt in seichtem Wasser angewendet werden, dafür siehe beispielsweise [55].

3.3.1.2 Weitere Rumpfkkräfte

Neben der zusätzlichen Masse wirken noch weitere Kräfte und Widerstände auf das Schiff. In den folgenden Absätzen werden diese Kräfte jeweils kurz erläutert und eine Modellierung gewählt.

Rumpfwiderstand Unter der Annahme einer Backbord-Steuerbord-Symmetrie, wobei weder Ruder noch Propeller genutzt werden, können wir davon ausgehen, dass bei einer Bewegung in Längsrichtung des Schiffes keine Seitenkräfte und keine Momente auftreten. Bei der Modellierung des Rumpfwiderstands können wir uns daher auf die Kraft in x -Richtung, abhängig von der Längsgeschwindigkeit u , beschränken. Da außerdem in diesem Teil der Modellierung der Luftwiderstand vernachlässigt wird, bezieht sich der Rumpfwiderstand allein auf den ins Wasser eingetauchten Teil des Rumpfes. Um eine bessere Vorstellung des Rumpfwiderstands zu bekommen, ist hier beispielhaft der Reibungswiderstand zu nennen, welcher den größten Teil des Rumpfwiderstands ausmacht. Der Reibungswiderstand wird durch die Schubspannungen auf der Schiffsoberfläche hervorgerufen, die aufgrund der Umströmung von Wasser auftreten [61].

Eine sehr komplexe Modellierung des Rumpfwiderstandes haben Holtrop und Mennen in ihren Arbeiten [41], [42] und [40] ausgearbeitet. Die Komplexität dieses Modells übersteigt allerdings die für diese Arbeit notwendige, da unter anderem 15 verschiedene geometrische Abmessungen des Schiffes, die Erdbeschleunigung, die Wasserdichte und die dynamische Viskosität des Wasser zur Berechnung des Widerstands benötigt werden. Für die explizite Darstellung der Gleichungen sei an dieser Stelle auf die genannten Quellen verwiesen. Eine kompakte Beschreibung der einzelnen Effekte, aus denen sich der Rumpfwiderstand zusammensetzt, ist in [61] zu finden.

In dieser Arbeit werden wir uns an der Arbeit von Oltmann und Sharma [59] orientieren, in der zur Approximation der Rumpfkraft ein Polynom dritten Grades, abhängig von der Längsgeschwindigkeit u des Schiffes, genutzt wird,

$$X_R = a_R u + b_R u |u| + c_R u^3 \quad (3.14)$$

mit den Parametern $a_R, b_R, c_R \in \mathbb{R}$.

Dynamischer Auftrieb (*lift*) und Profilwiderstand (*drag*) Im Gegensatz zum Rumpfwiderstand, welcher bei der reinen Bewegung in Längsrichtung auftritt, treten der dynamische Auftrieb und der Profilwiderstand bei zusätzlichen Drift- und Gierbewegungen auf. Obwohl der dynamische Auftrieb in erster Linie mit den Tragflächen eines Flugzeugs assoziiert wird, können auch Objekte wie Propeller und Segel oder sogar Vögel, Fledermäuse und Insekten diesen Effekt hervorrufen. Der dynamische Auftrieb ist eine Kraft, die durch Ablenkungen eines strömenden Fluids entsteht. Zum besseren Verständnis betrachten wir die Kraft zunächst beispielhaft an Tragflächen und übertragen diese Überlegungen anschließend auf unser Schiff. Während eines Horizontalflugs beispielsweise bewegt sich die Tragfläche des Flugzeugs aus Abbildung 3.7a in Richtung U_{res} . Aus Sicht des Flugzeugs wird die Tragfläche wie dargestellt von Luft umströmt, wobei die Luft durch die Form und Ausrichtung der Tragfläche nach unten ablenkt/beschleunigt wird. Aufgrund dieser Beschleunigung übt die Tragfläche nach dem zweiten Newtonschen Gesetz eine nach unten gerichtete Kraft auf die Luft aus. Das dritte Newtonsche Gesetz wiederum besagt, dass deshalb eine entgegengerichtete Kraft von der Luft auf die Tragfläche wirken muss. Die in diesem Fall nach oben gerichtete Kraft ist der dynamische Auftrieb F_L und hält so das Flugzeug in der Luft. Auch ein symmetrischer Tragflügel kann dynamischen Auftrieb erzeugen, solange er nicht entlang der Strömungsrichtung ausgerichtet ist. Zusätzlich wirkt der Profilwiderstand F_D entgegengesetzt zur Strömungsrichtung, welcher den Tragflügel entlang der Strömung auszurichten versucht.

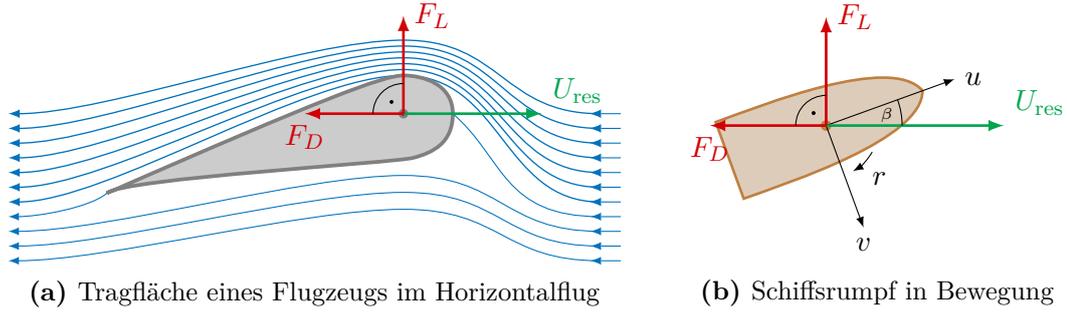


Abbildung 3.7: Wirkungsweise des dynamischen Auftriebs und des Profilwiderstands am Beispiel einer von Luft umströmten Tragfläche und eines von Wasser umströmten Schiffsrumpfes.

Diese beschriebene Wirkungsweise kann auf einen im Wasser bewegten Schiffsrumpf übertragen werden. Wir schauen uns dazu Abbildung 3.7b an. Obwohl ein Schiffsrumpf im Gegensatz zu einer Tragfläche nicht in erster Linie geformt wurde, um einen solchen dynamischen Auftrieb zu generieren, kann dieser Effekt dennoch nicht vernachlässigt werden. Das Schiff fährt durch ruhendes Wasser in Bewegungsrichtung U_{res} , welche durch Überlagerung der drei Geschwindigkeiten des Vorschnellens u , Driftens v und Gierens r entsteht. Ist das Schiff nicht entlang seiner Bewegungsrichtung ausgerichtet, entsteht der Angriffswinkel β zwischen der Bewegungsrichtung des Schiffes und dessen Längsachse. Wasser, welches das Schiff umströmt, wird nun in analoger Weise abgelenkt, sodass ein dynamischer Auftrieb F_L entsteht. Wie bereits im Beispiel erläutert, steht der dynamische Auftrieb F_L senkrecht auf der Strömungsrichtung, also senkrecht auf U_{res} . Das Schiff wird in diesem Fall Richtung Backbord (linke Schiffseite) gezogen. Es wird deutlich, dass es sich bei dieser Kraft nicht wirklich um einen Auftrieb im vertikalen Sinn handelt. Die Betrachtung von Schiffsrümpfen resultiert in einem Kraftvektor in der Horizontalebene. Zusätzlich wirkt nun auch hier, entgegengesetzt zur Strömungsrichtung, der Profilwiderstand F_D .

Zur Modellierung der Kräfte entlang der lokalen x - und y -Achse und des entstehenden Moments, die durch den dynamischen Auftrieb und den Profilwiderstand entstehen, sei hier auf die Arbeit von Oltmann und Sharma [59] verwiesen. Die grundlegende Idee besteht darin, die Drift- und Gierbewegung zunächst unabhängig voneinander zu betrachten, entsprechende Kraftgleichungen aufzustellen und diese im Anschluss wieder miteinander zu kombinieren, um Gleichungen für eine allgemeine Schiffsbewegung zu erhalten. Damit ergibt sich die Modellierung der Kräfte und Momente durch

$$\begin{aligned}
 X_{LD} &= \rho \ell T \frac{u(c'krl \operatorname{sgn} u - cv)}{\sqrt{u^2 + (krl \operatorname{sgn} u - v)^2}} \left(krl \operatorname{sgn} u - v - \frac{u^2(d'krl \operatorname{sgn} u - dv)}{u^2 + (krl \operatorname{sgn} u - v)^2} \right) \\
 Y_{LD} &= \rho \ell T \frac{u^2(c'krl \operatorname{sgn} u - cv)}{\sqrt{u^2 + (krl \operatorname{sgn} u - v)^2}} \left(1 + \frac{(d'krl \operatorname{sgn} u - dv)(krl \operatorname{sgn} u - v)}{u^2 + (krl \operatorname{sgn} u - v)^2} \right) \\
 N_{LD} &= -2\rho \ell^2 T \frac{u|u|(e'krl \operatorname{sgn} u - ev)}{\sqrt{u^2 + (krl \operatorname{sgn} u - v)^2}} \left(1 + \frac{(d'krl \operatorname{sgn} u - dv)(krl \operatorname{sgn} u - v)}{u^2 + (krl \operatorname{sgn} u - v)^2} \right),
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

mit der Wasserdichte ρ , der halben Schiffslänge ℓ , dem Tiefgang T und den Parametern $c, c', d, d', e, e', k \in \mathbb{R}$.

Querströmungswiderstand (*Cross-Flow*) Durch die Schiffsbewegung wird eine Längsströmung hervorgerufen, die abhängig vom Angriffswinkel β und den Geschwindigkeiten u , v und r den dynamischen Auftrieb und den Profilwiderstand hervorruft. Zusätzlich zu dieser Längsströmung bildet sich aufgrund von Drift- und Gierbewegungen eine Querströmung unterhalb des Rumpfes, sodass sich auf einer Seite Wirbel bilden. Es findet eine Impulsübertragung vom Schiff auf das Wasser statt. Nach dem dritten Newtonschen Gesetz wirkt dem entgegen eine Querströmungskraft Y_{CF} auf das Schiff in Richtung der y -Achse, ebenso resultiert ein Querströmungsmoment N_{CF} . Die Idee zur Modellierung dieses Widerstands basiert erneut auf einer Streifenmethode, bei der der Rumpf entlang der Längsachse in Querschnitte unterteilt und anschließend über die Längsachse integriert wird. Dabei ist die lokale Wirbelbildung entlang der Längsachse an Position x zum einen abhängig von der Querschnittsform, welche durch den Tiefgang $T(x)$ und den Querströmungskoeffizienten $C_{CF}(x)$ repräsentiert wird, und zum anderen von der lokalen Quergeschwindigkeit $v + rx$.

Um das daraus resultierende Integral analytisch lösen zu können, werden die folgenden Annahmen getroffen. Der Ursprung des Koordinatensystems wird mittig auf der Längsachse angenommen. Außerdem soll der Tiefgang des Schiffes entlang der Längsachse $T(x) = T$ konstant bleiben. Wird der Querströmungskoeffizient wie in [59] durch ein Polynom

$$C_{CF}(x) = a_{CF} + b_{CF} \left(\frac{x}{\ell}\right)^7 + c_{CF} \left(\frac{x}{\ell}\right)^8 + d_{CF} \left(\frac{x}{\ell}\right)^9$$

approximiert, kann das Integral damit analytisch gelöst werden. Die Querströmungskoeffizienten von Schiffsrümpfen sind im Mittelteil nahezu konstant, während sie zum Rand stark ansteigen. Dieses Verhalten kann durch ein Polynom mit hohem Grad approximiert werden. Für eine bessere Genauigkeit können komplexere Terme genutzt werden. Um ausschließlich die Querströmungseffekte ohne das Auftreten weiterer Kräfte wie die zusätzliche Masse oder den dynamischen Auftrieb zu untersuchen, ist die Anzahl unterschiedlicher Experimente mit konstanten Geschwindigkeiten allerdings auf vier beschränkt, weshalb Oltmann und Sharma [59] sich auf vier Parameter beschränkt haben. Die Längsgeschwindigkeit u muss konstant Null sein, ebenso jeweils eine der Geschwindigkeiten des Driftens v und des Gierens r . Würden beide gleichzeitig wirken, ergäbe sich daraus auch eine Komponente in Längsrichtung. Jede Geschwindigkeit kann dann einmal positiv und einmal negativ sein, sodass sich insgesamt vier unterschiedliche Experimente ergeben. Ein Polynom mit vier Parametern kann dann die entstehenden vier Messpunkte exakt abbilden.

Falls $v^2 \geq r^2\ell^2$ ist, berechnet sich die resultierende Kraft Y_{CF} und das Moment N_{CF} durch

$$Y_{CF} = -\rho\ell T \left(a_{CF} \frac{3v^2 + r^2\ell^2}{3} + b_{CF} \frac{2vr\ell}{9} + c_{CF} \frac{11v^2 + 9r^2\ell^2}{99} + d_{CF} \frac{2vr\ell}{11} \right) \operatorname{sgn} v$$

$$N_{CF} = -2\rho\ell T \left(a_{CF} \frac{vr\ell}{3} + b_{CF} \frac{11v^2 + 9r^2\ell^2}{198} + c_{CF} \frac{vr\ell}{11} + d_{CF} \frac{13v^2 + 11r^2\ell^2}{286} \right) \operatorname{sgn} v$$

und ansonsten, falls $v^2 < r^2 \ell^2$ gilt, durch

$$\begin{aligned}
Y_{CF} &= -\rho \ell T \left(a_{CF} v \frac{3r^2 \ell^2 + v^2}{3r\ell} + b_{CF} \frac{45v^2 r^8 \ell^8 + 36r^{10} \ell^{10} - v^{10}}{360r^8 \ell^8} \right. \\
&\quad \left. + c_{CF} v \frac{99r^{10} \ell^{10} + v^{10}}{495r^9 \ell^9} + d_{CF} \frac{66v^2 r^{10} \ell^{10} + 55r^{12} \ell^{12} - v^{12}}{330r^{10} \ell^{10}} \right) \operatorname{sgn} r \\
N_{CF} &= -2\rho \ell T \left(a_{CF} \frac{6v^2 r^2 \ell^2 + 3r^4 \ell^4 - v^4}{24r^2 \ell^2} + b_{CF} v \frac{99r^{10} \ell^{10} + v^{10}}{990r^9 \ell^9} \right. \\
&\quad \left. + c_{CF} \frac{66v^2 r^{10} \ell^{10} + 55r^{12} \ell^{12} - v^{12}}{1320r^{10} \ell^{10}} + d_{CF} v \frac{143r^{12} \ell^{12} + v^{12}}{1716r^{11} \ell^{11}} \right) \operatorname{sgn} r.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Die Berechnung dieser Kräfte kann in der Arbeit von Oltmann und Sharma [59] nachvollzogen werden.

3.3.2 Aerodynamische Kräfte

Der Einfluss des Windes auf die Bewegung des Schiffes kann selbst bei Nicht-Segelschiffen nicht vernachlässigt werden. Der Wind wirkt dabei hauptsächlich direkt auf das Schiff beziehungsweise den Teil des Schiffes, welcher nicht eingetaucht ist, und bewirkt dort Kräfte und Momente. Bei Windstille hingegen sind die Kräfte und Momente, die auf diesen Teil des Schiffes wirken, zu vernachlässigen. Neben dieser direkten Wirkungsweise kann der Wind auch indirekt auf das Schiff wirken, indem er einen Wellengang hervorruft. Solche sekundären Effekte wollen wir an dieser Stelle allerdings vernachlässigen, da sich die Berechnungen in der vorliegenden Arbeit auf Hafengebiete beziehen, wo starker Wellengang ausgeschlossen werden kann [72].

Ganz allgemein wird der *wahre Wind* durch das zeitabhängige Vektorfeld $V_W(x_0, y_0, z_0, t)$ beschrieben, welches jedem Punkt zu jedem Zeitpunkt einen Windvektor, also absolute Windstärke und Windrichtung bezüglich des globalen Koordinatensystems, zuordnet. Dabei gibt $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ die Position im dreidimensionalen globalen Koordinatensystem an und t den Zeitpunkt. Die Abhängigkeit bezüglich der horizontalen Koordinaten (x_0, y_0) ist dabei hauptsächlich Abschirm- und Tunneleffekten geschuldet, die durch andere Schiffe oder die Hafenstruktur hervorgerufen werden. Durch die Abhängigkeit von der Höhe z_0 können hauptsächlich Scherwinde modelliert werden. Die Zeitabhängigkeit ermöglicht die Modellierung sich kurzzeitig ändernder Windverhältnisse, die beispielsweise durch das Auftreten von Böen hervorgerufen werden. Blendermann gibt in [14] Vorschläge, wie solche Fälle modelliert werden können. In dieser Arbeit werden wir genannte Tunnel- oder Abschirmeffekte, ebenso wie Scherwinde nicht berücksichtigen, sondern gehen von einem sowohl zeitlich als auch räumlich konstanten Wind aus. In Zeiträumen, die bei der Planung von Schiffsmanövern als realistisch angesehen werden, ist der Wind im Allgemeinen böig. In [39] werden diese Böen allerdings durch eine angemessene Erhöhung der konstanten Windstärke realisiert, sodass die Annahme eines konstanten Windes auch unter Berücksichtigung von Böen gerechtfertigt ist. Das Vektorfeld

$$V_W(x_0, y_0, z_0, t) \equiv V_W$$

besteht damit ausschließlich aus Vektoren einer konstanten Länge $s \in \mathbb{R}_+$ und Ausrichtung $\theta \in [-\pi, \pi)$. Durch das Tupel (s, θ) , wobei s die Windstärke und θ die Windrichtung bezüglich Norden darstellt, wird der Wind vollständig beschrieben. Die Definition des Windes lässt sich damit ohne Einschränkungen auf unser Modell, welches ausschließlich die Bewegung in einer horizontalen Ebene darstellt, anwenden. Betrachte dazu Abbildung 3.8a. Die Darstellung des wahren Windes in kartesischen Koordinaten ergibt sich aus den Polarkoordinaten (s, θ) durch

$$V_W = - \left(s \cos \theta, s \sin \theta \right)^T, \quad (3.17)$$

was in Abbildung 3.8b einzusehen ist. Aufgrund der Tatsache, dass das Tupel (s, θ) strenggenommen die Polarkoordinaten des Gegenvektors $-V_W$ sind, müssen wir hier das Minuszeichen beachten.

Zusätzlich zum wahren Wind muss eine weitere Windkomponente berücksichtigt werden, der *Fahrtwind* V_F . Diese Komponente kommt uns auch aus dem Alltag bekannt vor. Fahren wir bei eigentlicher Windstille mit dem Fahrrad, so weht uns immer, egal in welche Richtung wir fahren, ein Wind ins Gesicht. Je schneller wir fahren, desto stärker wird dieser Wind. Die Richtung des Fahrtwinds ist der resultierenden Bewegungsrichtung U_{res} entgegengesetzt und die Stärke entspricht genau der resultierenden Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit entlang der Koordinatenachsen des globalen n -System entspricht der lokalen Änderungsrate der globalen Koordinaten (x_0, y_0) , sodass folgt

$$V_F = -U = - \left(\dot{x}_0, \dot{y}_0 \right)^T. \quad (3.18)$$

Aerodynamische Kräfte, die auf das Schiff wirken, sind abhängig vom sogenannten *scheinbaren Wind* (*apparent wind*)

$$V_A = V_W + V_F, \quad (3.19)$$

der Summe aus wahren Wind und Fahrtwind. Zur Berechnung der Windstärke $s_A \in \mathbb{R}_+$ und der Windrichtung $\theta_A \in [-\pi, \pi)$ bezüglich Norden des scheinbaren Windes betrachten wir Abbildung 3.8b. Durch Einsetzen der Definition (3.17) und (3.18) in (3.19) ergibt sich die Darstellung des Windes in kartesischen Koordinaten durch

$$V_A = - \begin{pmatrix} s \cos \theta + \dot{x}_0 \\ s \sin \theta + \dot{y}_0 \end{pmatrix}.$$

Die Umrechnung dieser kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten ergibt das Tupel $(s_A, \theta_A) \in \mathbb{R}_+ \times [-\pi, \pi)$, die Windstärke und Windrichtung des scheinbaren Windes durch

$$s_A = \sqrt{(\dot{x}_0 + s \cos \theta)^2 + (\dot{y}_0 + s \sin \theta)^2}$$

$$\theta_A = \text{atan2}(\dot{x}_0 + s \cos \theta \mid \dot{y}_0 + s \sin \theta),$$

wobei zur korrekten Umrechnung erneut der Gegenvektor $-V_A$ betrachtet werden muss. Damit lässt sich nun anhand der Abbildung 3.8b der relative Angriffswinkel des scheinbaren Windes

$$\beta_A = \theta_A - \psi \in [-\pi, \pi) \quad (3.20)$$

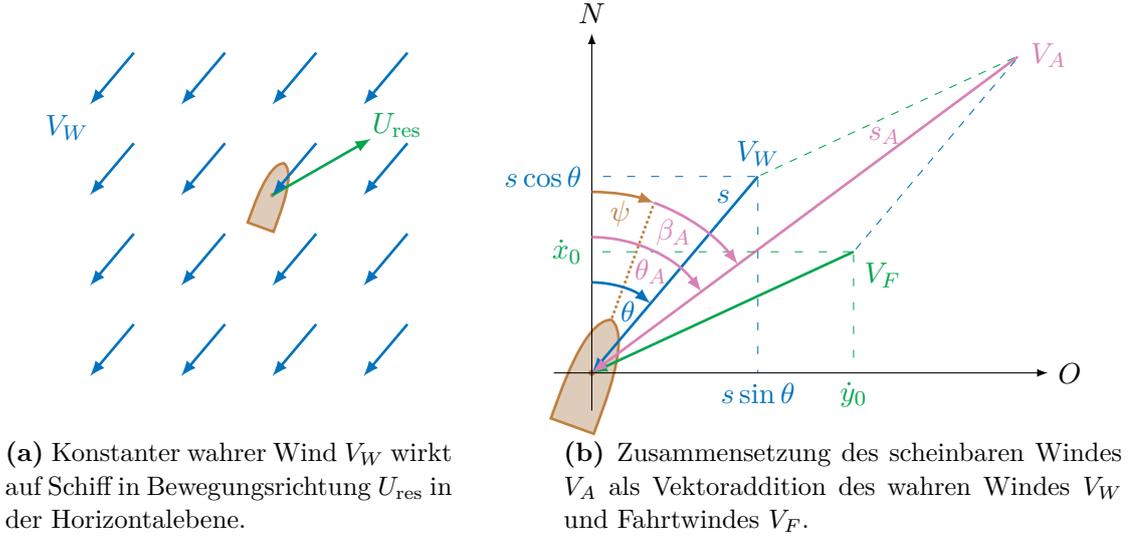


Abbildung 3.8: Graphische Visualisierung der Modellierung des Windes.

als der Winkel zwischen der Längsachse des Schiffes und dem scheinbaren Windvektor definieren. Dieser Winkel ist positiv, wenn der Wind das Schiff am Bug (vorne) und vom Steuerbord (rechts) aus angreift. Hierbei gehen wir im weiteren Verlauf von einer Bug-Heck-Symmetrie des Schiffes aus. Eine Unterscheidung zwischen scheinbarem „Gegenwind“ und „Rückenwind“ ist damit in der Modellierung nicht erforderlich.

Unter den genannten Einschränkungen lassen sich die aerodynamischen Kräfte entlang der x - und y -Richtung des schiffsgebundenen b -Systems und das Moment, die auf das Schiff wirken, nach [72] beschreiben durch

$$\begin{aligned} X_A &= \frac{\rho_A}{2} C_{X_A}(\beta_A) A_F s_A^2 \\ Y_A &= \frac{\rho_A}{2} C_{Y_A}(\beta_A) A_L s_A^2 \\ N_A &= \frac{\rho_A}{2} C_{N_A}(\beta_A) A_L s_A^2, \end{aligned} \quad (3.21)$$

wobei ρ_A die Luftdichte angibt und die Größen A_F und A_L die frontale und laterale projizierte Seitenfläche des nicht eingetauchten Teils des Rumpfes darstellen. Die Parameter $C_{X_A}(\beta_A)$, $C_{Y_A}(\beta_A)$, $C_{N_A}(\beta_A)$ bilden die entsprechenden aerodynamischen Kraft- bzw. Momentkoeffizienten, welche aufgrund der getroffenen Annahmen nach Wnęk [72] ausschließlich vom Angriffswinkel β_A abhängig sind, wobei er sich auf experimentell ermittelte Daten von Blendermann [14] bezieht. In [31] werden unterschiedliche Ansätze zur Modellierung der Koeffizienten untersucht, abhängig von der Art der betrachteten Schiffe. Eine recht unbekannt aber simple Approximation dieser Koeffizienten wird von Fedyaevsky und Sobolev [25] durch

$$\begin{aligned} C_{X_A} &= -k_X \cos \beta_A \\ C_{Y_A} &= -k_Y \sin \beta_A \\ C_{N_A} &= C_{Y_A} x_A(\beta_A) \end{aligned} \quad (3.22)$$

gezeigt, mit den Parametern $k_X, k_Y \in \mathbb{R}_+$ und dem Hebelarm der aerodynamischen

Kraft $x_A(\beta_A)$. Dieser ist gegeben durch

$$x_A(\beta_A) = x_{A_0} + \left(\frac{\pi}{2} - |\beta_A|\right) \frac{\ell}{\pi}. \quad (3.23)$$

Dabei stellt x_{A_0} die Verschiebung des Schwerpunkts der lateralen projizierten Seitenfläche entlang der Längsachse des Schiffes dar. Durch (3.23) wird angenommen, dass die Kraft in y -Richtung bei einem senkrecht angreifenden Wind, also für $|\beta_A| = \frac{\pi}{2}$, direkt im Schwerpunkt angreift, dieser Angriffspunkt allerdings bei abweichenden Angriffswinkeln weiter nach außen wandert. Abbildung 3.9 stellt diesen Umstand graphisch dar. Dabei kann aufgrund üblicher Schiffsformen angenommen werden, dass sich die x -Position des Schwerpunkts x_{A_0} innerhalb des Intervalls $\left(-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right)$ befindet. Da der zweite Summand aufgrund des in (3.20) gewählten Intervalls des Angriffswinkels im Intervall $\left[-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right]$ liegt, ergibt sich insgesamt die natürliche Bedingung

$$x_A(\beta_A) \in (-\ell, \ell).$$

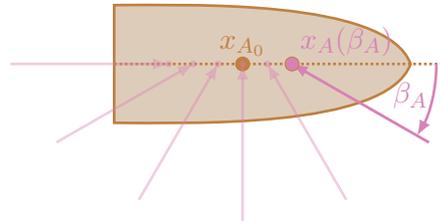


Abbildung 3.9: Veränderung des Hebelarms der aerodynamischen Kraft bei unterschiedlichen Wind-Angriffswinkeln β_A .

Obwohl diese Modellierung der Koeffizienten bereits lange bekannt ist, wurden noch keine Daten erhoben, die diesen Ansatz widerlegen. Trotz der geringen Komplexität des Modells können Wnęk et al. in ihrer Arbeit [72] für eine Vielzahl an unterschiedlichen Schiffen zeigen, dass die Berechnung der Koeffizienten durch (3.22) angemessene und qualitativ korrekte Ergebnisse liefert. Andererseits kann der Fehler für bestimmte Schiffe und Einfallswinkel signifikant hoch sein, sodass individuelle Tests von Wnęk et al. empfohlen werden, um die Gültigkeit dieses Modells zu verifizieren. Wir werden in der vorliegenden Arbeit diese Modellierung der Koeffizienten als korrekt annehmen.

Im Kontext der Schiff- und auch Luftfahrt wird die Windstärke für gewöhnlich im Geschwindigkeitsmaß *Knoten* (kn) angegeben. Dieses Maß beruht auf dem in diesen Bereichen üblichen Längenmaß der *Seemeile* (sm), wobei eine Seemeile genau 1852 Metern entspricht. Damit ergibt sich die Umrechnung

$$1 \text{ kn} = 1 \frac{\text{sm}}{\text{h}} = 1.852 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 30.86 \frac{\text{m}}{\text{min}} = 0.514 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (3.24)$$

Um die Windstärke in einen Kontext zu bringen, dient die Beaufort Skala. Sie teilt die Windstärke in 13 Bereiche, von Windstille (0) bis Orkan (12). Dabei beruhen die Werte nicht auf exakten Messungen, sondern basieren auf den beobachteten Auswirkungen, die die jeweiligen Windstärken hatten. Um eine bessere Intuition bezüglich der „Stärke“ des Windes in der Einheit Knoten zu erhalten, können wir die Beaufort Skala in Tabelle 3.1 hinzuziehen [31].

3.3.3 Schlepperkräfte

Schlepperboote sind Schiffe, die anderen Schiffen bei der Durchführung ihrer Manöver helfen, indem sie Druck auf sie ausüben oder an ihnen ziehen, entweder mittels direktem

Beaufort-Nummer	Bezeichnung	mittlere Windgeschwindigkeit in kn
0	Windstille	0 – 1
1	leiser Zug	2 – 3
2	leichte Brise	4 – 7
3	schwache Brise	8 – 11
4	mäßige Brise	12 – 16
5	frische Brise	17 – 21
6	starker Wind	22 – 27
7	steifer Wind	28 – 33
8	stürmischer Wind	34 – 40
9	Sturm	41 – 48
10	schwerer Sturm	49 – 56
11	orkanartiger Sturm	57 – 65
12	Orkan	≥ 65

Tabelle 3.1: Beaufort-Skala zur Einteilung der Windstärke [31]

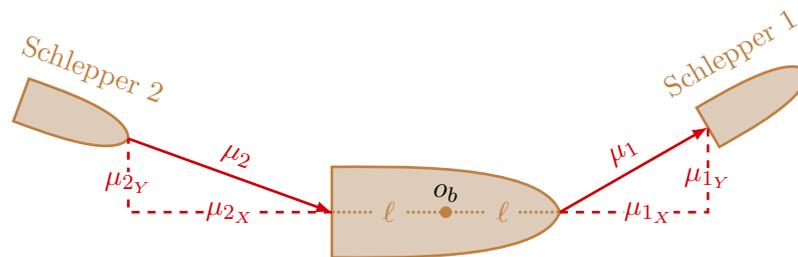


Abbildung 3.10: Modellierung der Schlepperkräfte als Kraftvektoren. Der Ursprung des lokalen b -Systems (brauner Punkt) liegt dabei in der Mitte der Längsachse.

Kontakt oder mithilfe einer Schleppleine [69]. Solche Schlepperboote werden üblicherweise eingesetzt, um größere Schiffe in Häfen oder engen Kanälen zu steuern. Sie werden allerdings auch eingesetzt, um Schiffe zu bewegen, die nicht oder nicht mehr in der Lage sind, selbst zu steuern, wie Lastkähne, Ölplattformen oder beschädigte Schiffe.

Eine Modellierung der Schlepperkräfte kann beliebig komplex ausfallen. Um nur ein paar Aspekte zu nennen, könnte eine Modellierung der hydro- und aerodynamischen Kräfte, die jeweils auf die Boote wirken, berücksichtigt werden. Ebenso die zeitliche Verzögerung, die beispielsweise bei der Richtungsänderung der Boote durch eine kurzzeitig „lockere“ Schleppleine auftritt, spielt eine Rolle. Ist die Schleppleine lang genug, könnte auch die Dynamik der Leine an sich in die Modellierung eingebaut werden. Sutulo und Soares zeigen in [22], wie eine solche komplexe Modellierung teilweise umgesetzt werden kann.

Wir nehmen in dieser Arbeit an, dass das Schiff von zwei Schlepperbooten gesteuert wird, von denen eins am Bug und eins am Heck befestigt ist. Weiterhin werden wir die Schlepperkräfte sehr vereinfacht mithilfe von zwei Kraftvektoren durch

$$\mu_1 = (\mu_{1x}, \mu_{1y})^T \quad \mu_2 = (\mu_{2x}, \mu_{2y})^T$$

modellieren, dargestellt in Abbildung 3.10. Da die Schlepperboote nicht unbegrenzt Kraft auf das Schiff ausüben können, sind die absoluten Schlepperbootkräfte weiterhin durch $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2 \in \mathbb{R}$ beschränkt, sodass

$$\sqrt{\mu_{1x}^2 + \mu_{1y}^2} \leq \bar{\mu}_1 \quad \sqrt{\mu_{2x}^2 + \mu_{2y}^2} \leq \bar{\mu}_2$$

gilt. Unter der Annahme, dass sich der Ursprung des schiffsgebundenen Koordinatensystems mittig entlang der Längsachse befindet, wie es in Abbildung 3.10 dargestellt wird, ergeben sich die Kräfte entlang der Koordinatenachsen des b -Systems und das resultierende Moment durch

$$\begin{aligned} X_T &= \mu_{1x} + \mu_{2x} \\ Y_T &= \mu_{1y} + \mu_{2y} \\ N_T &= \ell\mu_{1y} - \ell\mu_{2y}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

3.4 Gesamtsystem

In den vorangegangenen Unterkapiteln wurden neben den kinematischen und kinetischen Bewegungsgleichungen in (3.1) und (3.12) auch die relevanten hydro- und aerodynamischen Effekte erläutert und geeignete Modellierungen der daraus hervorgerufenen Kräfte und Momente vorgestellt. Zusätzlich wurde ein vereinfachtes Modell gezeigt für die Kräfte, die die Schlepperboote auf das Schiff ausüben. Um nun die Schiffsbewegung vollständig beschreiben zu können, müssen zunächst die kinetischen Bewegungsgleichungen mit den hydrodynamischen Kräften und Momenten der zusätzlichen Masse X_M, Y_M, Z_M aus (3.13), des Rumpfwiderstands X_R aus (3.14), des dynamischen Auftriebs und Profilwiderstands X_{LD}, Y_{LD}, N_{LD} aus (3.15), des Querströmungswiderstands Y_{CF}, N_{CF} aus (3.16), den aerodynamischen Kräften X_A, Y_A, N_A aus (3.21) und den antreibenden Schlepperkräften X_T, Y_T, N_T aus (3.25) zusammengeführt werden. Dies wird realisiert durch die Gleichungen

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m(\dot{u} - rv - r^2x_G) \\ m(\dot{v} + ru + \dot{r}x_G) \\ I_z\dot{r} + x_Gm(\dot{v} + ru) \end{pmatrix}}_{=: a(\nu, \dot{\nu})} = \underbrace{\begin{pmatrix} X_M \\ Y_M \\ N_M \end{pmatrix}}_{=: b(\nu, \dot{\nu})} + \underbrace{\begin{pmatrix} X_T \\ Y_T \\ N_T \end{pmatrix}}_{=: T(\mu_1, \mu_2)} + \underbrace{\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ N_A \end{pmatrix}}_{=: w(\psi, \nu, s, \theta)} + \underbrace{\begin{pmatrix} X_{LD} - X_R \\ Y_{LD} + Y_{CF} \\ N_{LD} + N_{CF} \end{pmatrix}}_{=: g(\nu)}. \tag{3.26}$$

Dabei werden die Abhängigkeiten der Kräfte bezüglich der Pose η und der verallgemeinerten Geschwindigkeit ν und Beschleunigung $\dot{\nu}$ des Schiffes explizit angegeben, ebenso bezüglich der Stärke und Richtung (s, θ) des wahren Windes und der Schlepperkräfte (μ_1, μ_2) .

Die Funktionen $a, b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ beinhalten mit der obigen Definition die Kinetik des Schiffes und die Kräfte, die aufgrund der zusätzlichen Massen entstehen. In der Funktion $T : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ werden die Kräfte durch die Schlepperboote zusammengefasst. Die Funktion $w : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ stellt die aerodynamische Windkraft dar und in der Funktion $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ werden alle übrigen hydrodynamischen Rumpfkkräfte zusammengefasst. Gemeinsam mit den kinetischen Bewegungsgleichungen und den Beschränkungen an die Schlepperkräfte 3.3.3 ergibt sich daraus das dynamische System.

Satz 3.8. (Dynamisches System unter Nebenbedingungen)

Seien die Funktionen a, b, g, w, T wie in (3.26) definiert. Das dynamische System zur Beschreibung der Bewegung des Schiffes unter dem Einfluss von hydro- und aerodynamischen Kräften, gesteuert durch Schlepperboote, lautet dann

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \bar{R}(\psi)\nu & (3.27) \\ a(\nu, \dot{\nu}) - b(\nu, \dot{\nu}) &= T(\mu_1, \mu_2) + w(\psi, \nu, s, \theta) + g(\nu) \end{aligned}$$

mit den sechs Zuständen $(\eta, \nu) = (x_0, y_0, \psi, u, v, r)$, den vier Steuergrößen $(\mu_1, \mu_2) = (\mu_{1X}, \mu_{1Y}, \mu_{2X}, \mu_{2Y})$ und den Windparametern (s, θ) . Die Steuergrößen unterliegen außerdem den Beschränkungen

$$\left\| \sqrt{\mu_{1X}^2 + \mu_{1Y}^2} \right\|_{\infty} \leq \bar{\mu}_1 \quad \left\| \sqrt{\mu_{2X}^2 + \mu_{2Y}^2} \right\|_{\infty} \leq \bar{\mu}_2,$$

wobei $\| \cdot \|_{\infty}$ die Supremum-Norm darstellt.

Die vorkommenden Parameter der modellierten Kräfte können beispielsweise durch Parameteridentifikation bestimmt werden.

Kapitel 4

Vereinfachte Risikoanalyse im Modell mit einem Freiheitsgrad

Ziel dieses Abschnittes ist es, erste Ergebnisse einer Risikoanalyse bezüglich des Einflusses des Windes in einem zunächst sehr vereinfachten Modell mit nur einem Freiheitsgrad zu liefern. Insbesondere soll dieses Kapitel einen leichteren Einstieg in die Theorie des nachfolgenden Kapitels ermöglichen. Dabei soll eine Intuition über die Vorgehensweise entwickelt werden, sodass diese anschließend im nächsten Kapitel auf eine höhere Dimension verallgemeinert werden kann. Im Mittelpunkt der Risikoanalyse steht die Beantwortung der Frage

„Ist ein geplantes Manöver bei dem angegebenen Wind möglich?“.

Die Frage soll beantwortet werden, indem für ein Manöver eine sogenannte *Zulässigkeitsmenge* berechnet wird. Diese Zulässigkeitsmenge soll alle Windstärken enthalten, bei denen das geplante Manöver durchgeführt werden kann. In diesem vereinfachten Modell ist die Zulässigkeitsmenge demnach eine Teilmenge der reellen Zahlen \mathbb{R} . Dazu reduzieren wir in Abschnitt 4.1 zunächst die in Kapitel 3 modellierte Systemdynamik und passen sie auf den hier betrachteten vereinfachten Fall mit einem Freiheitsgrad an. Einer formalen Einführung der Zulässigkeitsmenge in Abschnitt 4.2 folgt eine theoretische Herleitung zur Berechnung dieser Menge in Abschnitt 4.3. Dabei kann insbesondere gezeigt werden, dass es sich bei der Zulässigkeitsmenge um ein Intervall handelt. Aufgrund dessen kann die Berechnung der Menge auch durch Lösung eines optimalen Steuerprozesses umgesetzt werden, wobei nur die Intervallgrenzen zu berechnen sind. Ein solcher Steuerprozess wird in Abschnitt 4.4 formuliert. Abschließend werden die analytische und numerische Berechnungsmethode der beschriebenen Menge in Abschnitt 4.5 anhand eines expliziten Beispiels miteinander verglichen und evaluiert.

4.1 Modellreduzierung auf einen Freiheitsgrad

Die Anzahl der Freiheitsgrade in der Modellierung der Schiffsbewegung wurde bereits in Kapitel 3 von den allgemeinen sechs auf drei Freiheitsgrade reduziert. In diesem Kapitel wird ein Schiff mit lediglich einem Freiheitsgrad betrachtet, dem Vorschneffen u .

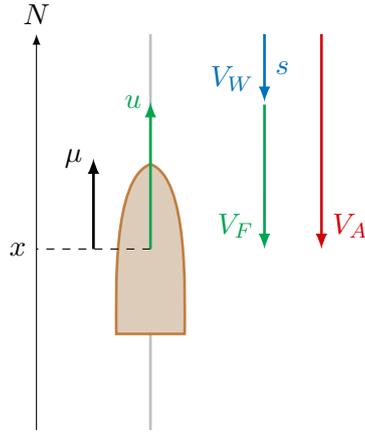


Abbildung 4.1: Vereinfachtes Modell, wobei die Windstärke s und die Schlepperkraft μ jeweils positiv dargestellt werden.

Das Schiff kann sich damit ausschließlich auf einer geraden Linie bewegen, sowohl eine Driftgeschwindigkeit v als auch eine Giergeschwindigkeit r sind ausgeschlossen. Ohne Einschränkung kann dabei angenommen werden, dass diese Bewegungslinie parallel zur x_n -Achse des globalen Systems verläuft. Damit bleibt die y -Koordinate und die Orientierung ψ des Schiffes bezüglich des globalen Systems konstant und die Bewegungsvariablen vereinfachen sich zu $\eta = x$ und $\nu = u$. Das vereinfachte Modell ist in Abbildung 4.1 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass sich das Schiff mit Geschwindigkeit u (grün) parallel zur globalen x_n -Achse bewegt.

Ziel ist nun, das vereinfachte Modell aus dem modellierten Gesamtsystem (3.27) abzuleiten. Die Position x und Geschwindigkeit u hängen dann durch die kinematische Bewegungsgleichung aus (3.1) wie folgt zusammen

$$\dot{x} = u,$$

da die Koordinatentransformation in diesem Fall nicht mehr notwendig ist. Ebenso ergibt sich die kinetische Bewegungsgleichung wie in (3.12) aus dem zweiten Newtonschen Gesetz

$$X = m\dot{u},$$

wobei nur die Kräfte entlang der schiffsgebundenen x -Achse von Bedeutung sind. Auf gleiche Weise lassen sich auch die übrigen Funktionen aus dem Gesamtsystem reduziert formulieren. Die zusätzliche Masse ist nur noch abhängig von der Beschleunigung \dot{u} und vereinfacht sich zu

$$b(\dot{u}) := X_{\dot{u}}\dot{u}.$$

Der Rumpfwiderstand X_R bleibt unverändert, doch durch die fehlende Bewegung in Querrichtung tritt weder dynamischer Auftrieb noch Profilwiderstand oder Querströmungswiderstand auf. Einsetzen von $v = r = 0$ in die zugehörigen Gleichungen bestätigt dies. Damit lassen sich die weiteren Rumpfkraft durch (3.14) in diesem Modell ausdrücken als

$$g(u) := -X_R = -(a_R u + b_R u|u| + c_R u^3).$$

Zur Reduzierung der aerodynamischen Kraft X_A wird die ebenfalls vereinfachte Modellierung des Windes betrachtet. Es wird angenommen, dass der konstante Wind in diesem vereinfachten Fall ausschließlich parallel zur Bewegungslinie des Schiffes wehen kann, entweder mit einer positiven oder negativen Windgeschwindigkeit s , wobei $s \geq 0$ bei Gegenwind gilt. In Abbildung 4.1 ist ebenfalls die Modellierung des wahren Windes (blau) dargestellt. Durch dieselben Argumentationen wie in Abschnitt 3.3.2 lässt sich

der wahre Wind darstellen als $V_W = -s$ und der Fahrtwind entspricht genau der umgekehrten Geschwindigkeit $V_F = -u$. Für den scheinbaren Wind, dargestellt Abbildung 4.1 in rot, ergibt sich dann

$$V_A = -(s + u)$$

mit der Windgeschwindigkeit $s_A = |s + u|$ und dem Angriffswinkel $\beta_A = 0$, falls $s + u \geq 0$ gilt und $\beta_A = \pi$ sonst. Daraus ergibt sich der Zusammenhang

$$s_A^2 \cos \beta_A = |s + u|(s + u),$$

woraus sich aus (3.21) die Windkraft

$$w(u, s) := X_A = - \underbrace{\frac{\rho_A}{2} k_X A_F}_{=: K_X} |s + u|(s + u) \quad (4.1)$$

ableiten lässt. Dabei ist ρ_A die Luftdichte und die Schiffsparameter $k_X, A_F \in \mathbb{R}_{>0}$ sind wie in Kapitel 3 definiert.

Auch die Schlepperboote können ausschließlich in Richtung der Längsachse des Schiffes ziehen, sodass deren Kräfte μ_1 und μ_2 in einer einzelnen Kraft $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\mu = \mu_1 + \mu_2$ zusammengefasst und eindimensional modelliert werden können durch

$$T(\mu) = \mu.$$

Eine negative Kraft zieht das Schiff nach hinten, eine positive nach vorne. Zusätzlich soll weiterhin die Schlepperbeschränkung $\|\mu\|_\infty \leq \bar{\mu} \in \mathbb{R}_{>0}$ eingehalten werden, wobei $\bar{\mu} = \bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2$ die Summe der einzelnen Beschränkungen bezeichnet. Die vereinfachten Modellannahmen resultieren damit schließlich in der folgenden vereinfachten Systemdynamik.

Satz 4.1. (Vereinfachte Systemdynamik)

Sei (x, u) die Position und Geschwindigkeit des Schiffes entlang einer Bewegungslinie und μ die durch $\bar{\mu} \in \mathbb{R}_+$ beschränkte Schlepperbootkraft. Weiterhin beschreibe der Parameter $s \in \mathbb{R}$ die Geschwindigkeit des Windes. Außerdem modelliert die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Rumpfkraft des Schiffes. Dann wird die Schiffsbewegung entlang dieser Bewegungslinie beschrieben durch die Dynamik

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \\ M\dot{u} &= \mu - K_X |s + u|(s + u) + g(u), \end{aligned}$$

wobei $\|\mu\|_\infty \leq \bar{\mu}$ gilt, mit $M := m - X_{\dot{u}} > 0$ und $K_X > 0$.

Auf Grundlage dieses dynamischen Systems soll nun zur Durchführung einer Risikoanalyse der Begriff der Zulässigkeit eines Windes zunächst motiviert und im Anschluss daran formal eingeführt werden.

4.2 Zulässigkeit des wahren Windes

Die Risikoanalyse basiert auf der Beantwortung der Frage über die Durchführbarkeit eines Manövers bei gegebener Windstärke. Dafür muss zunächst der Begriff des Manövers in dieser Arbeit näher erläutert werden.

Unter einem Manöver wird in diesem Kapitel die geradlinige Bewegung des Schiffes von einer vorab definierten Startposition $x_0 \in \mathbb{R}$ zu einer Endposition $x_1 \in \mathbb{R}$ verstanden. An dieser Stelle wird die zusätzliche Bedingung festgesetzt, dass das Schiff zu Beginn und am Ende des Manövers stillstehen soll. Die Schiffsbewegung hat der vereinfachten Systemdynamik zu genügen und die Beschränkung an die Schlepperbootkraft muss eingehalten werden. Obwohl im vorangegangenen Abschnitt bei der Modellierung dieser Systemdynamik eine explizite Darstellung für die Funktion g gezeigt wurde, wird für die allgemeine Beschreibung eines Manövers hier eine beliebige Modellierung der Rumpfkraft zugelassen, sodass ausschließlich die Eigenschaft $g(0) = 0$, Stetigkeit und fallende Monotonie der Funktion g vorausgesetzt wird. Im Kontext der Rumpfkraft sind insbesondere diese Annahmen gerechtfertigt.

Im Folgenden werden die Start- und Endposition $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, die Beschränkung $\bar{\mu} \in \mathbb{R}_{>0}$ an die Schlepperbootkraft und die Funktion $g \in C(\mathbb{R})$ mit den genannten Eigenschaften als gegeben festgesetzt. Ebenso werden die in Satz 4.1 definierten Parameter des Schiffes $M, K_X \in \mathbb{R}_{>0}$ festgesetzt.

Das Ziel ist nun die Bestimmung der Windstärken, bei denen das gewünschte Manöver durchgeführt werden kann. Dazu wird der Begriff der *Zulässigkeit eines Windes* bezüglich eines Manövers definiert.

Definition 4.2. (Zulässigkeit des Windes)

Der Parameter $s \in \mathbb{R}$ heißt *zulässig*, falls eine Lösung (x, u, μ, t_f) zum System

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}(t) = u(t)t_f \\ \dot{u}(t) = \left(\mu(t) - K_X |s + u(t)| (s + u(t)) + g(u(t)) \right) \frac{t_f}{M} \\ x(0) = x_0 \quad u(0) = 0 \\ x(1) = x_1 \quad u(1) = 0 \end{array} \right\} \quad (P(s))$$

mit $x, u \in C^1([0, 1])$, $\mu \in C([0, 1])$, $\|\mu\|_\infty \leq \bar{\mu}$ und $t_f > 0$ existiert.

Das System $(P(s))$ basiert auf der vereinfachten Systemdynamik aus Satz 4.1. Es wurde auf eine feste Endzeit transformiert, wie in Abschnitt 2.2.2 gezeigt, wobei der Parameter t_f die eigentliche Endzeit darstellt. Falls demnach bei gegebenem Wind $s \in \mathbb{R}$ eine Trajektorie (x, u) , eine Steuerung μ und eine Endzeit t_f gefunden werden können, sodass das gewünschte Manöver durchführbar ist, wird dieser Wind *zulässig* genannt. Ziel ist nun die Berechnung der *Zulässigkeitsmenge*.

Definition 4.3. (Zulässigkeitsmenge)

Die Menge

$$\mathcal{S} = \left\{ s \in \mathbb{R} \mid s \text{ ist zulässig bzgl. } (P(s)) \right\}$$

wird *Zulässigkeitsmenge* genannt.

Auch in der Theorie optimaler Steuerprozesse in Kapitel 2 ist von zulässigen Lösungen die Rede. Bei solchen zulässigen Lösungen handelt es sich um Zustände und Steuerungen, die die Dynamik und die Nebenbedingungen einhalten. Hier wird ein Wind als zulässig deklariert, falls zu diesem Wind eine zulässige Lösung existiert. Aufgrund ihrer verwandten Definitionen ist die Wahl des Begriffes an dieser Stelle gerechtfertigt. Falls dabei nicht aus dem Kontext klar wird, ob es sich um eine *zulässige Lösung* und eine *zulässige Windstärke* handelt, wird dies explizit ausgeführt.

Um nun die Zulässigkeitsmenge \mathcal{S} explizit zu berechnen, können zwei unterschiedliche Ansätze verfolgt werden. Zunächst liegt der Fokus auf einer theoretischen Herleitung, wobei insbesondere deutlich wird, dass es sich bei dieser Menge um ein Intervall handelt. Diese Information rechtfertigt die Vorgehensweise des zweiten Ansatzes, welcher auf der numerischen Lösung eines optimalen Steuerprozesses basiert.

4.3 Analytische Berechnung der Zulässigkeitsmenge

Zur Berechnung der Zulässigkeitsmenge \mathcal{S} werden zunächst einige Lemmata benötigt. Sie werden unter anderem im Beweis des Hauptresultates dieses Abschnitts, der expliziten Darstellung der Zulässigkeitsmenge, benötigt und stützen zudem die Intuition und das Verständnis über die Bewegung des Schiffes und den Einfluss der Windkraft.

Das erste Lemma stellt sicher, dass eine beliebige Trajektorie, also ein Weg zwischen Start- und Endposition, vorhanden ist, ungeachtet der speziellen Modellierung der Schiffsdynamik.

Lemma 4.4. (Existenz einer Trajektorie)

Es existiert eine Lösung (x, u, h) zum eindimensionalen System

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= u(t) & x(0) &= x_0 & u(0) &= 0 \\ \dot{u}(t) &= h(t) & x(1) &= x_1 & u(1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

mit $x, u \in C^1([0, 1])$, $h \in C([0, 1])$.

Beweis. Betrachte die Funktionen

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{cases} \frac{16}{3}(x_1 - x_0)t^3 + x_0 & , t \in [0, \frac{1}{4}) \\ \frac{1}{6}(x_1 - x_0)(-32t^3 + 48t^2 - 12t + 1) + x_0 & , t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \\ \frac{1}{3}(x_1 - x_0)(16t^3 - 48t^2 + 48t - 13) + x_0 & , t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases} \\ u(t) &= \begin{cases} 16(x_1 - x_0)t^2 & , t \in [0, \frac{1}{4}) \\ 2(x_1 - x_0)(-8t^2 + 8t - 1) & , t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \\ 16(x_1 - x_0)(t^2 - 2t + 1) & , t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases} \\ h(t) &= \begin{cases} 32(x_1 - x_0)t & , t \in [0, \frac{1}{4}) \\ 16(x_1 - x_0)(-2t + 1) & , t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \\ 32(x_1 - x_0)(t - 1) & , t \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases} \end{aligned}$$

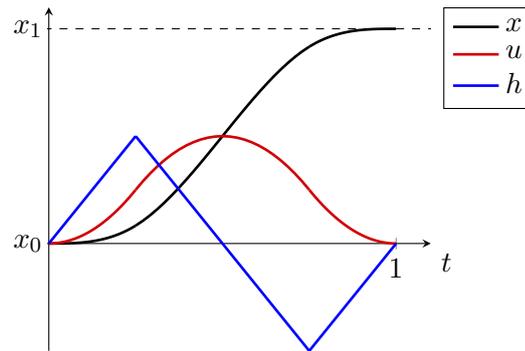


Abbildung 4.2: Skizzierte Lösung (x, u, h) des Systems (4.2).

Damit ist (x, u, h) eine Lösung des Systems (4.2). In Abbildung 4.2 ist eine solche Lösung beispielhaft dargestellt. \square

Die Windkraft, die auf das ruhende Schiff wirkt, beträgt $w(0, s) = -K_X|s|s$. Falls die Schlepperboote ununterbrochen mit einer konstanten Kraft ziehen, die genau dieser Kraft entgegengesetzt ist, dann bewegt sich das Schiff nicht von der Stelle.

Lemma 4.5. (Konstante Lösung)

Sei (x, u, μ, t_f) eine Lösung des Systems $(P(s))$. Falls $\mu \equiv K_X|s|s$ gilt, ist $u \equiv 0$.

Beweis. Setzen wir in der Schiffsdynamik $(P(s))$ die Bedingung $\mu \equiv K_X|s|s$ ein, so ergibt sich

$$\dot{u} = (K_X|s|s - K_X|s + u|(s + u) + g(u)) \frac{t_f}{M}.$$

Die rechte Seite besitzt die triviale Nullstelle $u = 0$. Außerdem ist die rechte Seite streng monoton fallend in u , da sowohl $g(u)$ als auch $-K_X|s + u|(s + u)$ streng monoton fallend in u sind. Die triviale Nullstelle ist somit die einzige und es ergibt sich die Äquivalenz

$$\dot{u}(t) = 0 \iff u(t) = 0, \quad \text{für alle } t \in [0, 1]. \tag{4.3}$$

Da stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen ihr Maximum und Minimum annehmen, ist dies auch für die Lösung $u \in C^1([0, 1])$ der Fall. Sei nun $t_0 \in [0, 1]$ eine Minimal- oder Maximalstelle. Dabei werden zwei Fälle unterschieden:

- i. Das Minimum bzw. Maximum wird innerhalb des Intervalls angenommen, sodass $\dot{u}(t_0) = 0$ gilt. Nach (4.3) gilt damit $u(t_0) = 0$.
- ii. Das Minimum bzw. Maximum wird am Rand des Intervalls angenommen. Damit ist $t_0 \in \{0, 1\}$, sodass mit den Randbedingungen $u(t_0) = 0$ folgt.

In jedem Fall gilt $u(t_0) = 0$, d.h. alle Maxima und Minima besitzen denselben Funktionswert. Die Lösung ist somit konstant $u \equiv 0$. \square

Befinden sich die Schlepperbootkräfte genau im Gleichgewicht mit der Windkraft, bewegt sich ein stillstehendes Schiff nicht. Zu Beginn eines Manövers befindet sich das

Schiff allerdings in Ruhe. Um das Schiff nun in Windrichtung, das heißt in die Richtung, aus der der Wind weht, bewegen zu können, müssen die Schlepperboote in der Lage sein, noch kräftiger zu ziehen. Sind sie es nicht, lässt sich das Schiff ausschließlich entgegen der Windrichtung bewegen. Bei Gegenwind kann es also nur rückwärts fahren, bei Rückenwind nur vorwärts.

Lemma 4.6. (Bewegung entgegen der Windrichtung)

Sei (x, u, μ, t_f) eine Lösung des Systems $(P(s))$. Falls die Ungleichung $\bar{\mu} \leq K_X s^2$ erfüllt ist, gilt im Fall $s \geq 0$ der Zusammenhang $u(t) \leq 0$ und im Fall $s \leq 0$ ist $u(t) \geq 0$ für alle $t \in [0, 1]$.

Beweis. Es gelte die Ungleichung $\bar{\mu} \leq K_X s^2$. Wir werden zunächst ausführlich den Fall des Gegenwindes mit $s \geq 0$ mithilfe eines Widerspruchs beweisen. Anschließend wird der Fall Rückenwind mit $s \leq 0$ durch analoge Argumentationen kurz begründet.

Sei $s \geq 0$. Angenommen, das Schiff könnte sich in Windrichtung bewegen, in diesem Fall also nach vorne. Dann existiert ein Zeitpunkt $t_r \in [0, 1]$ mit $u(t_r) > 0$. Aus der Stetigkeit von u ergibt sich, dass die Menge

$$\mathcal{M} := \{t \leq t_r \mid u(t) = 0\} \subset [0, 1]$$

abgeschlossen ist. Weiterhin ist sie per Definition nach oben beschränkt und aufgrund der Randbedingungen nichtleer, weshalb ihr Maximum $t_\ell := \max \mathcal{M}$ existiert. Zum Zeitpunkt t_ℓ steht das Schiff also bis zum Zeitpunkt t_r das letzte Mal still. Durch die Konstruktion von t_ℓ gibt es kein $t \in (t_\ell, t_r)$ mit $u(t) = 0$. Gemeinsam mit $u(t_\ell) = 0$ und $u(t_r) > 0$ lässt sich die Eigenschaft $u(t) > 0$ für alle $t \in (t_\ell, t_r)$ ableiten. Für jedes $t \in (t_\ell, t_r)$ gilt mit der Dynamik und der Monotonieeigenschaft der beteiligten Funktionen die Abschätzung

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= \left(\mu(t) - K_X \underbrace{|s + u(t)|}_{>|s|s} (s + u(t)) + \underbrace{g(u(t))}_{\leq 0} \right) \frac{t_f}{M} \\ &< \left(\mu(t) - K_X |s|s \right) \frac{t_f}{M} \leq \left(\bar{\mu} - K_X s^2 \right) \frac{t_f}{M} \leq 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

wobei hier $|s|s = s^2$ für $s \geq 0$ genutzt wird. Nach dem Mittelwertsatz existiert allerdings ein $t_0 \in (t_\ell, t_r)$, sodass

$$\dot{u}(t_0) = \frac{u(t_r) - u(t_\ell)}{t_r - t_\ell} = \frac{u(t_r)}{t_r - t_\ell} > 0$$

gilt, was im Widerspruch zu (4.4) steht. Damit kann solch ein Zeitpunkt t_r nicht existieren, sodass $u(t) \leq 0$ für alle $t \in [0, 1]$ gelten muss.

Analoge Überlegungen ergeben ebenfalls die Behauptung für $s \leq 0$ durch Umkehren der Bewegungsrichtung. \square

Im weiteren Verlauf wird die Lipschitz-Stetigkeit der Funktion g benötigt.

Bemerkung 4.7. (Lipschitz-Stetigkeit von g)

Die Funktion g in der Dynamik von $(P(s))$ modelliert den Rumpfwiderstand, genauer den Widerstand, den das Schiff durch das Wasser erfährt. Es kann angenommen werden, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass g auf $[-\varepsilon, \varepsilon]$ Lipschitz-stetig ist. Damit ist insbesondere die Funktion

$$F(u) := (K_X|s|s - K_X|s+u|(s+u) + g(u)) \frac{1}{M}$$

Lipschitz-stetig um $u = 0$.

Unter dieser Annahme erfüllt die Funktion F die Voraussetzungen des folgenden Lemmas. Dieses besagt damit insbesondere, dass ein bewegtes Schiff nicht anhalten oder gar die Richtung wechseln kann, falls die Schlepperboote nur mit der Kraft $K_X|s|s$ ziehen. Der Anfangszeitpunkt wird hier beliebig gesetzt, da sich das Schiff in dem in dieser Arbeit definierten Manöver zu Beginn in Ruhe befinden soll. Hier geht es allerdings um ein Schiff, welches bereits in Bewegung ist.

Lemma 4.8. (Unaufhaltbarkeit)

Sei $u \in C^1([t_0, 1])$ eine Lösung des Systems

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = f(u(t))t_f \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

mit $u_0 \neq 0$ und $t_f > 0$. Weiterhin sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, monoton fallende Funktion mit $f(0) = 0$ und zusätzlich sei f Lipschitz-stetig um $u = 0$. Dann folgt ebenso $u(1) \neq 0$ mit $\text{sgn } u_0 = \text{sgn } u(1)$.

Beweis. Wir beweisen das Lemma für eine Rückwärtsbewegung mit $u_0 < 0$ durch einen Widerspruch. Der Beweis für die Vorwärtsbewegung mit $u_0 > 0$ ergibt sich durch analoge Überlegungen.

Sei $u_0 < 0$. Angenommen, es würde $u(1) \geq 0$ gelten. Das Schiff wäre damit in der Lage, anzuhalten oder sogar die Richtung zu ändern. Aus der Stetigkeit von u ergibt sich, dass

$$\mathcal{M} := \{t \in [t_0, 1] \mid u(t) = 0\} \subset [t_0, 1]$$

abgeschlossen ist. Durch Anwendung des Zwischenwertsatzes folgt weiterhin, dass diese Menge nichtleer ist. Außerdem ist sie per Konstruktion nach unten beschränkt, weshalb $t_r := \min \mathcal{M}$ existiert. Zum Zeitpunkt t_r hat es das Schiff also das erste Mal geschafft zu stoppen. Dabei muss $t_r > t_0$ aufgrund der Anfangsbedingung gelten. Mit dieser Definition gilt außerdem $u(t) < 0$ für alle $t \in [t_0, t_r)$.

Betrachte weiterhin die Funktion $U : [t_0, 2t_r] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$U(t) = \begin{cases} u(t) & , \text{ falls } t_0 \leq t \leq t_r \\ 0 & , \text{ falls } t_r < t \leq 2t_r \end{cases}$$

Diese Funktion löst das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = f(u(t))t_f \\ u(t_r) = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

auf dem Intervall $[t_0, 2t_r]$. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf in [13] ist U die eindeutig bestimmte Lösung auf einem abgeschlossenen Intervall $[t_r - h, t_r + h]$ mit $h > 0$. Allerdings ist auch die triviale Lösung $U_0 \equiv 0$ eine Lösung dieses Anfangswertproblems (4.5). Aus der Eindeutigkeit folgt damit, dass $U(t) = 0$ für $t \in [t_r - h, t_r + h]$ gilt. Insbesondere bedeutet dies, dass $u(t) = 0$ für $t \in [t_r - h, t_r]$ ist, was im Widerspruch zur Definition von t_r steht. Damit kann $u(1) \geq 0$ nicht gelten, sondern es ist $u(1) < 0$, sodass die Behauptung $\operatorname{sgn} u_0 = \operatorname{sgn} u(1)$ gilt. \square

Die Aussage des Lemmas wollen wir nutzen, allerdings ziehen die Schlepperboote im Allgemeinen nicht durchgängig mit der Kraft $K_X|s|s$. Daher wird zusätzlich noch das nachfolgende Lemma benötigt, welches zwei Lösungen anhand der aufgewendeten Schlepperkräfte miteinander vergleicht.

Lemma 4.9. (Vergleichslemma)

Für $t_0 \in (0, 1)$ seien $u_1, u_2 \in C^1([t_0, 1])$ jeweils Lösungen der Systeme

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u}(t) = \left(\mu_1(t) - K_X|s + u(t)|(s + u(t)) + g(u(t)) \right) \frac{t_f}{M} \\ u(t_0) = u_0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

und

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u}(t) = \left(\mu_2(t) - K_X|s + u(t)|(s + u(t)) + g(u(t)) \right) \frac{t_f}{M} \\ u(t_0) = u_0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

mit $t_f > 0$ und $\mu_1, \mu_2 \in C([t_0, 1])$, $\mu_1(t) \leq \mu_2(t)$ für alle $t \in [t_0, 1]$. Dann ist $u_1(t) \leq u_2(t)$ für alle $t \in [t_0, 1]$.

Beweis. Definiere die Differenzfunktion $h(t) := u_1(t) - u_2(t)$ für $t \in [t_0, 1]$. Der Beweis folgt nun der Struktur des Beweises von Lemma 4.6. Angenommen, es existiert ein $t_r \in [t_0, 1]$ mit $h(t_r) > 0$. Aus der Stetigkeit von h ergibt sich, dass die Menge

$$\mathcal{M} := \{t \leq t_r \mid h(t) = 0\}$$

abgeschlossen ist. Weiterhin ist sie aufgrund der Anfangsbedingungen nichtleer und per Konstruktion nach oben beschränkt, weshalb $t_\ell := \max \mathcal{M}$ existiert. Zum Zeitpunkt t_ℓ stimmen damit die beiden Geschwindigkeiten u_1 und u_2 das letzte Mal bis zum Zeitpunkt t_r überein. Die Konstruktion von t_ℓ sichert die Tatsache, dass kein $t \in (t_\ell, t_r)$ mit $h(t) = 0$ existiert. Mit $h(t_\ell) = 0$ und $h(t_r) > 0$ lässt sich daraus die Eigenschaft

$$u_1(t) - u_2(t) = h(t) > 0 \quad \text{für alle } t \in (t_\ell, t_r)$$

ableiten. Für jedes $t \in (t_\ell, t_r)$ gilt damit

$$\begin{aligned} \dot{h}(t) &= \left(\mu_1(t) - K_X \underbrace{|s + u_1|}_{>|s+u_2|(s+u_2)} (s + u_1) + \underbrace{g(u_1)}_{\leq g(u_2)} \right) \frac{t_f}{M} - \mu_2(t) + K_X|s + u_2|(s + u_2) - g(u_2) \frac{t_f}{M} \\ &< (\mu_1(t) - \mu_2(t)) \frac{t_f}{M} \leq 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

aufgrund der Monotonieigenschaften der beteiligten Funktionen. Nach dem Mittelwertsatz existiert allerdings ein $t_0 \in (t_\ell, t_r)$, sodass

$$\dot{h}(t_0) = \frac{h(t_r) - h(t_\ell)}{t_r - t_\ell} = \frac{h(t_r)}{t_r - t_\ell} > 0$$

gilt, was im Widerspruch zu (4.6) steht. Damit kann solch ein t_r nicht existieren, sodass $h(t) \leq 0$ und damit $u_1(t) \leq u_2(t)$ für alle $t \in [t_0, 1]$ gelten muss. \square

Mithilfe dieser Lemmata lässt sich nun das Hauptresultat des Kapitels formulieren und beweisen. Bei der Berechnung der Zulässigkeitsmenge muss zwischen zwei unterschiedlichen Arten von Manövern unterschieden werden: Stationäre und bewegte Manöver. Bei ersteren stimmen Startposition x_0 und Endposition x_1 des Schiffes überein und es ist ausreichend, dass sich die Schlepperkräfte und die Windkraft zu jedem Zeitpunkt im Gleichgewicht befinden. In Lemma 4.5 wurde dieses Gleichgewicht bereits gefunden. Stimmen Start- und Endposition allerdings nicht überein, so handelt es sich um ein bewegtes Manöver. Damit das Schiff effektiv in Bewegung gesetzt werden kann, müssen die Schlepperkräfte - wenn auch nur minimal - größer als die Windkraft bei Ruhe sein.

Satz 4.10. (Zulässigkeitsmenge)

Sei $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ Lipschitz-stetig um $g(0)$. Die Zulässigkeitsmenge \mathcal{S} bezüglich des Systems $(P(s))$ lautet

$$\mathcal{S} = \begin{cases} \left(-\sqrt{\frac{\bar{\mu}}{K_X}}, \sqrt{\frac{\bar{\mu}}{K_X}} \right) & , \text{ falls } x_0 \neq x_1 \\ \left[-\sqrt{\frac{\bar{\mu}}{K_X}}, \sqrt{\frac{\bar{\mu}}{K_X}} \right] & , \text{ falls } x_0 = x_1 \end{cases}$$

Beweisidee. Der Beweis des Satzes ist sehr umfangreich, technisch, und enthält einige Fallunterscheidungen. Zur besseren Übersicht wird zunächst die Beweisidee skizziert.

Wir beweisen zuerst die beiden Mengeninklusionen

$$\left(-\sqrt{\frac{\bar{\mu}}{K_X}}, \sqrt{\frac{\bar{\mu}}{K_X}} \right) \stackrel{\text{i.}}{\subseteq} \mathcal{S} \stackrel{\text{ii.}}{\subseteq} \left[-\sqrt{\frac{\bar{\mu}}{K_X}}, \sqrt{\frac{\bar{\mu}}{K_X}} \right].$$

An den Intervallgrenzen entspricht die Schlepperbeschränkung genau der Windkraft, die auf das ruhende Schiff wirkt. Der erste Beweis ist konstruktiv. Ist die Windkraft nur minimal kleiner als die Beschränkung an die Schlepperkräfte, so lässt sich eine zulässige Lösung der Dynamik konstruieren, wobei gerade so viel Kraft von den Schlepperbooten entgegen der Windkraft auf das Schiff ausgeübt werden kann, dass es sich mit sehr geringer Geschwindigkeit fortbewegt. Dabei können die dynamischen Effekte, die durch die Funktion g hervorgerufen werden, nahezu vernachlässigt werden. Der zweite Beweis erfolgt durch einen Widerspruch unter Ausnutzung des Lemmas 4.6. Zum Ende des Manövers muss das Schiff stillstehen. Bei einer Windstärke außerhalb des abgeschlossenen Intervalls würde eine Beschleunigung entgegen der Windrichtung auf das Schiff wirken, da die Schlepperboote über nicht genügend Kraft verfügen. Damit es zum Ende stillsteht, müsste es sich zuvor in diese Windrichtung bewegt haben. Dies ist allerdings nicht möglich, da sich das Schiff aufgrund der starken Windstärke nach Lemma 4.6 nur entgegen der Windrichtung bewegen könnte.

Die Frage ist nun, ob die Intervallgrenzen in der Zulässigkeitsmenge \mathcal{S} enthalten sind. Wie eingangs beschrieben, müssen wir dazu unterscheiden, ob das Schiff lediglich auf der Stelle gehalten oder tatsächlich bewegt werden soll. Im ersten Fall lässt sich mithilfe einer trivialen Lösung mit konstanter Geschwindigkeit Null zeigen, dass die Intervallgrenzen in der Zulässigkeitsmenge \mathcal{S} enthalten sind

$$\text{iii. } \pm \sqrt{\frac{\bar{\mu}}{K_X}} \in \mathcal{S} \quad \text{falls } x_0 = x_1.$$

Im zweiten Fall wird durch einen Widerspruch gezeigt, dass

$$\text{iv. } \pm \sqrt{\frac{\bar{\mu}}{K_X}} \notin \mathcal{S} \quad \text{falls } x_0 \neq x_1$$

gilt. Entspricht die Windstärke den Intervallgrenzen, so kann sich das Schiff nach Lemma 4.6 nur entgegen der Windrichtung bewegen. Aus $x_0 \neq x_1$ folgt, dass es einen Zeitpunkt gibt, an dem es auf jeden Fall in Bewegung sein muss. Würden nun die Schlepperboote konstant so stark in Windrichtung ziehen, wie sie könnten, wären sie nach dem Unaufhaltbarkeits-Lemma 4.8 dennoch nicht in der Lage, das Schiff anzuhalten. Wenn sie nun sogar zeitweise weniger stark ziehen, lässt sich mit dem Vergleichslemma 4.9 zeigen, dass auch dann kein Anhalten möglich ist. Da das Schiff zum Ende des Manövers stillstehen muss, ergibt sich damit ein Widerspruch.

Mit diesen vier Eigenschaften ergeben sich die Mengengleichheiten aus der Aussage des Satzes.

Beweis. Die zuvor erläuterten Beweisschritte werden nun formal durchgeführt.

i. Sei $|s| < \sqrt{\frac{\bar{\mu}}{K_X}}$. Nach Lemma 4.4 existiert eine Lösung (x, u, h) zum System

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t) & x(0) = x_0 & u(0) = 0 \\ \dot{u}(t) = h(t) & x(1) = x_1 & u(1) = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

mit $x, u \in C^1([0, 1])$, $h \in C([0, 1])$. Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ lässt sich durch Addition einer Null der Zusammenhang

$$\varepsilon \dot{u} = \varepsilon h = \underbrace{\left(M\varepsilon^2 h + K_X |s + \varepsilon u|(s + \varepsilon u) - g(\varepsilon u) \right)}_{=: \mu_\varepsilon} - K_X |s + \varepsilon u|(s + \varepsilon u) + g(\varepsilon u) \frac{1}{M\varepsilon}$$

feststellen. Aufgrund der Stetigkeit aller beteiligten Komponenten, der Bedingung $g(0) = 0$ und der gestellten Annahme ergibt sich damit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mu_\varepsilon\|_\infty = K_X s^2 < \bar{\mu}.$$

Wegen der strikten Ungleichung ist die Existenz eines $\tilde{\varepsilon} > 0$ gesichert, sodass $\|\mu_{\tilde{\varepsilon}}\|_\infty \leq \bar{\mu}$ gilt. Gemeinsam mit den Zusammenhängen aus (4.7) ergibt sich

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t) = \tilde{\varepsilon} u(t) \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \\ \tilde{\varepsilon} \dot{u}(t) = \left(\mu_{\tilde{\varepsilon}}(t) - K_X |s + \tilde{\varepsilon} u(t)|(s + \tilde{\varepsilon} u(t)) + g(\tilde{\varepsilon} u(t)) \right) \frac{1}{M\tilde{\varepsilon}} \\ x(0) = x_0 & \tilde{\varepsilon} u(0) = 0 \\ x(1) = x_1 & \tilde{\varepsilon} u(1) = 0 \end{cases}$$

für $t \in [0, 1]$, sodass $(x, \tilde{\varepsilon} u, \mu_{\tilde{\varepsilon}}, \frac{1}{\tilde{\varepsilon}})$ eine Lösung von $(P(s))$ und s somit zulässig ist. Es gilt demnach $s \in \mathcal{S}$.

- ii. Beweis durch Widerspruch. Sei $s \in \mathcal{S}$ zulässig. Angenommen, es gelte $|s| > \sqrt{\frac{\bar{\mu}}{K_X}}$, das heißt $\bar{\mu} < K_X s^2$. Aus der Zulässigkeit von s ergibt sich, dass eine Lösung (x^*, u^*, μ^*, t_f^*) zum System $(P(s))$ existiert.

Betrachten wir zunächst den Fall $s \geq 0$. Nach Lemma 4.6 gilt

$$u^*(t) \leq 0 \quad \text{für alle } t \in [0, 1]. \tag{4.8}$$

Die Randbedingungen müssen erfüllt sein, sodass $u^*(1) = 0$ gilt. Durch die Dynamik lässt sich mit der Positivität von s die Ungleichung

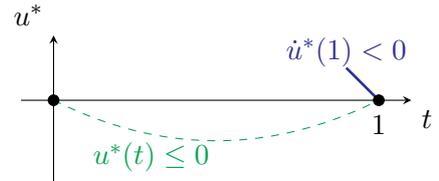
$$\dot{u}^*(1) = (\mu^*(1) - K_X |s|) \frac{t_f}{M} \leq (\bar{\mu} - K_X s^2) \frac{t_f}{M} < 0 \tag{4.9}$$

folgern. Die nebenstehende Abbildung visualisiert diese Situation. In grün wird schematisch die Eigenschaft (4.8) dargestellt, in blau Eigenschaft (4.9). Es wird deutlich, dass diese beiden Tatsachen im Widerspruch zueinander stehen. Mathematisch ergibt sich dieser Widerspruch durch die folgenden Überlegungen. Aufgrund der Stetigkeit von \dot{u}^* existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass

$$\dot{u}^*(t) < 0 \quad \text{für alle } t \in (1 - \varepsilon, 1]$$

gilt. Damit ergibt sich insbesondere

$$u^*(1 - \frac{\varepsilon}{2}) > 0,$$



im Widerspruch zu (4.8), sodass der Parameter s in diesem Fall nicht zulässig sein kann. Erreichen des gewünschten Widerspruchs beweist die Behauptung für den Fall $s \geq 0$.

Für den Fall $s < 0$ ergibt sich durch analoge Überlegungen mit umgekehrten Ungleichungszeichen ebenfalls der gewünschte Widerspruch.

- iii. Sei nun $|s| = \sqrt{\frac{\bar{\mu}}{K_X}}$ und es gelte $x_0 = x_1$. Damit ist die konstante Lösung $(x, u, \mu, t_f) \equiv (x_0, 0, K_X |s|, 1)$ nach Lemma 4.5 eine Lösung des Systems $(P(s))$. Damit ist s zulässig, also $s \in \mathcal{S}$.

- iv. Beweis durch Widerspruch. Sei $s \in \mathcal{S}$ zulässig und $x_0 \neq x_1$. Angenommen, es gelte $|s| = \sqrt{\frac{\bar{\mu}}{K_X}}$, das heißt $\bar{\mu} = K_X s^2$. Aus der Zulässigkeit von s ergibt sich, dass eine Lösung (x^*, u^*, μ^*, t_f^*) zum System $(P(s))$ existiert.

Betrachten wir zunächst den Fall $s \geq 0$. Nach Lemma 4.6 ist $u^*(t) \leq 0$ für alle $t \in [0, 1]$, sodass die Dynamik mit $x_0 < x_1$ keine Lösung besitzen kann. Der Parameter s ist demnach für $x_0 < x_1$ nicht zulässig, was für diesen Fall bereits den gewünschten Widerspruch ergibt. Es bleibt noch der Fall $x_1 < x_0$ zu betrachten. Falls $u^* \equiv 0$, steht dies im Widerspruch zur Voraussetzung $x_1 < x_0$. Daher existiert ein $t_0 \in (0, 1)$ mit $u_0 := u^*(t_0) < 0$. Betrachte nun die Systeme

$$\left. \begin{cases} \dot{u}(t) = (\mu(t) - K_X |s + u(t)| (s + u(t)) + g(u(t))) \frac{t_f}{M} \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \right\} (P_1)$$

und

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u}(t) = \left(\pm K_X s^2 - K_X |s + u(t)| (s + u(t)) + g(u(t)) \right) \frac{t_f}{M} \\ u(t_0) = u_0 \end{array} \right\} (P_{2\pm}).$$

Eine Lösung $u_1 : [t_0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ von (P_1) ist gegeben durch $u_1(t) = u^*(t)$ für alle $t \in [t_0, 1]$. Insbesondere gilt aus der Randbedingung von $(P(s))$

$$u_1(1) = u^*(1) = 0. \quad (4.10)$$

Sei weiterhin $u_2 : [t_0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von (P_{2+}) . Aufgrund der Abschätzung $\mu(t) \leq \bar{\mu} = K_X s^2$ für alle $t \in [0, 1]$ gilt mit Lemma 4.9

$$u_1(t) \leq u_2(t) \quad \text{für alle } t \in [t_0, 1].$$

Aus Lemma 4.8 und Bemerkung 4.7 lässt sich außerdem $u_2(1) < 0$ folgern. Daraus ergibt sich direkt der Zusammenhang $u_1(1) \leq u_2(1) < 0$, im Widerspruch zu (4.10). Damit wurde auch für $x_1 < x_0$ der gewünschte Widerspruch erreicht und die Behauptung für $s \geq 0$ bewiesen.

Der Fall $s < 0$ lässt sich analog beweisen. Hier kann die Dynamik aufgrund von Lemma 4.6 keine Lösung für $x_1 < x_0$ besitzen, sodass noch der Fall $x_0 < x_1$ zu betrachten bleibt. Es existiert daher ein $t_0 \in (0, 1)$ mit $u_0 := u^*(t_0)$. Betrachte nun die beiden Systeme (P_1) und (P_{2-}) mit den jeweiligen Lösungen $u_1, u_2 : [t_0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u_1(t) = u^*(t)$ für alle $t \in [t_0, 1]$. Analog zu oben ergibt sich auch hier $u_1(1) = 0$. Aufgrund der umgekehrten Abschätzung $-K_X s^2 = -\bar{\mu} \leq \mu(t)$ für alle $t \in [0, 1]$ ergibt sich mit Lemma 4.9 diesmal

$$u_2(t) \leq u_1(t) \quad \text{für alle } t \in [t_0, 1].$$

Analog ergibt sich aus Lemma 4.8 und Bemerkung 4.7 die Eigenschaft $u_2(1) > 0$, zusammengesetzt bedeutet dies $u_1(1) \geq u_2(1) > 0$, im Widerspruch zum oben Gezeigten. Damit wurde auch für diesen Fall der Widerspruch erreicht und die Behauptung bewiesen. \square

Dieser Satz liefert eine explizite Berechnungsmethode, um die Zulässigkeitsmenge \mathcal{S} zu berechnen. Im folgenden Abschnitt wird eine weitere Methode zur Berechnung dieser Menge vorgestellt.

4.4 Berechnung der Zulässigkeitsmenge durch einen Optimalsteuerungsprozess

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, dass es sich bei der Zulässigkeitsmenge in dem vereinfachten Modell um ein Intervall handelt. Diese Eigenschaft ermöglicht es, alternativ die Zulässigkeitsmenge mithilfe eines optimalen Steuerprozesses zu berechnen, da lediglich Maximum und Minimum des Intervalls zu bestimmen sind.

Ziel ist die Berechnung der maximalen bzw. minimalen Windstärke s , sodass das Problem $(P(s))$ eine Lösung besitzt. Daraus wird ein optimaler Steuerprozess formuliert.

Satz 4.11. (Optimalsteuerungsprozess)

Sei $(x^*, u^*, \mu^*, t_f^*, s^*)$ eine Lösung des optimalen Steuerproblems

$$\begin{aligned} & \max && s \\ \text{unter} &&& \dot{x}(t) = u(t)t_f \\ &&& M\dot{u}(t) = (\mu(t) - K_X|s + u(t)|(s + u(t)) + g(u(t)))t_f \\ &&& x(0) = x_0 \quad u(0) = 0 \\ &&& x(1) = x_1 \quad u(1) = 0 \\ &&& |\mu(t)| \leq \bar{\mu} \quad \text{für alle } t \in [0, 1] \end{aligned}$$

mit $x, u \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$, $\mu \in C([0, 1], \mathbb{R})$ und $t_f > 0$. Dann berechnet sich die Zulässigkeitsmenge durch

$$\mathcal{S} = \begin{cases} (-s^*, s^*) & , \text{ falls } x_0 \neq x_1 \\ [-s^*, s^*] & , \text{ falls } x_0 = x_1 \end{cases}.$$

Beweis. Aus den theoretischen Betrachtungen zur Berechnung der Zulässigkeitsmenge \mathcal{S} ergibt sich, dass es sich um ein symmetrisches Intervall handelt, je nach betrachtetem Manöver offen oder abgeschlossen. Per Definition der Zulässigkeit einer Windstärke und der betrachteten Systemdynamik aus $(P(s))$ ergeben sich die Intervallgrenzen direkt aus der maximalen Windstärke, für die eine zulässige Lösung der Dynamik und der Nebenbedingungen existiert. \square

Dieser optimale Steuerprozess kann beispielsweise mit der Softwarebibliothek TRANSWORHP gelöst werden. Die Berechnung der Zulässigkeitsmenge mithilfe eines optimalen Steuerprozesses erscheint an dieser Stelle als nicht nötig, da eine analytische Formulierung vorliegt. In der komplexeren Risikoanalyse im Fall mit drei Freiheitsgraden bringt eine solche Berechnung allerdings einige Vorteile mit sich. Der Vollständigkeit halber wird deshalb auch hier ein solcher optimaler Steuerprozess formuliert.

Im nachfolgenden Abschnitt kann die analytisch hergeleitete Darstellung durch numerische Berechnungen verifiziert werden.

4.5 Vergleich der Ergebnisse beider Methoden

In diesem Abschnitt wird die Zulässigkeitsmenge \mathcal{S} eines Schiffes zum einen mithilfe der theoretisch hergeleiteten Mengendarstellung aus Satz 4.10 und zum anderen durch Lösung des optimalen Steuerprozesses aus Satz 4.11 berechnet.

Alle Parameter und Größen werden in dieser Arbeit in SI-Einheiten angegeben, falls nicht explizit anderes erwähnt wird. Die Windgeschwindigkeiten ergeben sich durch die Berechnungsformeln aus diesem Grund in der SI-Einheit $[\frac{\text{m}}{\text{s}}]$. Wie es im Kontext der Schifffahrt gebräuchlich ist, werden diese Geschwindigkeiten anschließend durch die Berechnungsformel (3.24) in die Einheit Knoten [kn] umgerechnet, welche allerdings keine

Autotransporter		
Masse	m	17 000 000 kg
Formparameter	k_X	1.0
Seitenfläche	A_F	1 200 m ²
Schlepperkraft	$\bar{\mu}$	400 000 N

Tabelle 4.1: Schiffsparameter Autotransporter

SI-Einheit ist. In der eindimensionalen Modellierung des Schiffes werden die Parameter $k_X, A_F \in \mathbb{R}_+$ zur Beschreibung der Schiffsform benötigt sowie die Masse m des Schiffes. Es sollen Näherungswerte für einen Autotransporter berechnet werden, welcher in dem Pilotenszenario im Projekt GalileoNautic 2 zum Einsatz kommt. Dazu werden passende Schiffsparameter gewählt, wie in Tabelle 4.1 aufgeführt, wobei sich an den Daten [6] orientiert wird.

Zur Modellierung der Schiffsdynamik werden weiterhin die zusätzliche Masse $X_{\dot{u}} \in \mathbb{R}$ und die Parameter des Rumpfwiderstandes $a_R, b_R, c_R \in \mathbb{R}_+$ benötigt. Diese werden gemäß der Modellierung aus Kapitel 3 durch die von Pätzold [61] mittels Parameteridentifikation bestimmten Werte durch

$$\begin{aligned} X_{\dot{u}} &= -3\,860\,000 \text{ m} \\ a_R &= 180 \\ b_R &= 2880 \\ c_R &= 3600 \end{aligned}$$

gewählt. Die Funktion g gibt den modellierten Rumpfwiderstand mit diesen Koeffizienten in der Einheit Newton [N] an. Außerdem wird die Luftdichte $\rho_A = 1.2920 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ bei 0°C genutzt. Mit diesen Wahlen von Parametern kann nun der theoretisch hergeleitete Rand s^* der Zulässigkeitsmenge \mathcal{S} nach Satz 4.10 berechnet werden durch

$$s_{\text{theo}}^* = \sqrt{\frac{\bar{\mu}}{K_X}} \approx 22.72 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 44.16 \text{ kn.}$$

Durch Lösung des Optimierungsproblems aus Satz 4.11 mit der Software TransWORHP ergibt sich mit den oben genannten Parametern die maximale Windstärke

$$s_{\text{num}}^* \approx 22.62 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 43.97 \text{ kn.}$$

Dies entspricht lediglich einer Abweichung von 0.4 %, sodass sich die beiden unterschiedlichen Ansätze nicht gegenseitig widersprechen.

Damit wurden zwei gleichwertige Berechnungsmethoden gefunden, um die Zulässigkeitsmenge \mathcal{S} aller wahren Winde zu bestimmen, bei denen das geplante Manöver in diesem vereinfachten Fall durchführbar ist. Befindet sich der aktuelle wahre Wind innerhalb dieser Zulässigkeitsmenge, so ist das Manöver durchführbar und die Information kann an den Lotsen weitergegeben werden.

Kapitel 5

Risikoanalyse

In diesem Kapitel werden die Hauptresultate der Risikoanalyse bezüglich des Windes formuliert und bewiesen. Die hier erlangten Ergebnisse sind, im Gegensatz zum sehr vereinfachten Modell aus dem vorangegangenen Kapitel, in der Realität für die Lotsen von Nutzen und haben aufgrund der komplexeren und realitätsnahen Modellierung einen höheren Anwendungsbezug.

Vorbereitend wurde eine Risikoanalyse bezüglich des Windes mit sehr vereinfachten Modellannahmen durchgeführt. Ziel dieses Kapitels ist die Beantwortung der Frage

„Ist ein geplantes Manöver bei dem angegebenen Wind möglich?“.

Im Gegensatz zu Kapitel 3 wird hier das hergeleitete zweidimensionale Modell mit drei Freiheitsgraden betrachtet. In diesem Kontext wird der wahre Wind nicht nur allein durch die Windstärke beschrieben, sondern mittels der Polarkoordinaten

$$(s, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi] =: \mathbb{R}_+ \times \Pi =: \mathbb{R}_\pi,$$

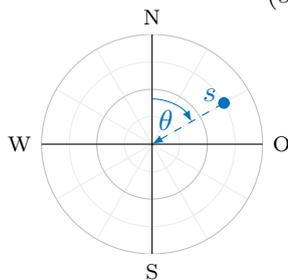


Abbildung 5.1: Darstellung eines wahren Windes (s, θ) in einem Polarplot.

exemplarisch dargestellt, wobei in grün die sicheren und in rot die unsicheren Bereiche charakterisiert werden. Weiterhin ist eine Windsituation durch den blauen Punkt beispielhaft veranschaulicht. Liegt diese Windsituation innerhalb des sicheren Bereiches, so wird die gestellte Frage mit „Ja.“ beantwortet, andernfalls mit „Nein.“.

Die Vorgehensweise, die zur Einteilung der Bereiche verfolgt wird, ähnelt in der grundlegenden Idee den Inhalten von Kapitel 4. Das Ziel besteht darin, für das geplante Manöver eine *Zulässigkeitsmenge* zu berechnen. Diese Menge enthält alle wahren Winde $(s, \theta) \in \mathbb{R}_\pi$, bei denen das geplante Manöver durchgeführt werden kann.

Die Zulässigkeitsmenge für das Manöver kann dann in einem Polarplot wie in Abbildung 5.2 abgebildet werden. Zusätzlich zur binären Information „durchführbar - nicht durchführbar“ erhält der Lotse mittels eines solchen Polarplots noch weitaus mehr Informationen. Die Position der aktuellen Windsituation bezüglich der Zulässigkeitsmenge liefert dem Lotsen die Information, ob das Manöver bei diesem Wind durchführbar ist, ob eventuelle Vorsicht geboten ist oder ob er sogar lieber einen schwächeren Wind abwarten sollte. Liegt der aktuelle wahre Wind beispielsweise sehr nah am Rand, aber dennoch innerhalb der „sicheren“ Menge, so kann das Manöver zwar durchgeführt werden, bei geringfügiger Verstärkung des Windes könnte der Wind jedoch in den „unsicheren“ Bereich übergehen, sodass in solchen Situationen besondere Vorsicht geboten ist. Dabei ist die Eigenschaft „sehr nah am Rand“ in der Realität oft schwer zu messen. In diesem Zusammenhang wird in der Auswertung in Kapitel 2.1.4 eine Sensitivitätsanalyse vorgestellt, wobei die Abhängigkeit der Zulässigkeitsmenge von geringen Störungen untersucht wird.

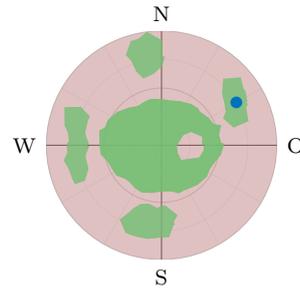


Abbildung 5.2: Einteilung des Polarplots in einen sicheren (grün) und einen unsicheren (rot) Bereich.

Das Kapitel beginnt analog zum vorangegangenen Kapitel mit einer formalen Definition des Begriffes der *Zulässigkeit* und *Zulässigkeitsmenge* in Abschnitt 5.1. Im Anschluss daran werden wir in Abschnitt 5.2 diese Menge auf die Betrachtung sogenannter *kontrollierter Manöver* einschränken. Dabei wird zwischen den *stationären* Manövern und den Manövern in Bewegung unterschieden. Zunächst liegt der Fokus auf der Berechnung der Zulässigkeitsmenge bezüglich der stationären Manöver mithilfe einiger theoretischer Überlegungen in Abschnitt 5.2.1. Darauf folgt die Berechnung der Zulässigkeitsmenge bezüglich der Manöver in Bewegung unter Ausnutzung der Ergebnisse zu stationären Manövern in Abschnitt 5.2.2. Als alternative Berechnungsmethode wird aufbauend auf den theoretischen Überlegungen ein optimaler Steuerprozess formuliert, dessen Lösung ebenfalls die Zulässigkeitsmenge der kontrollierten Manöver liefert.

5.1 Zulässigkeit

Um die gestellte Frage über die Durchführbarkeit eines Manövers beantworten zu können, wollen wir auch hier zunächst den Begriff des Manövers genauer definieren. Analog zum eindimensionalen Fall beschreibt ein Manöver die Bewegung eines Schiffes von einer vorab definierten Startpose $\eta_0 \in \mathbb{R}^3$ zu einer Endpose $\eta_1 \in \mathbb{R}^3$, wobei das Schiff zu Beginn und am Ende des Manövers stillstehen soll. Die Bewegung des Schiffes während des Manövers entspricht dabei der Systemdynamik aus (3.27) und die Beschränkungen an die Schlepperkräfte sind ebenfalls einzuhalten. In der Systemdynamik gehen wir von beliebigen stetigen Funktionen $b \in C(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ und $g \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ aus, welche die Einflüsse der zusätzlichen Masse und der weiteren Rumpfkkräfte modellieren, trotz explizit modellierter Darstellungen der Funktionen b und g in (3.26). Die einzigen Bedingungen

an die Funktionen seien die Eigenschaften

$$\begin{aligned} b(c\nu, c^2\dot{\nu}) &= c^2b(\nu, \dot{\nu}), \quad c \in \mathbb{R} \\ g(0) &= 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

welche insbesondere für die zuvor explizit modellierten Funktionen gelten. Dazu lässt sich bemerken, dass die Funktion $a \in C(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ aus (3.26), welche die kinetische Bewegung des Schiffes beschreibt, ebenfalls die Bedingung

$$a(c\nu, c^2\dot{\nu}) = c^2a(\nu, \dot{\nu}), \quad c \in \mathbb{R} \quad (5.2)$$

erfüllt. Dies lässt sich durch Einsetzen in (3.12) direkt nachweisen.

Im Folgenden werden die Start- und Endpose $\eta_0, \eta_1 \in \mathbb{R}^3$ ebenso wie die Schlepperbeschränkungen $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2 \in \mathbb{R}_+$ und die Funktionen b und g mit den genannten Eigenschaften als gegeben festgesetzt. Zusätzlich sind auch die halbe Schiffslänge $\ell \in \mathbb{R}_+$, die frontal und lateral projizierten Seitenflächen des Schiffes $A_F, A_L \in \mathbb{R}_+$ und die Formparameter $k_X, k_Y \in \mathbb{R}_+$ festgesetzt. Zur leichteren Darstellung der Windkraft definieren wir an dieser Stelle die Konstanten

$$K_X := \frac{\rho_A}{2} k_X A_F \quad \text{und} \quad K_Y := \frac{\rho_A}{2} k_Y A_L$$

mit der Luftdichte ρ_A , wobei die Definition von K_X mit der Definition aus (4.1) im vorangegangenen Kapitel übereinstimmt. Außerdem werden wir, anders als in Abschnitt 3.3.2 hergeleitet, in diesem Kapitel zunächst von einem konstanten aerodynamischen Hebelarm ausgehen, welcher nicht vom Angriffswinkel des scheinbaren Windes β_A abhängig ist, das heißt es gilt

$$x_A(\beta_A) \equiv x_A \in [-\ell, \ell].$$

Das Ziel ist nun die Berechnung der Windstärken und Windrichtungen, bei denen das geplante Manöver unter diesen Annahmen durchführbar ist. Dazu wird auch an dieser Stelle zunächst die *Zulässigkeit eines Windes* bezüglich des Manövers definiert.

Definition 5.1. (Zulässigkeit des Windes).

Das Tupel $(s, \theta) \in \mathbb{R}_\pi$ heißt *zulässig*, falls eine Lösung (η, ν, μ, t_f) zum System

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\eta} = \bar{R}(\psi)\nu t_f \\ a\left(\nu, \frac{\dot{\nu}}{t_f}\right) - b\left(\nu, \frac{\dot{\nu}}{t_f}\right) = T(\mu_1, \mu_2) + w(\psi, \nu, s, \theta) + g(\nu) \\ \eta(0) = \eta_0 \quad \nu(0) = 0 \\ \eta(1) = \eta_1 \quad \nu(1) = 0 \end{array} \right. \quad (P(s, \theta))$$

mit $\eta, \nu \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^3)$, $\mu_1, \mu_2 \in C([0, 1], \mathbb{R}^2)$ wie in (3.27) definiert und $t_f > 0$ existiert. Es gelten außerdem die Beschränkungen

$$\|\mu_{1X}^2 + \mu_{1Y}^2\|_\infty \leq \bar{\mu}_1^2 \quad \|\mu_{2X}^2 + \mu_{2Y}^2\|_\infty \leq \bar{\mu}_2^2.$$

Erneut entsteht dieses System aus (3.26) durch Transformation auf eine feste Endzeit, wie wir es in Kapitel 2.2.2 gesehen haben. Im Zuge dessen ergibt sich die Definition der *Zulässigkeitsmenge*.

Definition 5.2. (Zulässigkeitsmenge)

Die Menge

$$\mathcal{S} = \left\{ (s, \theta) \in \mathbb{R}_\pi \mid (s, \theta) \text{ ist zulässig bzgl. } (P(s, \theta)) \right\}$$

wird *Zulässigkeitsmenge* genannt.

Ein naiver Ansatz zur Berechnung der zulässigen wahren Winde und damit der „sicheren“ Bereiche ist die Approximation der Zulässigkeitsmenge mithilfe eines diskreten Gitters. Für jedes der diskreten Windtupel (s_k, θ_k) für $k \in \mathbb{N}$ wird versucht, eine Lösung zum Problem $(P(s_k, \theta_k))$ zu finden, beispielsweise mit der Softwarebibliothek TransWORHP aus Abschnitt 2.2.4. Wird eine Lösung gefunden, so kann das Windtupel als zulässig deklariert werden, andernfalls nicht. Dieser Ansatz ist allerdings sehr rechenintensiv, falls eine feine Diskretisierung gewählt wird. Weiterhin kommt es zu Schwierigkeiten, falls sich der aktuelle Wind außerhalb der Zulässigkeitsmenge befindet, da dann keine Lösung existiert, die Software TransWORHP aber von der Existenz einer solchen ausgeht.

Viele der genannten Probleme können vermieden werden, wenn für die Zulässigkeitsmenge gezeigt wird, dass es sich um eine sternförmige Menge handelt. Das bedeutet, dass jede gerade Verbindungsstrecke zwischen dem Ursprung und einem zulässigen Windtupel vollständig innerhalb der Menge liegt. Insbesondere heißt das, dass die Menge keine Löcher besitzt und entlang einer festen Windrichtung durch ein Intervall dargestellt werden kann. Schematisch ist eine solche Menge in Abbildung 5.3 in grün dargestellt. Zusätzlich sind die Intervalle für einige Windrichtungen exemplarisch eingezeichnet. Ist ein Manöver bei einer bestimmten Windrichtung und Windstärke möglich, so ist intuitiv sinnvoll, dass dieses Manöver ebenfalls bei derselben Windrichtung und schwächerer Windstärke möglich ist. Allerdings muss diese Überlegung noch mathematisch untermauert werden. Mithilfe der Eigenschaft der Sternförmigkeit kann die Berechnung der Zulässigkeitsmenge auf die Berechnung des Randes zurückgeführt werden. In diesem Fall müsste statt des gesamten Polarplots nur die Windrichtung durch θ_k , $k \in \mathbb{N}$ diskretisiert werden. Dann kann für jede dieser diskreten Windrichtungen die maximale Windstärke s berechnet werden, sodass eine Lösung zum System $(P(s, \theta_k))$ gefunden wird. Auf diese Art und Weise wird der Rand der Zulässigkeitsmenge diskret approximiert, woraus sich beispielsweise durch lineare Interpolation zwischen den diskreten Randpunkten eine Approximation der Zulässigkeitsmenge ergibt. Die Berechnung der maximalen Windstärke kann ebenfalls mithilfe der Bibliothek TransWORHP umgesetzt werden. Unglücklicherweise kann die Sternförmigkeit der Zulässigkeitsmenge für allgemeine Manöver (bis jetzt) nicht gezeigt werden.

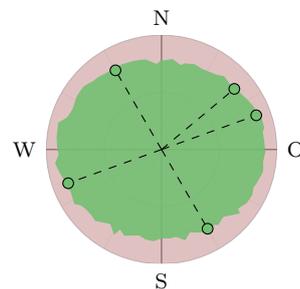


Abbildung 5.3: Schematische Darstellung einer sternförmigen Zulässigkeitsmenge (grün).

Diese Arbeit setzt den Fokus auf eine modifizierte Version des letztgenannten Ansatzes. Statt die vollständige Zulässigkeitsmenge \mathcal{S} zu betrachten, wird diese auf eine Teilmenge beschränkt, die nur eine bestimmte Art von Manövern zulässt. Dabei handelt es sich um *kontrollierte Manöver*, wobei die Schlepperboote zu jedem Zeitpunkt in der Lage sind, das Schiff unter Kontrolle zu halten. Die Sternförmigkeit dieser Teilmenge kann gezeigt werden, sodass die oben beschriebene Idee der Zurückführung auf die Berechnung des Randes weiterverfolgt werden kann.

Motiviert wird dieser Ansatz und die damit einhergehende Einschränkung auf eine bestimmte Art von Manövern durch das folgende Beispiel 5.3. Während sich das Schiff im eindimensionalen Fall ausschließlich entlang einer geraden Linie bewegen konnte, ohne die Orientierung zu ändern, besitzt das Schiff nun mehr Freiheitsgrade. Ein Manöver kann durch die unterschiedlichsten Trajektorien durchgeführt werden, wobei unter anderem Vorteile aus dynamischen Bewegungen wie Abdriften und Schwungholen genutzt werden können. Das folgende Beispiel gibt eine Intuition darüber, was bei der aktuellen Definition von Zulässigkeit als erfolgreich durchgeführtes Manöver gilt.

Beispiel 5.3. (Unkontrolliertes Manöver)

Bezeichne durch $\eta = (x_0, y_0, \psi)$ die Pose des Schiffes im globalen Koordinatensystem. Seien $\eta_0 = (0, 0, 0)^T$ und $\eta_1 = (0, 0, \frac{\pi}{2})^T$ die Start- und Endpose des Manövers, das das Schiff soll demnach eine Vierteldrehung von Nord nach Ost durchführen. Nehmen wir weiterhin an, dass der wahre Wind aus Richtung $\theta = \frac{\pi}{2}$, also aus Osten weht. Zu Beginn des Manövers weht der Wind also senkrecht zur Längsachse des Schiffes. Im Allgemeinen bietet die laterale Schiffsseite deutlich mehr Angriffsfläche als die frontale, sodass die Windkraft, die zu Beginn des Manövers auf das Schiff wirkt, besonders groß ist. Besitzen nun die Schlepperboote nicht genügend Kraft, um der Windkraft, die auf das ruhende Schiff wirkt, entgegenzuwirken, so driftet das Schiff entgegengesetzt der Windrichtung ab. Zieht gleichzeitig das vordere Schlepperboot mit lediglich geringer Kraft Richtung Osten, so beginnt das Schiff, sich langsam parallel zur Windrichtung auszurichten. Während dieses Abdriftens sind die Schlepperboote nicht stark genug, das Schiff unter Kontrolle zu halten, da die Windkraft wegen der großen Angriffsfläche zu stark ist. Nach einer gewissen Zeit ist das Schiff so weit abgedriftet, dass es parallel zur Windrichtung liegt. Die wirkende Windkraft ist nun aufgrund der geringeren Angriffsfläche deutlich kleiner. Jetzt besitzen die Schlepperboote die notwendige Kraft, die Kontrolle zu übernehmen und das Schiff zur Endposition zu ziehen, sodass es sich schließlich in der gewünschten Endpose η_1 befindet. In Abbildung 5.4a wird diese „unkontrollierte“ Situation verdeutlicht und mit einer „kontrollierten“ Version desselben Manövers verglichen, bei der das Schiff nicht abdriftet, sondern die Vierteldrehung auf der Stelle durchführt.

Obwohl die Schlepperkräfte zeitweise die Kontrolle über das Schiff verloren haben und es in Folge dessen unkontrolliert abgedriftet ist, ist das in Beispiel 5.3 beschriebene Manöver per Definition zulässig. Im Gegensatz dazu sehen wir in Abbildung 5.4b ein kontrolliertes Manöver. Die Schlepperboote besitzen dabei so viel Kraft, dass sie das Schiff auf der Stelle drehen können.

An dieser Stelle sei anzumerken, dass in diesem Kontext unkontrolliert nicht bedeutet, dass das Schiff kurz vor dem Auflaufen oder anderen ungewollten Unfällen steht. In

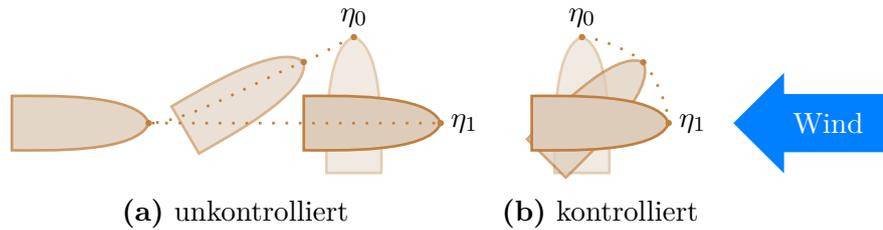


Abbildung 5.4: Beispielhafte Darstellung eines (a) unkontrolliert und (b) kontrolliert durchgeführten Manövers.

der realen Schifffahrt ist es durchaus möglich, dass kurze Abdriftmanöver durchgeführt werden, ohne dass der Lotse dabei wirklich die Kontrolle über das Schiff verliert. Es ist lediglich die in dieser Arbeit gewählte Bezeichnung für die Manöver, die nicht per Definition kontrolliert sind. In der vorliegenden Arbeit werden solche *unkontrollierten* Manöver wie dieses nicht berücksichtigt, um für diese einfachen Manöver eine solide mathematische Theorie aufzustellen, welche dann in weiterführenden Arbeiten auf allgemeinere Manöver erweitert werden kann.

Die Frage über die Durchführbarkeit des Manövers soll nur dann mit „Ja.“ beantwortet werden, wenn es eine passende Trajektorie gibt, sodass die Schlepperboote in der Lage sind, das Schiff zu jedem Zeitpunkt unter Kontrolle zu haben, es also in Ruhe halten können. Sie müssen der Windkraft, die auf das ruhende Schiff wirkt, entgegenwirken können. Ist der Wind so stark, dass die Schlepperboote nicht in der Lage sind, das Schiff „kontrolliert“ zu steuern, wollen wir die Frage mit „Nein.“ beantworten. Das Manöver ist in diesem Fall nicht - jedenfalls nicht kontrolliert - durchführbar. Wir wollen daher im folgenden Abschnitt unsere Betrachtungen auf diese kontrollierten Manöver beschränken.

5.2 Kontrollierte Manöver

Ein Manöver wird als kontrolliert durchführbar bezeichnet, wenn das Schiff eine passende Trajektorie von der Startpose η_0 zur Endpose η_1 durchfahren kann, wobei die Schlepperboote zu jedem Zeitpunkt genug Kraft besitzen, sodass sie das Schiff auf der Stelle halten können, ohne dass es abdriftet.

Ziel dieses Abschnittes ist die analytische Berechnung der Menge der wahren Winde, bei denen ein geplantes Manöver kontrolliert durchführbar ist. Bei den Untersuchungen müssen zwei verschiedene Arten von Manövern untersucht werden: die stationären und die bewegten Manöver. Bei einem stationären Manöver stimmen Start- und Endpose überein und das Manöver besteht darin, das Schiff an der aktuellen Pose zu halten. Im Gegensatz dazu stimmen Start- und Endpose beim bewegten Manöver nicht überein und das Schiff muss tatsächlich Fahrt aufnehmen, um das Manöver durchzuführen.

Zunächst werden die Manöver mit konstanter Position in Abschnitt 5.2.1 betrachtet, bei denen die Schlepperkräfte in der Lage sein müssen, der wirkenden Windkraft direkt entgegenzuwirken. Handelt es sich allerdings um ein bewegtes Manöver, wie in Abschnitt 5.2.2 untersucht wird, so reicht dies nicht aus, sondern die Schlepperboote müssen - wenn

auch nur minimal - mehr Kraft besitzen als die wirkende Windkraft, sodass sie das Schiff nicht nur halten, sondern auch in Bewegung setzen können.

5.2.1 Manöver mit konstanter Position

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit einer bestimmten Art von Manövern, den stationären Manövern. Das Schiff soll eine beliebige Zeit lang in der festen Pose $\eta_0 \in \mathbb{R}^3$ konstant gehalten werden. Wir betrachten damit im Folgenden den Spezialfall des Systems $(P(s, \theta))$ mit den Randbedingungen $\eta(0) = \eta(1) = \eta_0$ und werden das System mit $(P_{\eta_0}(s, \theta))$ bezeichnen.

Im Laufe dieses Kapitels werden Bedingungen entwickelt, die einen wahren Wind (s, θ) als *stationär-zulässig* klassifizieren, falls das Schiff konstant in der festen Pose $\eta_0 = (x_0, y_0, \psi_0)^T$ gehalten werden kann. Wir werden sehen, dass diese Bedingungen unabhängig von der Position (x_0, y_0) des Schiffes sind und ausschließlich von dessen Orientierung ψ_0 abhängen, womit die nachfolgende Definition gerechtfertigt ist.

Definition 5.4. (Stationäre Zulässigkeit des Windes)

Das Tupel $(s, \theta) \in \mathbb{R}_\pi$ heißt *stationär-zulässig* bzgl. der Orientierung ψ_0 , falls eine stationäre Lösung $(\eta, \nu, \mu, t_f) \equiv (\eta_0, 0, [\mu_1, \mu_2], t_f)$ zum System $(P_{\eta_0}(s, \theta))$ existiert.

In konsistenter Weise lässt sich damit die *stationäre Zulässigkeitsmenge* bezüglich einer beliebigen Orientierung ψ definieren.

Definition 5.5. (Stationäre Zulässigkeitsmenge)

Sei $\psi \in \Pi$. Die Menge

$$\mathcal{K}_\psi = \left\{ (s, \theta) \in \mathbb{R}_\pi \mid (s, \theta) \text{ ist stationär-zulässig bzgl. } \psi \right\}$$

wird *stationäre Zulässigkeitsmenge* bezüglich ψ genannt.

Für eine feste Windrichtung $\theta \in \Pi$ wird die eindimensionale Menge aller stationär-zulässigen Windstärken bezüglich der Orientierung $\psi \in \Pi$ durch

$$\mathcal{K}_\psi(\theta) := \left\{ s \in \mathbb{R}_+ \mid (s, \theta) \text{ ist stationär-zulässig bzgl. } \psi \right\}.$$

definiert. Daraus ergibt sich eine Darstellung der stationären Zulässigkeitsmenge durch die Vereinigung

$$\mathcal{K}_\psi = \bigcup_{\theta \in \Pi} (\mathcal{K}_\psi(\theta) \times \theta).$$

Diese Mengen werden in Abbildung 5.5 schematisch verdeutlicht. Es ist zu erkennen, dass die eindimensionale Menge $\mathcal{K}_\psi(\theta)$ (blau) durch das Kreuzprodukt mit θ zu einer Teilmenge der zweidimensionalen Menge \mathcal{K}_ψ wird, sodass die Darstellung als Vereinigung über alle $\theta \in \Pi$ gerechtfertigt ist. Die Darstellung der stationären Zulässigkeitsmenge mittels eindimensionaler Teilmengen wird im Laufe der Arbeit noch häufig genutzt, um Zusammenhänge kompakter darstellen zu können.

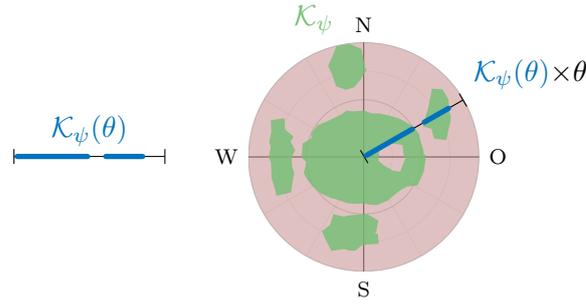


Abbildung 5.5: Darstellung einer eindimensionalen Menge $\mathcal{K}_\psi(\theta) \subseteq \mathbb{R}_+$ (links) und zweidimensionalen Menge $\mathcal{K}_\psi(\theta) \times \theta \subseteq \mathcal{K}_\psi$ (rechts).

Das Ziel ist nun die Herleitung von Bedingungen, unter denen ein wahrer Wind als stationär-zulässig deklariert wird. Lemma 5.6 und Lemma 5.7 leiten diese Bedingungen Schritt für Schritt her.

Damit ein wahrer Wind als stationär-zulässig deklariert wird, muss das stationäre Manöver durchgeführt werden. Dazu müssen die Schlepperboote genug Kraft besitzen, um der Windkraft, die auf das ruhende Schiff wirkt, entgegenzuhalten. Eine analoge Beobachtung haben wir bereits im vereinfachten Modell mit nur einem Freiheitsgrad gemacht.

Lemma 5.6. (Stationäre Lösung)

Sei $(s, \theta) \in \mathbb{R}_\pi$. Die stationäre Lösung $(\eta, \nu, \mu, t_f) \equiv (\eta_0, 0, [\mu_1, \mu_2], t_f)$ ist für beliebiges $t_f > 0$ eine Lösung des Systems $(P_{\eta_0}(s, \theta))$ genau dann, wenn für $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}^2$ die Bedingungen

$$\begin{pmatrix} \mu_{1X} + \mu_{2X} \\ \mu_{1Y} + \mu_{2Y} \\ \ell\mu_{1Y} - \ell\mu_{2Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_X s^2 \cos(\theta - \psi_0) \\ K_Y s^2 \sin(\theta - \psi_0) \\ K_Y s^2 \sin(\theta - \psi_0) x_A \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

mit

$$\mu_{1X}^2 + \mu_{1Y}^2 \leq \bar{\mu}_1^2 \quad \text{und} \quad \mu_{2X}^2 + \mu_{2Y}^2 \leq \bar{\mu}_2^2 \quad (5.4)$$

gelten.

Beweis.

„ \implies “: Sei $(\eta, \nu, \mu, t_f) \equiv (\eta_0, 0, [\mu_1, \mu_2], t_f)$ für $t_f > 0$ eine Lösung des Systems $(P_{\eta_0}(s, \theta))$. Durch Einsetzen in die Dynamik ergibt für jeden Zeitpunkt die Gleichung

$$\underbrace{a(0, 0)}_{=0} - \underbrace{b(0, 0)}_{=0} = T(\mu_1, \mu_2) + w(\psi_0, 0, s, \theta) + \underbrace{g(0)}_{=0}. \quad (5.5)$$

Einsetzen der Definition der Windkraft aus (3.21) ergibt die Windkraft auf das ruhende Schiff durch

$$w(\psi_0, 0, s, \theta) = - \begin{pmatrix} K_X s^2 \cos(\theta - \psi_0) \\ K_Y s^2 \sin(\theta - \psi_0) \\ K_Y s^2 \sin(\theta - \psi_0) x_A \end{pmatrix}.$$

Die Parameter (s_A, θ_A) des scheinbaren Windes entsprechen bei einem ruhenden Schiff den Parametern (s, θ) des wahren Windes, da kein Fahrtwind vorhanden ist. Setzen wir nun ebenfalls die Definition der Schlepperkraft $T(\mu_1, \mu_2)$ aus (3.25) ein, erhalten wir die Gleichheit (5.3). Die Beschränkungen (5.4) müssen per Definition für die Lösung von $(P_{\eta_0}(s, \theta))$ ebenso gelten.

„ \Leftarrow “: Es gelten nun die Bedingungen (5.3) und (5.4) für $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}^2$. Wir überprüfen, ob $(\eta, \nu, \mu, t_f) \equiv (\eta_0, 0, [\mu_1, \mu_2], t_f)$ für $t_f > 0$ eine Lösung von $(P_{\eta_0}(s, \theta))$ ist. Schauen wir uns dazu zunächst die Dynamik an. Die erste Gleichung der Dynamik ist offensichtlich erfüllt, da die Ableitung der konstanten Funktion $\eta \equiv \eta_0$ konstant Null ist. Analoge Überlegungen zu (5.5) ergeben, dass mit der Bedingung (5.3) auch die zweite Gleichung der Dynamik erfüllt ist. Weiterhin sind durch (5.4) auch die Beschränkungen an die Schlepperkräfte erfüllt. Da wir das System $(P_{\eta_0}(s, \theta))$ betrachten und $\eta \equiv \eta_0$ und $\nu \equiv 0$ gilt, sind die geforderten Randbedingungen ebenfalls erfüllt. Damit ist $(\eta_0, 0, [\mu_1, \mu_2], t_f)$ insgesamt eine stationäre Lösung des Systems $(P_{\eta_0}(s, \theta))$. \square

Jetzt stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen solche Schlepperkräfte existieren, sodass sie in der Lage sind, mit der Windkraft im Gleichgewicht zu liegen. Das folgende Lemma liefert für eine beliebige rechte Seite der Gleichung (5.3) eben solche Bedingungen. Zusätzlich wird eine mögliche Darstellung der Schlepperkräfte, abhängig von der gegebenen rechten Seite, gegeben.

Lemma 5.7. (Existenz geeigneter Schlepperkräfte)

Sei $\gamma \in \mathbb{R}^3$. Es existieren $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}^2$, wobei $\mu_1 = (\mu_{1_X}, \mu_{1_Y})^T$ und $\mu_2 = (\mu_{2_X}, \mu_{2_Y})^T$ gilt, mit den Eigenschaften

$$\mu_{1_X} + \mu_{2_X} = \gamma_1 \quad (E_1)$$

$$\mu_{1_Y} + \mu_{2_Y} = \gamma_2 \quad (E_2)$$

$$\ell\mu_{1_Y} - \ell\mu_{2_Y} = \gamma_3 \quad (E_3)$$

$$\mu_{1_X}^2 + \mu_{1_Y}^2 \leq \bar{\mu}_1^2 \quad (E_4)$$

$$\mu_{2_X}^2 + \mu_{2_Y}^2 \leq \bar{\mu}_2^2 \quad (E_5)$$

genau dann, wenn die Bedingungen

$$f_1(\gamma) := \left(\frac{\ell\gamma_2 + \gamma_3}{2\ell}\right)^2 - \bar{\mu}_1^2 \leq 0 \quad (B_1)$$

$$f_2(\gamma) := \left(\frac{\ell\gamma_2 - \gamma_3}{2\ell}\right)^2 - \bar{\mu}_2^2 \leq 0 \quad (B_2)$$

$$f_3(\gamma) := |\gamma_1| - \sqrt{|f_1(\gamma)|} - \sqrt{|f_2(\gamma)|} \leq 0 \quad (B_3)$$

erfüllt sind. Eine explizite Darstellung ergibt sich durch

$$\begin{aligned} \mu_{1_Y} &= \frac{\ell\gamma_2 + \gamma_3}{2\ell}, & \mu_{2_Y} &= \frac{\ell\gamma_2 - \gamma_3}{2\ell}, & \mu_{2_X} &= \gamma_1 - \mu_{1_Y} \quad \text{und} \\ \mu_{1_X} &= \frac{1}{2} \left(\max \left\{ -\sqrt{\bar{\mu}_1^2 - \mu_{1_Y}^2}, \gamma_1 - \sqrt{\bar{\mu}_2^2 - \mu_{2_Y}^2} \right\} + \min \left\{ \sqrt{\bar{\mu}_1^2 - \mu_{1_Y}^2}, \gamma_1 + \sqrt{\bar{\mu}_2^2 - \mu_{2_Y}^2} \right\} \right). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Beweis. Zunächst werden die Eigenschaften (E_1) - (E_5) in ein äquivalentes System umgeformt, wobei die Variablen $\mu_{2_X}, \mu_{1_Y}, \mu_{2_Y}$ in den Ungleichungen eliminiert werden. Aus

(E_1) ergibt sich direkt

$$\mu_{2X} = \gamma_1 - \mu_{1X}. \quad (5.7)$$

Lösung des Gleichungssystems bestehend aus (E_2) und (E_3) ergibt die Darstellungen

$$\mu_{1Y} = \frac{\ell\gamma_2 + \gamma_3}{2\ell} \quad \text{und} \quad \mu_{2Y} = \frac{\ell\gamma_2 - \gamma_3}{2\ell}. \quad (5.8)$$

Durch Einsetzen in (E_4) und (E_5) lassen sich die Ungleichungen ausschließlich abhängig von der Variablen μ_{1X} durch

$$\mu_{1X}^2 + \left(\frac{\ell\gamma_2 + \gamma_3}{2\ell}\right)^2 \leq \bar{\mu}_1^2 \quad \text{und} \quad (\gamma_1 - \mu_{1X})^2 + \left(\frac{\ell\gamma_2 - \gamma_3}{2\ell}\right)^2 \leq \bar{\mu}_2^2 \quad (5.9)$$

darstellen. Damit bilden die Gleichungen (5.7)-(5.9) ein zu (E_1)-(E_5) äquivalentes System.

„ \implies “: Falls $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}^2$ existieren, die die Eigenschaften (5.7)-(5.9) erfüllen, folgt aus (5.9) direkt

$$0 \leq \mu_{1X}^2 \leq \underbrace{\bar{\mu}_1^2 - \left(\frac{\ell\gamma_2 + \gamma_3}{2\ell}\right)^2}_{=-f_1(\gamma)} \quad \text{und} \quad 0 \leq (\gamma_1 - \mu_{1X})^2 \leq \underbrace{\bar{\mu}_2^2 - \left(\frac{\ell\gamma_2 - \gamma_3}{2\ell}\right)^2}_{=-f_2(\gamma)},$$

was den Bedingungen (B_1) und (B_2) entspricht. Daraus ergeben sich durch Ziehen der Quadratwurzel auf beiden Seiten unter Ausnutzung der Positivität der Radikanten die Ungleichungen

$$|\mu_{1X}| \leq \sqrt{|f_1(\gamma)|} \quad \text{und} \quad |\gamma_1 - \mu_{1X}| \leq \sqrt{|f_2(\gamma)|}.$$

Damit liegt μ_{1X} in der Menge

$$\mu_{1X} \in \left[-\sqrt{|f_1(\gamma)|}, \sqrt{|f_1(\gamma)|}\right] \cap \left[\gamma_1 - \sqrt{|f_2(\gamma)|}, \gamma_1 + \sqrt{|f_2(\gamma)|}\right] =: \mathcal{M}.$$

Aus der Voraussetzung der Existenz von μ_{1X} folgt, dass die Menge nichtleer ist. Daraus lässt sich schließen, dass die jeweils obere Grenze des einen Intervalls größer als die untere Grenze des anderen Intervalls sein muss. Es ergeben sich die zwei Bedingungen

$$\sqrt{|f_1(\gamma)|} \geq \gamma_1 - \sqrt{|f_2(\gamma)|} \quad \text{und} \quad -\sqrt{|f_1(\gamma)|} \leq \gamma_1 + \sqrt{|f_2(\gamma)|},$$

welche sich äquivalent darstellen lassen durch die Betragsungleichung (B_3)

$$\sqrt{|f_1(\gamma)|} + \sqrt{|f_2(\gamma)|} \geq |\gamma_1|.$$

„ \Leftarrow “: Es gelten die Bedingungen (B_1)-(B_3). Mit analoger Argumentation ist die Menge \mathcal{M} nichtleer, sodass ein $\mu_{1X} \in \mathcal{M}$ existiert. Erneut analoge Argumentationen ergeben, dass die Ungleichungen (5.9) für dieses μ_{1X} erfüllt sind. Durch Wahl von $\mu_{2X}, \mu_{1Y}, \mu_{2Y}$ wie in (5.7) und (5.8) ist durch die Äquivalenz der beiden Systeme die Existenz von $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}^2$ erfüllt, welche die Eigenschaften (E_1)-(E_5) erfüllen.

Sind die Bedingungen (B_1) und (B_2) erfüllt, so gilt $|f_{1,2}(\gamma)| = -f_{1,2}(\gamma)$. Die Wahl von μ_{1X} wie in (5.6) ist damit gerechtfertigt, denn mit obiger Definition der Menge \mathcal{M} liegt

μ_{1_X} genau mittig zwischen der größten unteren Grenze und kleinsten oberen Grenze beider Teilintervalle und liegt damit in der Menge

$$\mu_{1_X} = \frac{1}{2} \left(\max \left\{ -\sqrt{-f_1(\gamma)}, \gamma_1 - \sqrt{-f_2(\gamma)} \right\} + \min \left\{ \sqrt{-f_1(\gamma)}, \gamma_1 + \sqrt{-f_2(\gamma)} \right\} \right) \in \mathcal{M}. \quad \square$$

Werden nun die Informationen aus Lemma 5.6 und Lemma 5.7 zusammengebracht, so lassen sich Bedingungen formulieren, die die stationäre Zulässigkeitsmenge charakterisieren. Ein Schiff kann bei wahren Wind (s, θ) in der festen Orientierung ψ_0 konstant gehalten werden, wenn die Bedingungen aus Lemma 5.7 für die rechte Seite

$$\gamma(s, \theta - \psi_0) := -w(\psi_0, 0, s, \theta)$$

erfüllt sind. Die rechte Seite muss der Windkraft entsprechen, die auf das ruhende Schiff wirkt, ist also abhängig von der wahren Windgeschwindigkeit s und dem relativen Angriffswinkel $\beta = \theta - \psi_0$. Diese Bedingungen sind - wie eingangs bereits erwähnt - unabhängig von der Position des Schiffes, da sie ebenso wie die Windkraft nur von der Orientierung des Schiffes abhängen.

Satz 5.8. (Bedingungen für stationäre Zulässigkeit)

Sei $(s, \theta) \in \mathbb{R}_\pi$ und $\psi_0 \in \Pi$. Dann ist $(s, \theta) \in \mathcal{K}_{\psi_0}$ genau dann, wenn die Bedingungen

$$\begin{aligned} F_1(s, \beta) &:= f_1(\gamma(s, \beta)) = \left(\frac{(\ell + x_A) K_Y s^2 \sin \beta}{2\ell} \right)^2 - \bar{\mu}_1^2 && \leq 0 \\ F_2(s, \beta) &:= f_2(\gamma(s, \beta)) = \left(\frac{(\ell - x_A) K_Y s^2 \sin \beta}{2\ell} \right)^2 - \bar{\mu}_2^2 && \leq 0 \\ F_3(s, \beta) &:= f_3(\gamma(s, \beta)) = |K_X s^2 \cos \beta| - \sqrt{|F_1(s, \beta)|} - \sqrt{|F_2(s, \beta)|} && \leq 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

für den relativen Angriffswinkel $\beta = \theta - \psi_0$ erfüllt sind.

Beweis. Sei (s, θ) stationär-zulässig bezüglich ψ_0 . Damit existiert per Definition eine stationäre Lösung $(\eta, \nu, \mu, t_f) \equiv (\eta_0, 0, [\mu_1, \mu_2], t_f)$ zum System $(P_{\eta_0}(s, \theta))$ mit $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}^2$, $t_f > 0$ beliebig. Dies ist nach Lemma 5.6 äquivalent dazu, dass die Bedingungen (5.3) und (5.4) für μ_1, μ_2 erfüllt sein müssen. Lemma 5.7 besagt wiederum, dass dies äquivalent dazu ist, dass die drei Bedingungen (5.10) erfüllt sind. \square

Damit ergibt sich eine alternative Formulierung der stationären Zulässigkeitsmenge bezüglich einer Orientierung $\psi \in \Pi$ durch

$$\mathcal{K}_\psi = \left\{ (s, \theta) \in \mathbb{R}_\pi \mid F_{1,2,3}(s, \theta - \psi) \leq 0 \right\}.$$

Aus dieser alternativen Darstellung der stationären Zulässigkeitsmenge lassen sich mithilfe der Monotonieeigenschaften der drei Funktionen starke Eigenschaften der Menge zeigen.

Lemma 5.9. (Monotonie der Funktionen)

Seien $\theta, \psi \in \Pi$ mit $\beta = \theta - \psi$. Falls $\sin \beta = 0$, sind die Funktionen $F_{1,2}(\cdot, \beta)$ konstant negativ und $F_3(\cdot, \beta)$ ist streng monoton wachsend auf \mathbb{R}_+ .

Falls $\sin \beta \neq 0$, sind $F_{1,2}(\cdot, \beta)$ streng monoton wachsend auf \mathbb{R}_+ und $F_3(\cdot, \beta)$ auf dem Intervall $[0, \tilde{s}_\psi(\theta)]$, wobei

$$\tilde{s}_\psi(\theta) := \min \left\{ \sqrt{\frac{2\ell\bar{\mu}_1}{(\ell+x_A)K_Y|\sin(\theta-\psi)|}}, \sqrt{\frac{2\ell\bar{\mu}_2}{(\ell-x_A)K_Y|\sin(\theta-\psi)|}} \right\}$$

das Minimum der Nullstellen der Funktionen $F_{1,2}(\cdot, \beta)$ ist.

Beweis. Sei $\sin \beta = 0$, woraus direkt $\cos \beta \neq 0$ folgt. Durch Einsetzen ergibt sich

$$F_{1,2}(s, \beta) \equiv -\bar{\mu}_{1,2} < 0$$

für alle $s \in \mathbb{R}_+$, sodass diese Funktionen konstant negativ sind. Weiterhin ist dann

$$F_3(s, \beta) = K_X s^2 |\cos \beta| - \bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2$$

streng monoton steigend für alle $s \in \mathbb{R}_+$. In Abbildung 5.6a wird diese Situation verdeutlicht, indem die konstanten Funktionen $F_{1,2}$ (orange) und F_3 (grün) gemeinsam mit den y -Achsenabschnitten bzw. Nullstellen dargestellt werden.

Sei nun $\sin \beta \neq 0$. Schematisch ist diese Situation in 5.6b dargestellt, wobei nun $F_{1,2}$ (orange) nicht konstant sind. Weiterhin sind zwei verschiedene Verläufe der Funktion F_3 (grün) gezeigt, wobei zwischen negativem und positivem Vorzeichen des Funktionswertes im Minimum der Nullstellen von $F_{1,2}$ unterschieden wird. Die Funktionen $F_{1,2}(\cdot, \beta)$ sind jeweils Funktionen der Form $f(x) = ax^4 + b$, wobei $a > 0$ ist. Diese Funktion ist auf den nicht-negativen Zahlen \mathbb{R}_+ monoton steigend, so auch $F_{1,2}(\cdot, \beta)$. Aufgrund der Definition von $\tilde{s}_\psi(\theta)$ als Minimum der Nullstellen dieser beiden Funktionen und der bereits gezeigten Monotonieeigenschaften sind die Ungleichungen $F_{1,2}(\tilde{s}_\psi(\theta), \beta) \leq 0$ erfüllt. Aufgrund der strengen Monotonie der beiden Funktionen gilt demnach auch $F_{1,2}(s, \beta) \leq 0$ für alle $s \leq \tilde{s}_\psi(\theta)$. Damit lassen sich die Betragsstriche unter den Wurzeln in der dritten Funktion aus (5.10) durch negative Vorzeichen ersetzen, sodass die Funktion auf dem Intervall $[0, \tilde{s}_\psi(\theta)]$

$$F_3(s, \beta) = K_X s^2 |\cos(\beta)| - \sqrt{-F_1(s, \beta)} - \sqrt{-F_2(s, \beta)}$$

lautet, wobei der erste Summand streng monoton steigend in s ist. Die übrigen beiden Summanden besitzen diese Eigenschaft ebenso, da die Wurzelfunktion und $F_{1,2}(\cdot, \beta)$ jeweils streng monoton steigend sind. Damit ist $F_3(\cdot, \beta)$ insgesamt streng monoton steigend auf dem Intervall $[0, \tilde{s}_\psi(\theta)]$. \square

Mithilfe dieser Monotonieeigenschaft kann nun zunächst der möglichen „sicheren“ Bereich eingeschränkt beziehungsweise eine obere Grenze für die Zulässigkeitsmenge gefunden werden.

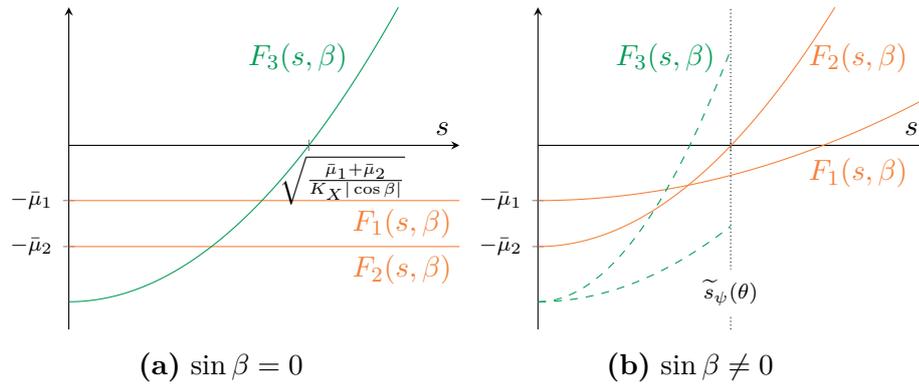


Abbildung 5.6: Skizzierter Verlauf der Funktionen $F_{1,2,3}(\cdot, \beta)$ für $\beta \in \Pi$ zur Verdeutlichung der Monotonieeigenschaften aus Lemma 5.9. Der Verlauf von $F_3(\cdot, \beta)$ in (b) ist abhängig von den gewählten Konstanten und β . Zwei Möglichkeiten sind oben skizziert.

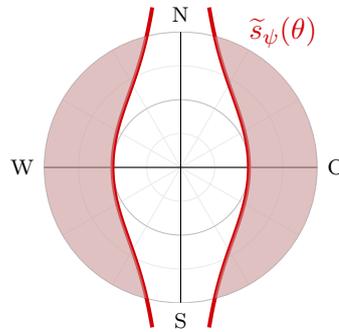


Abbildung 5.7: Obere Grenze der stationären Zulässigkeitsmenge \mathcal{K}_ψ nach Proposition 5.10 beispielhaft für $\psi = 0$ skizziert (dunkelrot). Alle wahren Winde stärker als diese obere Grenze werden als „unsicher“ deklariert.

Proposition 5.10. (Obergrenze der stationären Zulässigkeitsmenge)

Seien $\theta, \psi \in \Pi$ und damit $\beta = \theta - \psi$. Falls $\sin \beta \neq 0$ ist, gilt die Inklusion

$$\mathcal{K}_\psi(\theta) \subseteq [0, \tilde{s}_\psi(\theta)].$$

Beweis. Sei $\sin \beta \neq 0$. Per Definition ist dann $\tilde{s}_\psi(\theta)$ das Minimum der Nullstellen der beiden Funktionen $F_{1,2}(\cdot, \beta)$, das heißt es ist $F_i(\tilde{s}_\psi(\theta), \beta) = 0$ für ein $i \in \{1, 2\}$. Damit folgt für jedes $s > \tilde{s}_\psi(\theta)$ aus der strengen Monotonie

$$F_i(s, \beta) > F_i(\tilde{s}_\psi(\theta), \beta) = 0 \quad \text{für ein } i \in \{1, 2\},$$

sodass eine der drei Bedingungen verletzt ist und damit $s \notin \mathcal{K}_\psi(\theta)$ gelten muss. \square

Für eine Orientierung $\psi \in \Pi$ kann nun für die Windrichtung $\theta \in \Pi$ die obere Grenze $\tilde{s}_\psi(\theta)$ (falls existent) in dem Polarplot markiert werden. Damit ergibt sich ein teilweise unbeschränkter Grenzbereich wie beispielhaft in Abbildung 5.7 dargestellt. Alle wahren

Winde, die nicht kleiner als diese Obergrenze sind, können nun direkt als „unsicher“ deklariert werden.

Mithilfe der Monotonieeigenschaften der drei Funktionen lässt sich außerdem eine starke Eigenschaft der stationären Zulässigkeitsmenge zeigen, die eingangs angekündigte Sternförmigkeit. Das bedeutet, dass sich jede der eindimensionalen Teilmengen $\mathcal{K}_\psi(\theta)$ als ein Intervall darstellen lässt. Außerdem bedeutet dies, dass die kontrollierte Zulässigkeitsmenge keine Löcher besitzt. Beispielhaft wurde eine solche sternförmige Menge in Abbildung 5.3 skizziert.

Lemma 5.11. (Sternförmigkeit)

Die stationäre Zulässigkeitsmenge \mathcal{K}_ψ bezüglich $\psi \in \Pi$ ist *sternförmig*, das heißt es gilt für jedes $(\hat{s}, \theta) \in \mathbb{R}_\pi$ die Implikation

$$\hat{s} \in \mathcal{K}_\psi(\theta) \implies s \in \mathcal{K}_\psi(\theta) \quad \text{für alle } 0 \leq s \leq \hat{s}.$$

Beweis. Seien $\theta, \psi \in \Pi$ und $\beta = \theta - \psi$. Sei nun $\hat{s} \in \mathcal{K}_\psi(\theta)$. Damit sind die drei Ungleichungen erfüllt

$$F_{1,2,3}(\hat{s}, \beta) \leq 0. \tag{5.11}$$

Betrachte nun zunächst den Fall $\sin \beta \neq 0$. Nach Lemma 5.10 muss $\hat{s} \leq \tilde{s}_\psi(\theta)$ gelten. Für jedes $s \in [0, \hat{s}] \subseteq [0, \tilde{s}_\psi(\theta)]$ ergibt sich deshalb aufgrund der strengen Monotonie aller drei Funktionen die Gültigkeit der drei Ungleichungen

$$F_{1,2,3}(s, \beta) \leq F_{1,2,3}(\hat{s}, \beta) \stackrel{(5.11)}{\leq} 0,$$

sodass auch $s \in \mathcal{K}_\psi(\theta)$ folgt.

Sei nun $\sin \beta = 0$. Nach dem Monotonie-Lemma 5.9 sind die Ungleichungen

$$F_{1,2}(s, \beta) < 0 \tag{5.12}$$

für alle $s \in \mathbb{R}_+$ erfüllt und $F_3(s, \beta)$ ist streng monoton wachsend auf ganz \mathbb{R}_+ . Insbesondere ergibt sich damit für jedes $s \in [0, \hat{s}]$ aufgrund der Monotonie

$$F_3(s, \beta) \leq F_3(\hat{s}, \beta) \stackrel{(5.11)}{\leq} 0.$$

Gemeinsam mit (5.12) sind damit alle drei Ungleichungen erfüllt und es gilt $s \in \mathcal{K}_\psi(\theta)$. \square

Aus dieser Sternförmigkeit lässt sich nun auch eine minimale stationäre Zulässigkeitsmenge bestimmen. Dabei kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, dass $K_X \leq K_Y$ gilt, die laterale Seite des Schiffes bietet demnach deutlich mehr Angriffsfläche für den Wind als die frontale Seitenfläche. Greift der Wind das Schiff nun lateral an, das heißt Windrichtung und Orientierung stehen senkrecht aufeinander, so wird die maximale stationär-zulässige Windstärke bei dieser Windrichtung am stärksten eingeschränkt. Auf dieser Überlegung beruht die nachfolgende Proposition.

Proposition 5.12. (Minimale stationäre Zulässigkeitsmenge)

Sei $\psi \in \Pi$. Bei einem Schiff mit der allgemeinen Schiffsform ($K_X \leq K_Y$) gilt für jedes $\theta \in \Pi$ die Inklusion

$$\left[0, \tilde{s}_\psi\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right)\right] \subseteq \mathcal{K}_\psi(\theta).$$

Beweis. Per Definition ist

$$\tilde{s}_\psi\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) = \min \left\{ \sqrt{\frac{2\ell\bar{\mu}_1}{(\ell+x_A)K_Y}}, \sqrt{\frac{2\ell\bar{\mu}_2}{(\ell-x_A)K_Y}} \right\} =: \tilde{s}_{\min},$$

da $\sin(\psi + \frac{\pi}{2} - \psi) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ gilt. Nehmen wir an, dass $\frac{\bar{\mu}_1}{\ell+x_A} \leq \frac{\bar{\mu}_2}{\ell-x_A}$ gilt. Damit ist das Minimum der erste Ausdruck. Zu überprüfen ist, ob alle drei Ungleichungen für diese Windstärke erfüllt sind. Wir betrachten zunächst die ersten zwei Ungleichungen für ein beliebiges $\theta \in \Pi$, sodass $\beta = \theta - \psi$ gilt.

$$\begin{aligned} F_1(\tilde{s}_{\min}, \beta) &= \bar{\mu}_1^2 \sin^2(\beta) - \bar{\mu}_1^2 = -\cos^2(\beta)\bar{\mu}_1^2 \leq 0 \\ F_2(\tilde{s}_{\min}, \beta) &= \underbrace{\left(\frac{\ell-x_A}{\ell+x_A}\right)^2 \bar{\mu}_1^2}_{\leq \bar{\mu}_2^2} \sin^2(\beta) - \bar{\mu}_2^2 \leq -\cos^2(\beta)\bar{\mu}_2^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Unter Ausnutzung der obigen Ergebnisse und der Eigenschaft des Schiffes $K_X \leq K_Y$ ergibt sich auch die dritte Ungleichung

$$\begin{aligned} F_3(\tilde{s}_{\min}, \beta) &\leq \left| \frac{2\ell\bar{\mu}_1 K_X \cos(\beta)}{(\ell+x_A)K_Y} \right| - |\cos(\beta)|\bar{\mu}_1 - |\cos(\beta)|\bar{\mu}_2 \\ &\leq |\cos(\beta)| \left(\frac{2\ell - (\ell+x_A)}{\ell+x_A} \bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2 \right) \\ &\leq |\cos(\beta)| \underbrace{\left(\frac{\ell-x_A}{\ell+x_A} \bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2 \right)}_{\leq \bar{\mu}_2} \leq 0. \end{aligned}$$

Auf analoge Weise lässt sich dies für den Fall $\frac{\bar{\mu}_1}{\ell+x_A} > \frac{\bar{\mu}_2}{\ell-x_A}$ zeigen. Damit sind in jedem Fall alle drei Ungleichungen erfüllt, sodass $\tilde{s}_{\min} \in \mathcal{K}_\psi(\theta)$ gilt. Gemeinsam mit der Sternförmigkeit aus Lemma 5.11 ergibt sich damit die Behauptung. \square

Nachdem nun sowohl eine obere Grenze als auch eine minimale Menge für die stationäre Zulässigkeitsmenge in den Propositionen 5.10 und 5.12 gefunden wurde, soll der nächste Schritt die tatsächliche Bestimmung dieser Menge sein. Dazu ist für jede Windrichtung θ die maximale stationär-zulässige Windstärke $s_\psi^*(\theta)$ bezüglich der Orientierung ψ zu finden. Eine Charakterisierung dieser maximalen Windstärken und damit des Randes der stationären Zulässigkeitsmenge liefern uns die Monotonieeigenschaften der drei Funktionen. Die maximale Windstärke ist genau jene, bei der eine der drei Ungleichungen das erste Mal als Gleichheit erfüllt ist.

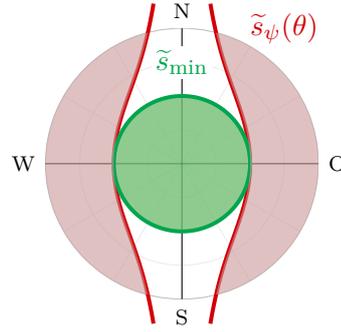


Abbildung 5.8: Minimale stationäre Zulässigkeitsmenge \mathcal{K}_ψ (dunkelgrün) nach Lemma 5.12 und obere Grenze (dunkelrot) beispielhaft für $\psi = 0$ skizziert. Alle wahren Winde innerhalb der minimalen Menge werden als „sicher“ deklariert.

Lemma 5.13. (Rand der stationären Zulässigkeitsmenge)

Seien $\theta, \psi \in \Pi$ mit $\beta = \theta - \psi$. Falls für $s^* \in \mathbb{R}_+$ die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \exists i \in \{1, 2, 3\} : F_i(s^*, \beta) &= 0 \\ \forall j \in \{1, 2, 3\} : F_j(s^*, \beta) &\leq 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

gelten, so ist $s^* = \max \mathcal{K}_\psi(\theta) =: s_\psi^*(\theta)$ und die Intervalldarstellung

$$\mathcal{K}_\psi(\theta) = [0, s_\psi^*(\theta)]$$

ist gerechtfertigt.

Beweis. Sei $s^* \in \mathbb{R}_+$ und es gelten die Eigenschaften (5.13), woraus direkt $s^* \in \mathcal{K}_\psi(\theta)$ ersichtlich ist. Angenommen, es gäbe ein $s > s^*$, sodass $s \in \mathcal{K}_\psi(\theta)$ ist.

Wir betrachten zunächst den Fall $\sin \beta \neq 0$. Nach Lemma 5.10 muss $s^*, s \leq \tilde{s}_\psi(\theta)$ gelten. Damit folgen aus der Monotonieeigenschaft der drei Funktionen auf dem Intervall $[0, \tilde{s}_\psi(\theta)]$ die Ungleichungen

$$F_{1,2,3}(s^*, \beta) < F_{1,2,3}(s, \beta) \stackrel{s \in \mathcal{K}_\psi(\theta)}{\leq} 0,$$

im Widerspruch zu den geforderten Eigenschaften (5.13) von s^* .

Betrachten wir nun den Fall $\sin \beta = 0$. Nach Lemma 5.9 sind die Ungleichungen

$$F_{1,2}(s, \beta) < 0$$

für alle $s \in \mathbb{R}_+$ erfüllt und $F_3(\cdot, \beta)$ ist streng monoton wachsend auf ganz \mathbb{R}_+ . Aufgrund dieser Monotonie ergibt sich

$$F_3(s^*, \beta) < F_3(s, \beta) \stackrel{s \in \mathcal{K}_\psi(\theta)}{\leq} 0,$$

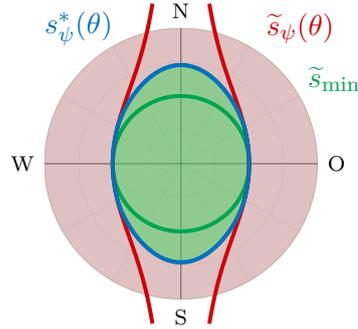


Abbildung 5.9: Der Rand der stationären Zulässigkeitsmenge \mathcal{K}_ψ (blau), der Rand der minimalen Menge (dunkelgrün) und die obere Grenze (dunkelrot). Alle wahren Winde innerhalb der durch den blauen Rand eingeschlossenen Menge werden als „sicher“ deklariert, alle außerhalb als „unsicher“.

im Widerspruch zu den geforderten Eigenschaften (5.13) von s^* . Damit kann ein solches s nicht existieren und es ist $s^* = \max \mathcal{K}_\psi(\theta)$.

Gemeinsam mit der Sternförmigkeit aus Lemma 5.11 ergibt sich die Intervallschreibweise. \square

Das Ziel ist nach wie vor die Berechnung der stationären Zulässigkeitsmenge \mathcal{K}_ψ . Mit den vorangegangenen Überlegungen und dem Nachweis der Sternförmigkeit können diese Berechnungen auf die Berechnung des Randes dieser Menge

$$\partial\mathcal{K}_\psi = \left\{ \left(s_\psi^*(\theta), \theta \right) \mid \theta \in \Pi \right\}$$

zurückgeführt werden. Für jede Windrichtung lässt sich die maximale Windstärke $s_\psi^*(\theta)$ berechnen durch die Windstärke, bei der das erste Mal eine der drei Ungleichungen als Gleichheit erfüllt ist. Werden die berechneten Werte für $s_\psi^*(\theta)$ in den Polarplot eingetragen, bilden sie den Rand der abgeschlossenen Menge \mathcal{K}_ψ . Den Polarplot können wir damit vollständig in einen „sicheren“ und „unsicheren“ Bereich einteilen. Wie dies aussehen könnte, ist in Abbildung 5.9 skizziert. Es sind sowohl die Obergrenze (dunkelrot), als auch der Rand der minimalen Menge (dunkelgrün) und der stationären Zulässigkeitsmenge (blau) eingezeichnet.

Satz 5.14. (Berechnung des Randes)

Seien $\theta, \psi \in \Pi$ und damit $\beta = \theta - \psi$. Falls $\sin \beta \neq 0$ und $F_3(\tilde{s}_\psi(\theta), \beta) \leq 0$, so gilt

$$s_\psi^*(\theta) = \tilde{s}_\psi(\theta).$$

Andernfalls ist

$$s_\psi^*(\theta) = \left(\frac{(\bar{\mu}_1^2 + \bar{\mu}_2^2) \bar{K}_X^2 \ell^2 + (\bar{\mu}_1^2 - \bar{\mu}_2^2) \bar{K}_Y^2 x_A \ell + \sqrt{\ell^2 \bar{K}_X^2 \left(4\bar{\mu}_1^2 \bar{\mu}_2^2 \ell^2 (\bar{K}_X^2 + \bar{K}_Y^2) - \bar{K}_Y^2 (\bar{\mu}_1^2 (\ell - x_A) + \bar{\mu}_2^2 (\ell + x_A))^2 \right)}}{(\bar{K}_X^2 + \bar{K}_Y^2) (\bar{K}_X^2 \ell^2 + \bar{K}_Y^2 x_A^2)} \right)^{\frac{1}{4}},$$

wobei $\bar{K}_X := K_X \cos \beta$ und $\bar{K}_Y := K_Y \sin \beta$.

Beweis. Betrachten wir zunächst den Fall $\sin \beta \neq 0$ und $F_3(\tilde{s}_\psi(\theta), \beta) \leq 0$. Damit erfüllt $\tilde{s}_\psi(\theta)$ als Minimum der Nullstellen der ersten beiden Funktionen die Eigenschaften (5.13) aus Lemma 5.13, sodass $s_\psi^*(\theta) = \tilde{s}_\psi(\theta)$ gilt. Diese Situation wird in Abbildung 5.6b veranschaulicht, bei Betrachtung der unteren Alternative der Funktion $F_3(\cdot, \beta)$.

Betrachte nun den Fall $\sin \beta \neq 0$ und $F_3(\tilde{s}_\psi(\theta), \beta) > 0$. Hierbei handelt es sich um die obere Alternative aus Abbildung 5.6b. Gemeinsam mit $F_3(0, \beta) < 0$ und der Stetigkeit der Funktion ergibt sich aus dem Nullstellensatz die Existenz eines $s_0 \in (0, \tilde{s}_\psi(\theta))$, sodass $F_3(s_0, \beta) = 0$ gilt. Aus der Monotonieeigenschaft folgt außerdem

$$F_{1,2}(s_0, \beta) < F_{1,2}(\tilde{s}_\psi(\theta), \beta) \leq 0,$$

weshalb s_0 die Eigenschaften (5.13) aus Lemma 5.13 erfüllt. Um die, aufgrund der strengen Monotonie eindeutige Nullstelle s_0 zu berechnen, ist die Gleichung $F_3(s, \beta) = 0$ nach $s \in (0, \tilde{s}_\psi(\theta))$ auszulösen. Addition der beiden Wurzelausdrücke resultiert in der Gleichung

$$s^2 |\overline{K}_X| = \sqrt{\overline{\mu}_1^2 - \left(\frac{(\ell + x_A) s^2 \overline{K}_Y}{2\ell} \right)^2} + \sqrt{\overline{\mu}_2^2 - \left(\frac{(\ell - x_A) s^2 \overline{K}_Y}{2\ell} \right)^2}, \quad (5.14)$$

wobei aufgrund der Einschränkung des gesuchten Bereiches die Absolutbeträge, die eigentlich unter den Wurzeln ständen, vernachlässigt werden. Nach dem Quadrieren beider Seiten und einigen Umformungsschritten folgt die äquivalente Gleichung

$$\begin{aligned} s^4 \left(2\overline{K}_X^2 \ell^2 + \overline{K}_Y^2 (\ell^2 + x_A^2) \right) - 2\ell^2 (\overline{\mu}_1^2 + \overline{\mu}_2^2) \\ = \sqrt{\left(4\ell^2 \overline{\mu}_1^2 - \overline{K}_Y^2 (\ell + x_A)^2 s^4 \right) \left(4\ell^2 \overline{\mu}_2^2 - \overline{K}_Y^2 (\ell - x_A)^2 s^4 \right)}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

wobei die rechte Seite reell und nicht-negativ ist für $s \in (0, \tilde{s}_\psi(\theta))$. Der Ausdruck unter der Wurzel ist für den eingeschränkten Bereich nicht-negativ, da die Nullstellen der beiden Faktoren den Nullstellen der obigen Wurzelausdrücken aus (5.14) entsprechen. Substituieren wir nun $w = s^4$, ergibt sich auf der linken Seite eine lineare, streng monoton steigende Funktion in w mit der Nullstelle

$$w_{\min} = \frac{2\ell^2 (\overline{\mu}_1^2 + \overline{\mu}_2^2)}{2\overline{K}_X^2 \ell^2 + \overline{K}_Y^2 (\ell^2 + x_A^2)} > 0.$$

Auf der rechten Seite ergibt sich eine streng monoton fallende Funktion in w auf $[0, \tilde{s}^4(\beta)]$ mit der Nullstelle

$$w_{\max} = \tilde{s}^4(\beta) > 0.$$

Aufgrund der Definition von $\tilde{s}_\psi(\theta)$ ist die andere Nullstelle der Funktion außerhalb des interessanten Bereichs. Da die Existenz der Lösung $s_0 \in (0, \tilde{s}(\theta))$ gesichert ist, existiert demnach ein Schnittpunkt der beiden Funktionen $w_0 \in (0, w_{\max})$. Die rechte Seite ist insbesondere auf dem Intervall $(0, w_{\max})$ positiv, die linke Seite ist auf $(0, w_{\min})$ negativ. Damit muss der Schnittpunkt $w_0 \in [w_{\min}, w_{\max})$ liegen, wobei aus dessen Existenz die Eigenschaft $w_{\min} < w_{\max}$ folgt. Aus dem Monotonieverhalten folgt die Eindeutigkeit dieses Schnittpunktes, sodass der Zusammenhang $w_0 = s_0^4$ gelten muss.

Erneutes Quadrieren der Gleichung (5.15) und anschließendes Umformen impliziert die Gleichung

$$\frac{s^8}{\ell} (\bar{K}_X^2 + \bar{K}_Y^2) (\bar{K}_X^2 \ell^2 + \bar{K}_Y^2 x_A^2) - \frac{2s^4}{\ell} (\bar{K}_X^2 \ell (\bar{\mu}_1^2 + \bar{\mu}_2^2) + \bar{K}_Y^2 x_A (\bar{\mu}_1^2 - \bar{\mu}_2^2)) + (\bar{\mu}_1^2 - \bar{\mu}_2^2)^2 = 0. \quad (5.16)$$

Dabei ist durch das Quadrieren neben der Lösung s_0 eine weitere Lösung s_1 entstanden, welche die Gleichung

$$-s^4 (2\bar{K}_X^2 \ell^2 + \bar{K}_Y^2 (\ell^2 + x_A^2)) + 2\ell^2 (\bar{\mu}_1^2 + \bar{\mu}_2^2) = \sqrt{(4\ell^2 \bar{\mu}_1^2 - \bar{K}_Y^2 (\ell + x_A)^2 s^4) (4\ell^2 \bar{\mu}_2^2 - \bar{K}_Y^2 (\ell - x_A)^2 s^4)} \quad (5.17)$$

erfüllt. Dies ist offensichtlich keine Lösung der Gleichung (5.15) und damit keine Lösung der Ursprungsgleichung (5.14). Durch erneute Substitution von $w = s^4$ lässt sich (5.16) als quadratische Gleichung auffassen, mit den zwei Lösungen

$$w_{\pm} = \frac{(\bar{\mu}_1^2 + \bar{\mu}_2^2) \bar{K}_X^2 \ell^2 + (\bar{\mu}_1^2 - \bar{\mu}_2^2) \bar{K}_Y^2 x_A \ell \pm \sqrt{\ell^2 \bar{K}_X^2 (4\bar{\mu}_1^2 \bar{\mu}_2^2 \ell^2 (\bar{K}_X^2 + \bar{K}_Y^2) - \bar{K}_Y^2 (\bar{\mu}_1^2 (\ell - x_A) + \bar{\mu}_2^2 (\ell + x_A))^2)}}{(\bar{K}_X^2 + \bar{K}_Y^2) (\bar{K}_X^2 \ell^2 + \bar{K}_Y^2 x_A^2)}.$$

Der Radikand der Wurzel muss nicht-negativ sein, um die Existenz einer reellen Lösung von (5.14) zu gewährleisten. Damit gilt insbesondere $w_- \leq w_+$. Es bleibt zu prüfen, welche der beiden Lösungen eine Lösung von (5.14) ist. In den obigen Ausführungen wurde bereits verdeutlicht, dass die „korrekte“ Lösung $w_0 \in (w_{\min}, w_{\max})$ ist, während die „inkorrekte“ Lösung mit w_1 bezeichnet wird und die Gleichung (5.17) erfüllt. Substitution von $w = s^4$ in (5.17) ergibt auf der linken Seite analog zu den vorherigen Argumentationen eine lineare, jedoch streng monoton fallende Funktion mit der Nullstelle w_{\min} . Für die rechte Seite gelten dieselben Eigenschaften wie bereits für die rechte Seite der Gleichung (5.15). Die Situation ist in Abbildung 5.10 veranschaulicht. Damit ergibt sich, dass für die Lösung w_1 der Gleichung (5.17) $w_1 \leq w_{\min}$ gilt. Es folgt insgesamt $w_1 \leq w_0$, sodass sich die Zuordnung

$$w_0 = w_+ \quad \text{und} \quad w_1 = w_-$$

ergibt. Die gesuchte Lösung ist $s_0 = w_0^{1/4} = w_+^{1/4}$.

Betrachte nun abschließend den Fall $\sin \beta = 0$, veranschaulicht in Abbildung 5.6a. Die beiden Funktionen $F_{1,2}(\cdot, \beta)$ sind nach Lemma 5.9 konstant negativ und besitzen somit keine Nullstelle. Setzen wir $\sin \beta = 0$ und damit $|\cos \beta| = 1$ in die dritte Ungleichung ein, so ergibt sich

$$F_3(s, \beta) = s^2 K_X - \bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2 = 0.$$

Umstellen der obigen Gleichung ergibt schließlich die Nullstelle

$$s_3 = \sqrt{\frac{\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2}{K_X}}.$$

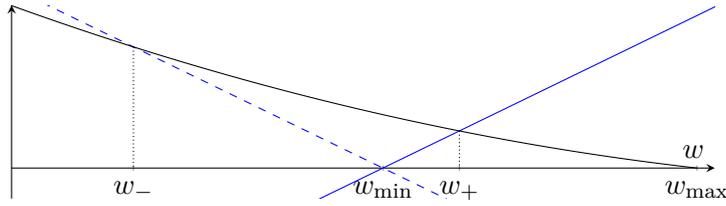


Abbildung 5.10: Skizze zum Beweis von Satz 5.14. Schematisch dargestellt sind die Graphen der linken und rechten Seite von Gleichung (5.15) (blau und schwarz) und die linke Seite der „inkorrekten“ Gleichung (5.17) (blau gestrichelt) gemeinsam mit ihren Schnittpunkten.

Setzen wir $\sin \beta = 0$ und $|\cos \beta| = 1$, das heißt $\overline{K}_Y = 0$ und $|\overline{K}_X| = K_X$, in das obige Ergebnis für s_0 ein, so erhalten wir mittels

$$\left(\frac{(\bar{\mu}_1^2 + \bar{\mu}_2^2) K_X^2 \ell^2 + \sqrt{\ell^2 K_X^2 (4\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \ell^2 K_X^2)}}{K_X^4 \ell^2} \right)^{1/4} = \left(\frac{(\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2)^2 K_X^2 \ell^2}{K_X^4 \ell^2} \right)^{1/4} = \sqrt{\frac{\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2}{K_X}}$$

ebenfalls die Lösung s_3 . Damit können die beiden letzten Fälle zusammengefasst werden und die Behauptung des Lemmas ist bewiesen. \square

Bemerkung 5.15. An dieser Stelle wird besonders hervorgehoben, dass die maximale Windstärke bei einem relativen Angriffswinkel $\beta = 0$ mit dem Ergebnis aus dem eindimensionalen Fall aus Kapitel 4 übereinstimmt.

Abschließend wird noch ein Lemma eingeführt, welches im weiteren Verlauf des Kapitels benötigt wird. Diese Eigenschaft ergibt sich aufgrund der angenommenen Bug-Heck-Symmetrie.

Lemma 5.16. (Symmetrie der stationären Zulässigkeitsmenge)

Sei $\psi \in \Pi$. Es gilt die periodische Eigenschaft

$$\mathcal{K}_\psi = \mathcal{K}_{\psi \pm \pi}.$$

Beweis. Die stationäre Zulässigkeitsmenge \mathcal{K}_ψ wird eindeutig durch den explizit berechenbaren Rand aus Satz 5.14 definiert. Wollen wir nun den Rand von $\mathcal{K}_{\psi \pm \pi}$ berechnen, ergibt sich zunächst der neue relative Angriffswinkel durch $\beta \pm \pi$. Aus der Periodizität der Sinus- und Kosinusfunktion folgt direkt

$$\begin{aligned} \sin(\beta \pm \pi) &= -\sin(\beta) \\ \cos(\beta \pm \pi) &= -\cos(\beta). \end{aligned}$$

In allen Berechnungsschritten aus Satz 5.14 taucht der relative Angriffswinkel im Sinus oder Kosinus auf und diese wiederum mit Beträgen oder Quadraten, sodass sich das negative Vorzeichen auflöst. Damit ergibt sich ein identischer Rand

$$s_\psi^*(\theta) = s_{\psi \pm \pi}^*(\theta) \quad \text{für alle } \theta \in \Pi,$$

woraus die Identität der Mengen resultiert. \square

Stimmen geplante Start- und Endpose des Manövers überein, so sind wir in der Lage, die Menge aller wahren Winde zu bestimmen, bei denen das Schiff in der Orientierung ψ konstant gehalten werden kann. Liegt der wahre Wind innerhalb der stationären Zulässigkeitsmenge, ist das stationäre Manöver durchführbar.

Bei ungleicher Start- und Endpose muss das Schiff durch die Schlepperboote tatsächlich in Bewegung gesetzt werden. In diesem Fall betrachten wir im folgenden Abschnitt die kontrollierten bewegten Manöver.

5.2.2 Kontrollierte Manöver in Bewegung

Stimmen Startpose η_0 und Endpose η_1 nicht überein, müssen die Schlepperkräfte stark genug sein, das geplante Manöver kontrolliert durchzuführen. Voraussetzung ist, wie bereits eingangs durch das Beispiel 5.3 motiviert wurde, dass die Schlepperboote zu jedem Zeitpunkt während des Manövers in der Lage sind, das Schiff stillzuhalten, um unkontrolliertes Abdriften zu vermeiden. Um das Schiff halten zu können, müssen die Schlepperboote der Windkraft, die auf das ruhende Schiff wirkt, entgegenwirken können, was bereits im vorangegangenen Abschnitt untersucht wurde. Eine solche Kraft allein ist allerdings nicht ausreichend. Zusätzlich müssen die Schlepperboote - wenn auch nur minimal - mehr Kraft besitzen, um das Schiff - wenn auch nur sehr langsam - in Bewegung zu setzen. Damit sind die Schlepperboote in der Lage, das Schiff mit einer sehr geringen Geschwindigkeit das gewünschte Manöver kontrolliert durchführen zu lassen. Durch diese geringe Geschwindigkeit können die dynamischen Effekte wie die kinematischen Bewegungsgleichungen ebenso wie die zusätzliche Masse und die weiteren Rumpfkkräfte nahezu vernachlässigt werden. Von diesem Vorteil konnten wir bereits bei den stationären Manövern profitieren. In der Realität ist eine solche Annahme gerechtfertigt, da sich von Schleppern gesteuerte Schiffe nur mit geringer Geschwindigkeit bewegen. Insbesondere sei hier anzumerken, dass aus diesem Grund die Bezeichnung „in Bewegung“ hier mit Vorsicht zu interpretieren ist, da weniger die dynamische Bewegung betrachtet wird.

Aufbauend auf der Idee, dass die Dynamik nahezu vernachlässigt werden kann, wird zunächst eine Trajektorie betrachtet, die das geplante Manöver erfüllt, allerdings die dynamischen Effekte wie die wirkende Windkraft ebenso wie die Rumpfkkräfte und die Kinetik außer Acht lässt. Eine solche Trajektorie (η, ν) ist gegeben durch die Lösung (η, ν, h, t_f) des einfachen Systems

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{\eta} = \bar{R}(\psi)\nu t_f & \eta(0) = \eta_0 \quad \nu(0) = 0 \\ \dot{\nu} = h t_f & \eta(1) = \eta_1 \quad \nu(1) = 0 \end{array} \right\}, \quad (P_0)$$

mit der Beschleunigung h und der Endzeit t_f . Sind nun bei einem wahren Wind (s, θ) die Schlepperkräfte so stark, dass sie die diskutierten Bedingungen der stationären Manöver zu jedem Zeitpunkt und damit für jede angenommene Orientierung entlang dieser Trajektorie

$$\text{range}(\psi) =: \Psi$$

strikt erfüllen, sind noch Kraftkapazitäten übrig, sodass sie dem Wind nicht nur entgegenwirken und das Schiff stationär halten können, sondern es in Bewegung setzen

können, wenn auch nur sehr langsam. Damit kann aus der betrachteten Trajektorie eine Lösung des Problems $(P(s, \theta))$ konstruiert werden. Auf dieser Idee beruht der folgende Satz.

Satz 5.17. (Bedingungen für kontrollierte Manöver)

Falls eine Lösung (η, ν, h, t_f) des Systems (P_0) mit $\eta, \nu \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^3)$, $h \in C([0, 1], \mathbb{R}^3)$ und $t_f > 0$ existiert, sodass die Bedingungen

$$F_{1,2,3}(s, \theta - \psi_0) = f_{1,2,3}(\gamma(s, \theta - \psi_0)) < 0 \quad (5.18)$$

für alle $\psi_0 \in \Psi$ erfüllt sind, ist das Tupel (s, θ) bezüglich des Systems $(P(s, \theta))$ zulässig.

Beweis. Sei $(s, \theta) \in \mathbb{R}^\pi$ und (η, ν, h, t_f) eine Lösung des Systems (P_0) mit $\eta, \nu \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^3)$, $h \in C([0, 1], \mathbb{R}^3)$ und $t_f > 0$, sodass die Bedingungen (5.18) für jedes $\psi_0 \in \Psi$ gelten.

Ziel ist nun die Konstruktion einer Lösung des Problems $(P(s, \theta))$. Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ lässt sich zunächst die erste Gleichung der Dynamik durch

$$\dot{\eta} = \bar{R}(\psi)\nu t_f = \bar{R}(\psi)\varepsilon\nu \frac{t_f}{\varepsilon} \quad (5.19)$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \eta(0) &= \eta_0 & \varepsilon\nu(0) &= 0 \\ \eta(1) &= \eta_1 & \varepsilon\nu(1) &= 0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

erkennen. Weiterhin ergibt sich aus den Eigenschaften (5.2) und (5.1) der Funktionen a und b durch Addition einer Null

$$\begin{aligned} a\left(\varepsilon\nu, \frac{\varepsilon\dot{\nu}}{\varepsilon}\right) &= a\left(\varepsilon\nu, \varepsilon^2 \frac{\dot{\nu}}{t_f}\right) = \varepsilon^2 a\left(\nu, \frac{\dot{\nu}}{t_f}\right) \\ &= \underbrace{\varepsilon^2 a\left(\nu, \frac{\dot{\nu}}{t_f}\right) - \varepsilon^2 b\left(\nu, \frac{\dot{\nu}}{t_f}\right) - w(\psi, \varepsilon\nu, s, \theta) - g(\varepsilon\nu)}_{=:\mu_\varepsilon} \\ &\quad + b\left(\varepsilon\nu, \varepsilon^2 \frac{\dot{\nu}}{t_f}\right) + w(\psi, \varepsilon\nu, s, \theta) + g(\varepsilon\nu). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Zur Unterstützung der Übersichtlichkeit wurden die Abhängigkeiten von der Zeit t nicht explizit notiert, allerdings hängt die Funktion $\mu_\varepsilon \in C([0, 1], \mathbb{R}^3)$ stetig von der Zeitvariablen t ab. Definieren wir weiterhin $\hat{\gamma}(t, \varepsilon) := \mu_\varepsilon(t)$, so hängt diese Funktion neben t auch stetig von ε ab. Dies ergibt sich aus der Tatsache, dass sowohl g als auch w stetig von ν abhängig sind und Verkettungen stetiger Funktionen wiederum stetig sind.

Weiterhin ist die Funktion ν per Definition stetig differenzierbar, sodass ν und $\dot{\nu}$ auf dem kompakten Intervall $[0, 1]$ beschränkt sind. Daraus folgt ebenso die Beschränktheit der Funktionen $a(\nu, \frac{\dot{\nu}}{t_f})$ und $b(\nu, \frac{\dot{\nu}}{t_f})$ auf $[0, 1]$. Damit ergibt sich der Grenzwert

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{\gamma}(t, \varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\underbrace{\varepsilon^2 a\left(\nu(t), \frac{\dot{\nu}(t)}{t_f}\right)}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\varepsilon^2 b\left(\nu(t), \frac{\dot{\nu}(t)}{t_f}\right)}_{\rightarrow 0} - \underbrace{w(\psi(t), \varepsilon\nu(t), s, \theta)}_{\rightarrow w(\psi(t), 0, s, \theta)} - \underbrace{g(\varepsilon\nu(t))}_{\rightarrow 0} \right) \\ &= -w(\psi(t), 0, s, \theta) = \gamma(s, \theta - \psi(t)) \end{aligned}$$

für $t \in [0, 1]$. Für diesen Grenzwert sind per Annahme die Bedingungen (5.18) für alle $t \in [0, 1]$ erfüllt, denn $\psi(t) \in \Psi$ für alle $t \in [0, 1]$. Da die Funktionen $f_{1,2,3}$ stetig von γ abhängen, existiert ein $\tilde{\varepsilon} > 0$, sodass $\hat{\gamma}(t, \tilde{\varepsilon})$ die Bedingungen (5.18) ebenfalls für alle $t \in [0, 1]$ erfüllt. Gemeinsam mit der Stetigkeit von $\hat{\gamma}(t, \tilde{\varepsilon})$ ergibt sich durch Anwendung von Lemma 5.7 die Existenz von $\mu_1, \mu_2 \in C([0, 1], \mathbb{R}^2)$, die der Darstellung

$$\mu_{\tilde{\varepsilon}}(t) = \hat{\gamma}(t, \tilde{\varepsilon}) = \begin{pmatrix} \mu_{1_X}(t) + \mu_{2_X}(t) \\ \mu_{1_Y}(t) + \mu_{2_Y}(t) \\ \ell\mu_{1_Y}(t) - \ell\mu_{2_Y}(t) \end{pmatrix}$$

für jedes $t \in [0, 1]$ genügen und die Ungleichungen

$$\|\mu_{1_X}^2 + \mu_{1_Y}^2\|_{\infty} \leq \bar{\mu}_1^2 \quad \|\mu_{2_X}^2 + \mu_{2_Y}^2\|_{\infty} \leq \bar{\mu}_2^2$$

erfüllen. Mit der Dynamik (5.19) und (5.21) und den Randwerten (5.20) ergibt sich insgesamt, dass $(\eta, \tilde{\varepsilon}\nu, \mu_{\tilde{\varepsilon}}, \frac{t_f}{\tilde{\varepsilon}})$ eine Lösung von $(P(s, \theta))$ ist und das Tupel (s, θ) somit zulässig ist. \square

Damit wurden nun hinreichende Bedingungen hergeleitet, die die Durchführbarkeit eines Manövers beziehungsweise die Zulässigkeit eines wahren Windes sichern. Im Gegensatz zum eindimensionalen Fall handelt es sich hierbei allerdings nicht um eine Äquivalenzbeziehung. Es können zulässige Windparameter (s, θ) existieren, welche die genannten Bedingungen *nicht* erfüllen. Wir sind mithilfe dieses Satzes lediglich in der Lage, eine Teilmenge der gesamten Zulässigkeitsmenge \mathcal{S} eines Manövers zu berechnen, die *Zulässigkeitsmenge für bewegte kontrollierte Manöver* \mathcal{K} .

Definition 5.18. (Zulässigkeitsmenge für bewegte kontrollierte Manöver)

Die Menge

$$\mathcal{K} = \left\{ (s, \theta) \in \mathbb{R}_{\pi} \mid \begin{array}{l} \exists \text{ Lösung } (\eta, \nu, h, t_f) \text{ zu } (P_0) \text{ mit} \\ F_{1,2,3}(s, \theta - \hat{\psi}) < 0 \text{ für alle } \hat{\psi} \in \Psi \end{array} \right\}$$

wird *kontrollierte Zulässigkeitsmenge* genannt.

Die kontrollierte Zulässigkeitsmenge umfasst damit alle Windtupel (s, θ) , bei denen das Schiff in der Lage ist, eine Trajektorie entlangzufahren, wobei sie zu jedem Zeitpunkt stationär gehalten und gleichzeitig - wenn auch nur sehr langsam - in Bewegung gesetzt werden können.

In Abschnitt 5.2.1 haben wir gesehen, dass die stationäre Zulässigkeitsmenge, also die Menge aller wahren Winde, bei der das Schiff in einer festen Position gehalten werden kann, unabhängig von der Position des Schiffes und ausschließlich von dessen Orientierung abhängt. Ebenso lässt sich anhand der obigen Definition der kontrollierten Zulässigkeitsmenge feststellen, dass sie unabhängig von dem Pfad ist, den das Schiff bei der Trajektorie durchläuft, sondern nur von den Orientierungen entlang der Trajektorie abhängt.

Weiterhin lässt sich anhand der obigen Definition erkennen, dass die kontrollierte Zulässigkeitsmenge durch jede Orientierung, die entlang des Manövers angenommen wird,

weiter eingeschränkt wird. Aufgrund dieser Tatsache wird deutlich, dass zur Berechnung der vollständigen Menge eine Trajektorie betrachtet werden muss, die zum einen Lösung des Systems (P_0) ist, zum anderen aber ausschließlich die notwendigen Orientierungen annimmt. Auf diese Idee wird im weiteren Verlauf noch genauer eingegangen.

Zunächst wird festgestellt, dass die Sternförmigkeit für die kontrollierte Zulässigkeitsmenge \mathcal{K} ebenso gezeigt werden kann wie im stationären Fall, da dieselben streng monoton wachsenden Funktionen betrachtet werden.

Lemma 5.19. (Sternförmigkeit)

Die kontrollierte Zulässigkeitsmenge \mathcal{K} ist eine sternförmige Menge, das heißt es gilt für jedes $\theta \in \Pi$ die Implikation

$$(\hat{s}, \theta) \in \mathcal{K} \implies (s, \theta) \in \mathcal{K} \quad \text{für alle } 0 \leq s \leq \hat{s}.$$

Beweis. Sei $(\hat{s}, \theta) \in \mathcal{K}$. Damit existiert eine Lösung (η, ν, h, t_f) zum System (P_0) , sodass

$$F_{1,2,3}(\hat{s}, \theta - \psi) < 0$$

für alle $\psi \in \Psi$ gilt. Nun lässt sich der Beweis von Lemma 5.11 analog für jedes $\psi \in \Psi$ durchführen. Im Unterschied zu der Beweisführung sind in diesem Fall die Ungleichungen strikt erfüllt, sodass sich daraus

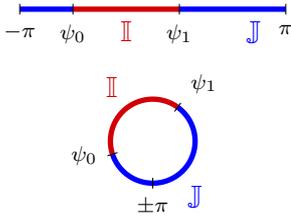
$$F_{1,2,3}(s, \theta - \psi) < 0 \quad \text{für alle } 0 \leq s \leq \hat{s}$$

ergibt. □

Es soll nun die kontrollierte Zulässigkeitsmenge berechnet werden. Im Folgenden werden zwei unterschiedliche Ansätze zur Berechnung diskutiert. Die erste Vorgehensweise beruht auf der Annahme, dass keine geometrischen Beschränkungen vorhanden sind, und berechnet so analytisch die kontrollierte Zulässigkeitsmenge. Im Gegensatz dazu wird im Anschluss ein allgemeingültiger numerischer Ansatz durch Lösung eines optimalen Steuerprozesses vorgestellt.

5.2.2.1 Analytische Berechnung der kontrollierten Zulässigkeitsmenge

Die bereits hergeleitete explizite Berechnung der stationären Zulässigkeitsmenge soll genutzt werden, um die kontrollierte Zulässigkeitsmenge zu berechnen. Als weitere Grundlage dient eine Lösung (η, ν, h, t_f) des Systems (P_0) , wobei ausschließlich die notwendigen Orientierungen angenommen werden. Damit alle wahren Winde (s, θ) , bei denen ein kontrolliertes Manöver durchführbar ist, erfasst werden, darf keine Trajektorie betrachtet werden, bei der das Schiff Orientierungen annimmt, die nicht zwingend erforderlich sind. Jede zusätzliche Orientierung führt möglicherweise zu einer Einschränkung der kontrollierten Zulässigkeitsmenge.



Die Menge Ψ , also die Menge der angenommenen Orientierungen, ist minimal, wenn das Schiff ausschließlich die Orientierungen zwischen Startorientierung ψ_0 und Endorientierung ψ_1 annimmt. Dabei gibt es, je nach Definition von ψ_0 und ψ_1 und ob das Schiff eine Links- oder Rechtsdrehung durchführt, die zwei Möglichkeiten

Abbildung 5.11: Darstellung der Mengen \mathbb{I} und \mathbb{J} .

$$\mathbb{I} := \left[\min\{\psi_0, \psi_1\}, \max\{\psi_0, \psi_1\} \right]$$

$$\text{oder } \mathbb{J} := \Pi \setminus \overset{\circ}{\mathbb{I}},$$

dargestellt in Abbildung 5.11 auf zwei unterschiedliche Weisen, als Intervalle (oben) und als Ring unter Berücksichtigung der 2π -Periodizität (unten). Dabei bezeichnet $\overset{\circ}{\mathbb{I}}$ das Innere von \mathbb{I} . Die Menge der angenommenen Orientierungen ist dann minimal, wenn sie durch

$$\Psi_{\min} := \begin{cases} \mathbb{I} & , \text{ falls } |\psi_0 - \psi_1| \leq \pi \\ \mathbb{J} & \text{sonst} \end{cases}$$

beschrieben wird. Gemeinsam mit der anschließenden Bemerkung liefert das folgende Lemma die Existenz einer Lösung (η, ν, h, t_f) des Systems (P_0) mit der minimalen Menge $\Psi = \Psi_{\min}$.

Lemma 5.20. (Existenz einer Lösung)

Es existiert eine Lösung (η, ν, h, t_f) zum System (P_0) mit $\eta, \nu \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^3)$, $h \in C([0, 1], \mathbb{R}^3)$ und $t_f > 0$ und $\text{range } \psi = \mathbb{I}$.

Beweis. Durch komponentenweise Anwendung von Lemma 4.4 existiert eine Lösung zum System

$$\begin{cases} \dot{\eta} = g & \eta(0) = \eta_0 & g(0) = 0 \\ \dot{g} = k & \eta(1) = \eta_1 & g(1) = 0 \end{cases}$$

mit $\eta, g \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^3)$ und $k \in C([0, 1], \mathbb{R}^3)$. Mit Blick auf den Beweis von Lemma 4.4 liefert dies insbesondere für die dritte Komponente von η die Eigenschaft $\text{range } \psi = \mathbb{I}$.

Aufgrund der Orthogonalität von $\bar{R}(\psi)$ kann die Differentialgleichung des Systems dabei durch

$$\dot{\eta} = \bar{R}(\psi)\bar{R}^T(\psi)g = \bar{R}(\psi)\nu \quad (5.22)$$

dargestellt werden, wobei $\nu := \bar{R}^T(\psi)g$ gewählt wird, mit $\nu \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^3)$. Damit ergeben sich insbesondere die Randwerte $\nu(0) = 0 = \nu(1)$. Weiterhin folgt aus (5.22) und mithilfe der Ketten- und Produktregel die Ableitung

$$\dot{\nu} = \bar{R}'^T(\psi)\dot{\psi}g + \bar{R}^T(\psi)\dot{g} = \bar{R}'^T(\psi)g g_\psi + \bar{R}^T(\psi)k,$$

wobei $g_\psi \in C^1([0, 1])$ die dritte Komponente der Funktion g beschreibt und $\bar{R}'(\psi)$ die komponentenweise Ableitung von $\bar{R}(\psi)$ nach ψ darstellt. Die Wahl von

$$h := \bar{R}'^T(\psi)g g_\psi + \bar{R}^T(\psi)k \in C([0, 1], \mathbb{R}^3)$$

ergibt schließlich, dass $(\eta, \nu, h, 1)$ eine Lösung des Systems (P_0) mit den geforderten Eigenschaften ist. \square

Bemerkung 5.21. Das obige Lemma 5.20 liefert „nur“ die Existenz einer Lösung mit $\Psi = \mathbb{I}$, da die Periodizität der Winkel, also der „Sprung“ von π auf $-\pi$, im Beweis nicht berücksichtigt werden kann. Durch periodische Anpassung der Randbedingung kann allerdings ebenfalls die Existenz einer Lösung mit $\Psi = \mathbb{J}$ nachgewiesen werden. Dazu müssen wir beispielsweise die „kleinere“ der Randbedingungen 2π -periodisch undefinieren zu

$$\min\{\psi_0, \psi_1\} \mapsto \min\{\psi_0, \psi_1\} + 2\pi.$$

Mit diesen neuen Randbedingungen kann durch das folgende Lemma eine Lösung (η, ν, h, t_f) gefunden werden, sodass nach 2π -Normalisierung auf das Intervall Π schließlich $\Psi = \mathbb{J}$ gilt. Insgesamt folgt, dass die Existenz einer Lösung mit den notwendigen Orientierungen $\Psi = \Psi_{\min}$ gesichert ist.

Zur Berechnung der kontrollierten Zulässigkeitsmenge kann also eine Trajektorie mit range $\psi = \Psi_{\min}$ betrachtet werden. Weiterhin zeichnet sich das kontrollierte Manöver dadurch aus, dass das Schiff an jeder dieser Orientierungen stillgehalten werden kann. Die wahren Winde, die innerhalb der kontrollierten Zulässigkeitsmenge liegen, müssen somit ebenfalls in jeder stationären Zulässigkeitsmenge \mathcal{K}_ψ für alle $\psi \in \Psi_{\min}$ liegen. Bei den wahren Winden, die auf dem Rand $\partial\mathcal{K}_\psi$ der stationären Zulässigkeitsmengen liegen, sind die Schlepperkräfte gerade stark genug, der Windkraft entgegenzuwirken und das Schiff stationär zu halten. Dort sind keine Kapazitäten vorhanden, noch minimal stärker zu ziehen oder zu drücken, sodass sich das Schiff in Bewegung setzt. Daher wird nur das *Innere*

$$\mathring{\mathcal{K}}_\psi := \mathcal{K}_\psi \setminus \left\{ \left(s_\psi^*(\theta), \theta \right) \mid \theta \in \Pi \right\}$$

der stationären Zulässigkeitsmengen berücksichtigt. Motiviert durch diese Überlegungen gibt der folgende Satz eine Vorgehensweise zur analytischen Berechnung der kontrollierten Zulässigkeitsmenge \mathcal{K} auf Basis der stationären Zulässigkeitsmengen \mathcal{K}_ψ .

Satz 5.22. Die Zulässigkeitsmenge für bewegte kontrollierte Manöver ergibt sich durch die Schnittmenge

$$\mathcal{K} = \bigcap_{\psi \in \Psi_{\min}} \mathring{\mathcal{K}}_\psi,$$

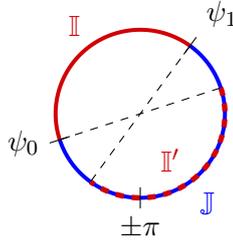
wobei $\mathring{\mathcal{K}}_\psi$ das Innere der Menge \mathcal{K}_ψ beschreibt.

Beweis.

„ \subseteq “: Sei $(s, \theta) \in \mathcal{K}$. Damit existiert eine Lösung (η, ν, h, t_f) des Systems (P_0) mit $F_{1,2,3}(s, \theta - \hat{\psi}) < 0$ für alle $\hat{\psi} \in \Psi$. Abhängig von der Drehrichtung des Schiffes muss entweder $\mathbb{I} \subseteq \Psi$ oder $\mathbb{J} \subseteq \Psi$ gelten. Wir betrachten den Fall $|\psi_0 - \psi_1| \leq \pi$, analog lassen sich jedoch auch alle Überlegungen auf den anderen Fall übertragen. Damit ist $\Psi_{\min} = \mathbb{I}$. Falls $\mathbb{I} \subseteq \Psi$ gilt, ist insbesondere

$$F_{1,2,3}(s, \theta - \hat{\psi}) < 0 \quad \text{für alle } \hat{\psi} \in \Psi_{\min} = \mathbb{I} \subseteq \Psi$$

erfüllt. Aufgrund der nicht erfüllten Rand-Eigenschaften (5.13) aus Lemma 5.13 ist $(s, \theta) \in \mathring{\mathcal{K}}_{\hat{\psi}}$ für alle $\hat{\psi} \in \Psi_{\min}$.



Falls $J \subseteq \Psi$, ist mit gleicher Argumentation zunächst $(s, \theta) \in \mathring{\mathcal{K}}_{\hat{\psi}}$ für alle $\hat{\psi} \in J$. Aufgrund der Annahme $|\psi_0 - \psi_1| \leq \pi$ existiert wie in der nebenstehenden Abbildung in rot-gestrichelt dargestellt ein Intervall $I' \subseteq J$ mit

$$I' = \{ \psi' \in J \mid \exists \psi \in I \text{ mit } \psi' = \psi \pm \pi \}.$$

Es ist also insbesondere $(s, \theta) \in \mathring{\mathcal{K}}_{\hat{\psi}}$ für alle $\hat{\psi} \in I'$. Unter Anwendung des Symmetrie-Lemmas 5.16 ergibt sich schließlich $(s, \theta) \in \mathring{\mathcal{K}}_{\hat{\psi}}$ für alle $\hat{\psi} \in I = \Psi_{\min}$.

„ \supseteq “: Sei nun $(s, \theta) \in \mathring{\mathcal{K}}_{\hat{\psi}}$ für alle $\hat{\psi} \in \Psi_{\min}$. Damit gelten die drei Ungleichungen

$$F_{1,2,3}(s, \theta - \hat{\psi}) < 0 \quad \text{für alle } \hat{\psi} \in \Psi_{\min}.$$

Nach Lemma 5.20 existiert eine Lösung (η, ν, h, t_f) des Systems (P_0) , wobei $\Psi = \Psi_{\min}$ gilt. Damit ist $(s, \theta) \in \mathcal{K}$. \square

Mit dem obigen Satz ergibt sich aus der Darstellung als Schnitt über analytisch berechenbare Mengen eine explizite Berechnungsweise des Randes der kontrollierten Zulässigkeitsmenge. Wie bereits in vereinfachter Form im eindimensionalen Fall mit einem Freiheitsgrad gesehen wurde, kann die Berechnung der kontrollierten Zulässigkeitsmenge ebenfalls auf die Lösung optimaler Steuerprozesse zurückgeführt werden. Dies wird im nächsten Abschnitt erläutert.

5.2.2.2 Berechnung der kontrollierten Zulässigkeitsmenge durch einen Optimalsteuerungsprozess

Im Gegensatz zur analytischen Vorgehensweise kann die kontrollierte Zulässigkeitsmenge auch durch die Lösung optimaler Steuerprozesse berechnet werden. Da für diese Menge die Sternförmigkeit in Lemma 5.19 nachgewiesen wurde, kann die Berechnung der Menge auf die Berechnung des Randes $\partial\mathcal{K} = \{s^*(\theta) \mid \theta \in \Pi\}$ zurückgeführt werden, wie auch schon in der analytischen Betrachtung. Wie bereits ausgeführt, ist dieser Rand bei den kontrollierten Manövern in Bewegung nicht Teil der Menge. Der nachfolgende Satz liefert eine numerische Berechnungsmethode des Randes durch Lösung optimaler Steuerprozesse. Gesucht ist die größtmögliche Windstärke $s^*(\theta)$, sodass bei einer Windrichtung θ eine zum geplanten Manöver passende Trajektorie existiert. Zur weiteren Sicherstellung, dass es sich um ein kontrolliert durchgeführtes Manöver handelt, müssen zudem die drei Ungleichungen zu jedem Zeitpunkt strikt erfüllt sein.

Satz 5.23. (Optimaler Steuerprozess).

Für $\theta \in \Pi$ berechnet sich der Randpunkt der kontrollierten Zulässigkeitsmenge $s^*(\theta)$

durch den Zielfunktionswert des folgenden optimalen Steuerprozesses

$$\begin{aligned} & \sup_{s \in \mathbb{R}_{\geq 0}} s \\ & \text{unter } \dot{\eta} = \bar{R}(\psi)\nu t_f \\ & \quad \dot{\nu} = h t_f \\ & \quad \eta(0) = \eta_0 \quad \nu(0) = 0 \\ & \quad \eta(1) = \eta_1 \quad \nu(1) = 0 \\ & \quad F_{1,2,3}(s, \theta - \psi(t)) \leq 0 \quad \text{für alle } t \in [0, 1] \end{aligned}$$

mit $\eta, \nu \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^3)$, $h \in C([0, 1], \mathbb{R}^3)$ und für ein festes $t_f > 0$.

Diese optimalen Steuerprozesse können beispielsweise mit der Softwarebibliothek TransWORHP gelöst werden.

Obwohl sich die analytische Vorgehensweise durch Präzision und geringen Rechenaufwand auszeichnet, bietet die numerische Berechnung mittels TransWORHP einige darüber hinausgehende Vorteile. Falls geometrische Beschränkungen wie Häfen oder Ähnliches als Erweiterung in die Berechnungen integriert werden sollen, ist die Existenz einer Lösung mit minimal angenommenen Winkeln $\Psi = \Psi_{\min}$ nicht länger gewährleistet. Die Berechnung einer Trajektorie und die Maximierung der Windstärke können damit nicht länger losgelöst voneinander betrachtet werden. Lösung der optimalen Steuerprozesse liefert allerdings nach Inklusion der zusätzlichen Nebenbedingungen zur Modellierung des Hafens die korrekte kontrollierte Zulässigkeitsmenge.

Ein weiterer Vorteil liegt speziell in der Anwendung der Bibliothek TransWORHP. Die Konstanten k_X, k_Y, A_F, A_L sind entscheidend zur Berechnung der Zulässigkeitsmenge, allerdings ist es nicht oder nur sehr schwer möglich, diese absolut korrekt für ein Schiff zu berechnen. In den meisten Fällen werden nur geschätzte Werte angegeben. Wird die kontrollierte Zulässigkeitsmenge mithilfe von TransWORPH berechnet, so kann mithilfe der in Abschnitt 2.1.4 erwähnten Sensitivitätsanalyse der Einfluss der Formparameter auf die Zulässigkeitsmenge untersucht und berechnet werden. Weiterhin kann eine solche Sensitivitätsanalyse bezüglich der Beschränkungen an die Schlepperkräfte $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$ durchgeführt werden. Liegt der aktuelle Wind beispielsweise außerhalb des sicheren Bereiches, so kann mithilfe der Analyse abgeschätzt werden, wie die Schlepperbeschränkungen erhöht werden müssen, um das Manöver dennoch kontrolliert durchführen zu können. Diese Analysen werden in Abschnitt 6.4 genauer dargestellt.

Kapitel 6

Auswertung der Risikoanalyse

Im letzten Kapitel wurden die theoretischen Grundlagen zur Berechnung der Zulässigkeitsmengen gelegt. Dieses Kapitel beschäftigt sich nun damit, sie auf einem Anwendungsbeispiel auszuwerten.

Im vorliegenden Kapitel werden die Ergebnisse aus Kapitel 5 der Risikoanalyse bezüglich eines Modells mit drei Freiheitsgraden untersucht und ausgewertet. Dabei werden wir uns zunächst auf die stationären Manöver in Abschnitt 6.1 konzentrieren und inwiefern sich deren Form bei verschiedenen Modellierungen verändert. Anschließend wird in Abschnitt 6.2 der Fokus auf die kontrollierten Manöver gesetzt, wobei zwischen den zwei Manövern der Geradeausfahrt und der Drehung unterschieden wird. Zur Berechnung der kontrollierten Zulässigkeitsmengen wird der analytische Ansatz genutzt. Im darauffolgenden Abschnitt 6.3 wird das theoretische Resultat mit den numerischen Ergebnissen verglichen, die durch die Lösung von Optimalsteuerungsproblemen mithilfe der Softwarebibliothek TransWORHP ermittelt werden. Durch Berechnung der kontrollierten Zulässigkeitsmengen mithilfe von TransWORHP wird unter anderem die Durchführung einer Sensitivitätsanalyse ermöglicht. Eine solche Analyse erfolgt abschließend in Abschnitt 6.4.

Alle genannten Größen in diesem Kapitel werden durch SI-Einheiten angegeben, falls nichts anderes explizit erwähnt wird. Demzufolge liefern die gesamten Berechnungen von Windstärken diese zunächst in Metern pro Sekunde $[\frac{m}{s}]$. Da wir uns im Kontext der Schifffahrt befinden, werden die Geschwindigkeiten allerdings nicht in der SI-Einheit, sondern in Knoten [kn] angegeben. Dazu erfolgt die Umrechnung wie in (3.24) ausgeführt in die Einheit Knoten [kn]. In den finalen Polarplots liegen aus diesem Grund alle Ergebnisse in der Einheit Knoten vor.

6.1 Stationäre Manöver

In diesem Abschnitt soll die Form der stationären Zulässigkeitsmengen bei unterschiedlichen Modellierungen genauer untersucht werden. In diesem Zusammenhang wird zunächst untersucht, in welcher Beziehung die stationären Zulässigkeitsmengen bezüglich unterschiedlicher Orientierungen $\psi \in \Pi$ zueinander liegen, wobei ein möglichst „realitätsnahes“ Schiff, genauer gesagt einen Autotransporter, zur Untersuchung wählen. Ein solches Schiff ist in Abbildung 6.1 dargestellt. Im Anschluss daran wird ein weiteres Schiff,



Abbildung 6.1: Der Autotransporter *Grand Pace* erreicht den Hafen Rotterdam [24].

Autotransporter			Containerschiff		
halbe Schiffslänge	l	90m	halbe Schiffslänge	l	150m
Windkraftzentrum	x_A	10 m	Windkraftzentrum	x_A	20 m
Formparameter	k_X	1.0	Formparameter	k_X	1.0
	k_Y	1.05		k_Y	1.05
Seitenfläche	A_F	1 200 m ²	Seitenfläche	A_F	600 m ²
	A_L	7 200 m ²		A_L	6 000 m ²
Schlepperkräfte	$\bar{\mu}_1$	400 000 N	Schlepperkräfte	$\bar{\mu}_1$	400 000 N
	$\bar{\mu}_2$	300 000 N		$\bar{\mu}_2$	300 000 N

(a) Autotransporter

(b) Containerschiff

Tabelle 6.1: Zusammenfassung der genutzten Schiffsparameter.

ein Containerschiff, betrachtet. Abschließend wird die Veränderung der stationären Zulässigkeitsmenge, falls eine komplexere Modellierung des aerodynamischen Hebelarms verwendet wird.

Zunächst wird ein Autotransporter betrachtet, wie schon im eindimensionalen Fall. Dazu werden neben den dort bereits genutzten Parametern zusätzlich noch die Parameter der lateralen Schiffsform k_Y , $A_L \in \mathbb{R}_+$, die halbe Schiffslänge $l \in \mathbb{R}_+$ und der aerodynamische Hebelarm $x_A \in (-l, l)$ benötigt. Weiterhin kommen in diesem Szenario nicht nur eins, sondern zwei Schlepperboote zum Einsatz. Um die Generalität zu gewährleisten, werden für die beiden Schlepperbeschränkungen unterschiedliche Werte gewählt. Die exakten Daten können Tabelle 6.1a entnommen werden, wobei sich erneut an [6] orientiert wird.

Es soll nun die stationäre Zulässigkeitsmenge berechnet werden, bei der das Schiff in der Lage ist, in der Orientierung $\psi = 0$ konstant gehalten zu werden. Das Schiff soll demnach in Richtung Norden blicken. Mithilfe der Berechnungsmethoden aus Satz 5.14 können wir für jedes $\theta \in \Pi$ die maximale Windstärke $s_\psi^*(\theta)$ und damit den Rand der stationären Zulässigkeitsmenge berechnen. Gemeinsam mit der berechneten Obergrenze und der minimalen Menge ist dies in Abbildung 6.2a dargestellt. Anhand der Abbildung gemeinsam mit der oberen Grenze lässt sich weiterhin erkennen, bei welchen Windrichtungen der erste Fall der Fallunterscheidung aus Satz 5.14 eintritt und bei welchen der

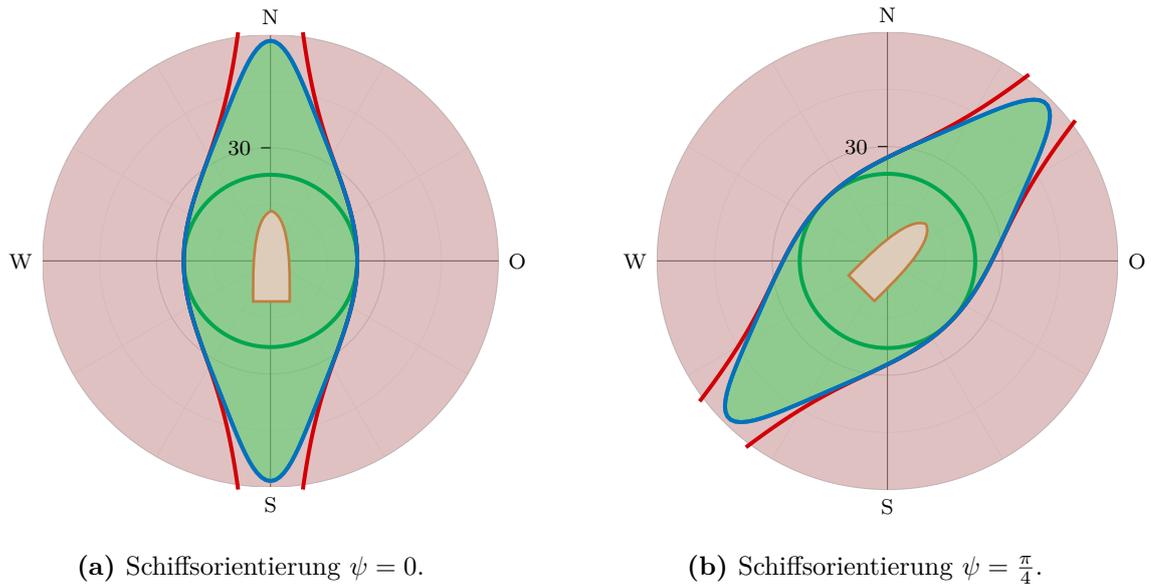


Abbildung 6.2: Stationäre Zulässigkeitsmenge bezüglich der angegebenen Orientierung ψ (blau), dazu die obere Grenze (rot) und untere Grenze (grün) der Zulässigkeitsmenge. Auf Grundlage dieser Zulässigkeitsmenge wird der Polarplot in einen sicheren (hellgrün) und einen unsicheren (hellrot) Bereich eingeteilt.

zweite. Bei den Windrichtungen, bei denen der Rand der Zulässigkeitsmenge mit der oberen Grenze übereinstimmt, tritt der erste Fall ein. Das bedeutet, dass dort die erste oder zweite Ungleichung zum ersten Mal als Gleichheit erfüllt wird. Bei den übrigen Richtungen gilt dies demnach für die dritte Ungleichung. Durch diesen Umstand lassen sich später Erkenntnisse in der Sensitivitätsanalyse mathematisch deuten.

Die Berechnung der stationären Zulässigkeitsmenge (und ebenso der oberen Grenze) hängt nicht von Orientierung ψ und Windrichtung θ einzeln ab, sondern von deren Differenz, dem relativen Angriffswinkel $\beta = \theta - \psi$. Wählen wir für dasselbe Schiff einen anderen Winkel, an welchem es konstant gehalten werden soll, so ergibt sich der gleiche Polarplot, nur um die gewünschte Orientierung ψ rotiert. Dies ist beispielhaft für $\psi = \frac{\pi}{4}$ in Abbildung 6.2b dargestellt. Es ist zu erkennen, dass sowohl die stationäre Zulässigkeitsmenge als auch die obere Grenze dieser Menge identisch bis auf Rotation um $\frac{\pi}{4}$ sind.

Als nächstes wird nun die stationäre Zulässigkeitsmenge eines weiteren Schiffstyps, genauer eines Containerschiffs, berechnet. Die gewählten Schiffsparameter können dabei Tabelle 6.1b entnommen werden, wobei sich dabei an [4] orientiert wurde. An den Parametern wird bereits deutlich, dass das Containerschiff länger ist als der Autotransporte und somit das Verhältnis von frontaler zu lateraler Seitenfläche deutlich geringer ist. Dieser Umstand spiegelt sich im zugehörigen Polarplot in Abbildung 6.3 wieder. Abgebildet ist die stationäre Zulässigkeitsmenge (blau) gemeinsam mit der oberen Grenze (rot). Es ist anhand der Skalierung zu erkennen, dass die Zulässigkeitsmenge hier Richtung Nord und Süd deutlich ausgedehnter ist. Damit entwickelt sich die Intuition, dass die Form der stationären Zulässigkeitsmenge in direktem Zusammenhang zur Form des Schiffes steht. Diese Vermutung wird in der später folgenden Sensitivitätsanalyse noch weiter

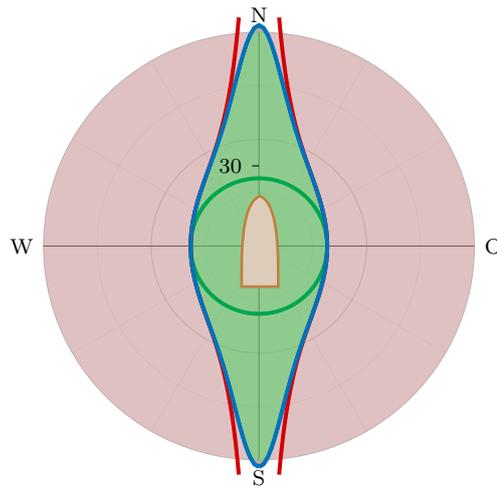


Abbildung 6.3: Stationäre Zulässigkeitsmenge des Containerschiffes bei Schiffsorientierung $\psi = 0$.

verdeutlicht.

Aerodynamischer Hebelarm abhängig vom Angriffswinkel

In Kapitel 3 haben wir in (3.23) die Windkraft mit dem aerodynamischen Hebelarm

$$x_A(\beta) = x_{A_0} + \left(\frac{\pi}{2} - |\beta|\right) \frac{\ell}{\pi}$$

modelliert, welches abhängig ist vom Angriffswinkel β des scheinbaren Windes. In Kapitel 5 haben wir alle theoretischen Überlegungen zunächst für einen festen Hebelarm x_A durchgeführt. Die Monotonieeigenschaften aus Lemma 5.9 lassen sich allerdings auch mit dem komplexer modellierten Hebelarm nachweisen, da dafür jeweils ein fester relativer Angriffswinkel β betrachtet wird. Mit dieser Monotonie ergibt sich direkt die notwendige Eigenschaft der Sternförmigkeit wie in Lemma 5.11, um die Berechnung der Zulässigkeitsmenge auf die Berechnung des Randes zurückführen zu können. Auch die finalen Berechnungen aus Satz 5.14 lassen sich ohne Einschränkung auf den Fall eines variablen Hebelarms übertragen, sodass mit einer identischen Berechnungsformel der Rand der stationären Zulässigkeitsmenge ψ explizit berechnet werden kann. Dabei wird bei der Berechnung der maximalen Windstärke $s_{\psi}^*(\theta)$ bei Windrichtung θ der konstante Hebelarm $x_A \in (-\ell, \ell)$ durch die obige Modellierung $x_A(\theta - \psi) \in (-\ell, \ell)$ ersetzt.

In Abbildung 6.4 ist die stationäre Zulässigkeitsmenge des Autotransporters mit einem variablen Hebelarm dargestellt, wobei $x_{A_0} = 10$ m genutzt wird, um die Ergebnisse mit den vorangegangenen (gestrichelt) vergleichen zu können. Die Unterschiede der Zulässigkeitsmengen beider Modellierungen sind dabei nur minimal. Durch die vereinfachte Modellierung des festen Hebelarms kann damit dennoch eine gute Approximation an die Zulässigkeitsmenge geliefert werden.

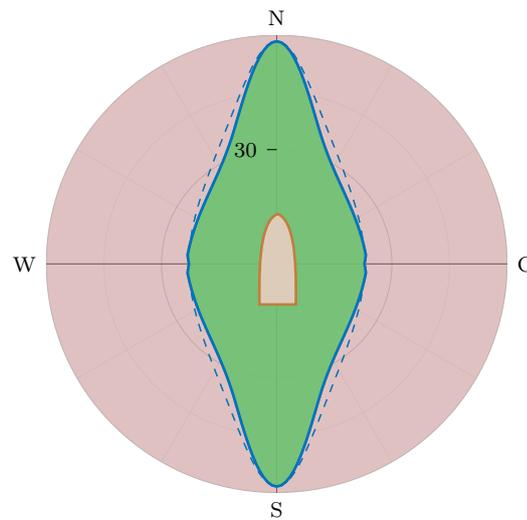


Abbildung 6.4: stationäre Zulässigkeitsmenge bezüglich der Orientierung $\psi = 0$ bei einem variablen Windkraftzentrum. Zum Vergleich wird zusätzlich der Rand der entsprechenden Menge bei festem Windkraftzentrum dargestellt (gestrichelt).

6.2 Kontrollierte Manöver in Bewegung

In diesem Abschnitt soll nun für den Autotransporter aus den vorherigen Auswertungen die kontrollierte Zulässigkeitsmenge \mathcal{K} berechnet werden, also die Menge aller wahren Winde, bei denen das Schiff ein geplantes Manöver kontrolliert durchführen kann. Dabei wird die Darstellung der kontrollierten Zulässigkeitsmenge als Schnitt über stationäre Zulässigkeitsmengen und deren analytisch hergeleitete Berechnungsformel genutzt.

Wir haben in den vorangegangenen Abschnitten gesehen, dass die kontrollierte Zulässigkeitsmenge nur von den Orientierungen abhängt, nicht von dem Pfad, den das Schiff entlangfährt. Es genügt demnach, die folgenden zwei unterschiedlichen Arten von Manövern zu betrachten: Zum einen die Geradeausfahrt. Dabei stimmen Start- und Endpose überein, die Positionen unterscheiden sich jedoch, damit es sich tatsächlich um ein bewegtes Manöver handelt. Die tatsächlichen Positionen sind nicht relevant. Während der Geradeausfahrt soll die Orientierung des Schiffes beibehalten werden. Zum anderen wird eine Drehung betrachtet. Aufgrund der Unabhängigkeit des Pfades kann ohne Einschränkung von einer Drehung auf der Stelle ausgegangen werden.

Bei der Geradeausfahrt soll das Schiff die aktuelle Orientierung halten, Startorientierung ψ_0 und Endorientierung ψ_1 stimmen überein. Anhand der Darstellung der kontrollierten Zulässigkeitsmenge als Schnitt der stationären Zulässigkeitsmengen lässt sich erkennen, dass die kontrollierte Zulässigkeitsmenge genau dem Inneren der stationären Zulässigkeitsmenge entspricht

$$\mathcal{K} = \mathring{\mathcal{K}}_{\psi_0},$$

weswegen die Ergebnisse zur Berechnung der stationären Zulässigkeitsmenge aus Satz 5.14 auch in diesem Fall angewandt werden können.

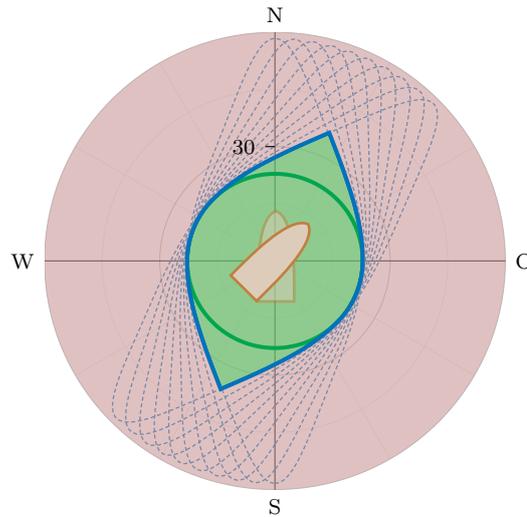


Abbildung 6.5: Kontrollierte Zulässigkeitsmenge (blau) bei einer Drehung von $\psi_0 = 0$ nach $\psi_1 = \frac{\pi}{4}$, dargestellt als Schnitt der entsprechenden stationären Zulässigkeitsmengen (gestrichelt). Zusätzlich abgebildet ist die untere Grenze (grün).

Bei einer Drehung verändert das Schiff die Orientierung während der Durchführung des Manövers. Es soll die kontrollierte Zulässigkeitsmenge für die Startorientierung $\psi_0 = 0$ und Endorientierung $\psi_1 = \frac{\pi}{4}$ explizit berechnet werden. Dazu werden erneut die Daten des Autotransporters aus Tabelle 6.1a genutzt.

Jede der angenommenen Orientierungen schränkt die kontrollierte Zulässigkeitsmenge weiter ein. Damit die kontrollierte Zulässigkeitsmenge allerdings so viele Windtupel wie möglich beinhaltet und nicht „unnötig“ eingeschränkt wird, ist die minimale Menge der angenommenen Orientierungen Ψ_{\min} zu betrachten. Es wird demnach die kontrollierte Zulässigkeitsmenge \mathcal{K} als Schnitt der stationären Zulässigkeitsmengen \mathcal{K}_ψ für alle $\psi \in [0, \frac{\pi}{4}]$ berechnet. Dies ist genauer in Abbildung 6.5 zu sehen, wobei der Schnitt (blau) der stationären Zulässigkeitsmengen (gestrichelt) dargestellt wird. Jedes Windtupel, welches in allen stationären Zulässigkeitsmengen liegt, wird auch der kontrollierten Zulässigkeitsmenge zugeordnet.

6.3 Vergleich des numerischen mit dem analytischen Ansatz

In der betrachteten Modellierung mit drei Freiheitsgraden in Kapitel 5 konnte keine Äquivalenz zwischen den hergeleiteten Bedingungen und der gesamten Zulässigkeitsmenge \mathcal{S} nachgewiesen werden, wie es im eindimensionalen Fall vorlag. Ein Optimalsteuerungsproblem, welches lediglich die Windstärke des wahren Windes unter Einhaltung der Dynamik und der Nebenbedingungen aus $(P(s, \theta))$ maximiert, führt aus diesem Grund nicht gezwungenermaßen zur gewünschten Berechnung des Randes der kontrollierten Zulässigkeitsmenge \mathcal{K} , denn es können unter Umständen auch „unkontrolliert“ durchgeführte Manöver berücksichtigt werden. Um die kontrollierte Menge zu berechnen, müssen

wir die Bedingungen in den optimalen Steuerprozess integrieren. Aufgrund dieser Tatsache lassen sich die theoretisch hergeleiteten Ergebnisse und die Lösung des optimalen Steuerprozesses nicht unabhängig voneinander vergleichen. Liefert ein Vergleich dieselben Ergebnisse für die kontrollierte Zulässigkeitsmenge, so lassen sich damit lediglich die Rechnungen verifizieren. Dennoch wird im Folgenden einen Vergleich der Ergebnisse dargestellt.

Die theoretischen Ergebnisse haben wir bereits in den Abschnitten 6.1 und 6.2 gesehen. Es soll nun der Rand der kontrollierten Zulässigkeitsmenge durch die Lösung vieler Optimalsteuerungsprobleme wie in Satz 5.23 approximiert werden. Dazu wird zunächst das Intervall Π mit $n \in \mathbb{N}$ Diskretisierungspunkten diskretisiert, sodass sich $\theta_k \in \{1, \dots, n\}$ diskrete Windrichtungen ergeben. Je größer die Anzahl n der Diskretisierungspunkte, desto genauer kann der Rand der kontrollierten Zulässigkeitsmenge approximiert werden.

Es wird nun für jede dieser n diskreten Windrichtungen das Optimalsteuerungsproblem aus Satz 5.23 mit der Software TransWORHP gelöst, sodass sich n maximale Windstärken $s^*(\theta_k)$ ergeben. Um ein besseres Konvergenzverhalten zu erhalten, wird als Startschätzung die gegebene Lösung aus Lemma 5.20 genutzt. Wird im Gegensatz dazu die triviale Nulllösung als Startschätzung genutzt, so konvergiert das Problem nicht. Bilden wir die numerisch berechneten Werte in unserem Polarplot ab, so erhalten wir eine diskrete Approximation des Randes der kontrollierten Zulässigkeitsmenge \mathcal{K} . Um die numerischen und analytischen Ergebnisse zur Berechnung der kontrollierten Zulässigkeitsmenge zu vergleichen, wird erneut der Autotransporter mit den Schiffparametern aus Tabelle 6.1a und das Drehmanöver mit der Startorientierung $\psi_0 = 0$ und Endorientierung $\psi_1 = \frac{\pi}{4}$ betrachtet. Damit erhalten wir die in Abbildung 6.6 dargestellten Ergebnisse. Neben der diskreten Approximation als Kreuze wird zusätzlich der analytisch berechnete Rand der Zulässigkeitsmenge (blaue Linie) abgebildet, sodass direkt am Polarplot ersichtlich wird, dass die analytisch und numerisch berechneten Randwerte übereinstimmen. Dies ist, wie eingangs bereits erwähnt, zu erwarten gewesen, da die analytisch hergeleiteten Formeln in das optimale Steuerproblem integriert wurden.

Dennoch dient die Formulierung und Lösung der optimalen Steuerprozesse nicht allein der „Verifizierung“ unserer analytischen Ergebnisse. Durch Lösung der Probleme mit der Software TransWORHP kann das Modul WORHP Zen genutzt werden, um ohne großen Mehraufwand eine Sensitivitätsanalyse durchzuführen. Damit lassen sich Sensitivitätsdifferenziale effizient durch Ausnutzung der Zerlegung der KKT-Matrix in der letzten Iteration berechnen [49].

6.4 Sensitivitätsanalyse

Wie bereits eingangs motiviert, ist die Sensitivitätsanalyse bezüglich der Formparameter des Schiffes ein Hilfsmittel, da für diese Parameter in den meisten Fällen nur Schätzwerte vorliegen. Ist die Form der Zulässigkeitsmenge stark sensitiv bezüglich dieser Parameter, so kann der Lotse diese Information nutzen. Befindet sich der aktuelle Wind in der Nähe des Randes der kontrollierten Zulässigkeitsmenge für das Manöver, welches er durchführen möchte, so ist dementsprechende Vorsicht geboten. Nur kleine Abweichungen der

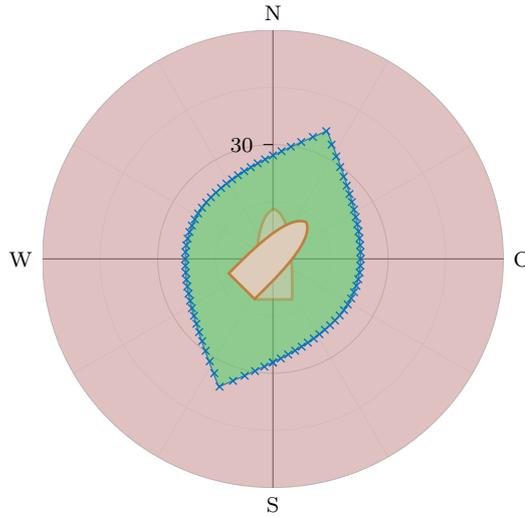


Abbildung 6.6: Darstellung der numerischen Ergebnisse.

Schätzwerte der Formparameter von den tatsächlichen Werten würden im Falle einer starken Sensitivität zu einer starken Änderung der Zulässigkeitsmenge führen. Ebenso kann die Analyse bezüglich der Schlepperkräfte nützlich sein, um abschätzen zu können, welche Erhöhung der Schlepperkräfte notwendig wäre, um das gewünschte Manöver bei dem aktuellen Wind doch noch durchführen zu können.

In diesem Abschnitt werden solche Sensitivitätsanalysen beispielhaft durchgeführt. Dabei werden für den Autotransporter aus Tabelle 6.1a die Sensitivitätsdifferentialiale bezüglich der Schiffsformparameter K_X, K_Y und der Schlepperbeschränkungen $\bar{\mu}_{1,2}$ genauer angeschaut. Die Sensitivitätsanalyse wird anhand der stationären Zulässigkeitsmenge durchgeführt, da für diese Menge eine explizite Berechnungsformel vorliegt, anhand derer einige Effekte mathematisch veranschaulicht werden können. Während der Berechnung der stationären Zulässigkeitsmenge durch die Software TransWORHP können die Sensitivitätsableitungen $\left(\frac{\partial s}{\partial K_X}\right)_k$, $\left(\frac{\partial s}{\partial K_Y}\right)_k$, $\left(\frac{\partial s}{\partial \bar{\mu}_1}\right)_k$ und $\left(\frac{\partial s}{\partial \bar{\mu}_2}\right)_k$ für jede der diskreten Windrichtungen θ_k für $k \in \{1, \dots, n\}$ berechnet werden. Gemeinsam mit der Berechnungsformel aus (2.6) kann dann mithilfe der initial gewählten Parameterwerte für $K_X, K_Y, \bar{\mu}_{1,2}$ durch

$$\begin{aligned} s_{\psi}^{K_X}(\theta_k) &\approx s_{\psi}^*(\theta_k) + \left(\frac{\partial s}{\partial K_X}\right)_k \cdot 0.5K_X \\ s_{\psi}^{K_Y}(\theta_k) &\approx s_{\psi}^*(\theta_k) + \left(\frac{\partial s}{\partial K_Y}\right)_k \cdot 0.5K_Y \\ s_{\psi}^{\mu}(\theta_k) &\approx s_{\psi}^*(\theta_k) + \left(\frac{\partial s}{\partial \bar{\mu}_1}\right)_k \cdot 0.5\bar{\mu}_1 + \left(\frac{\partial s}{\partial \bar{\mu}_2}\right)_k \cdot 0.5\bar{\mu}_2 \end{aligned}$$

für jede dieser Windrichtungen θ_k eine lineare Approximation an die maximale Windstärke berechnet werden, wenn die Parameter um 50% vergrößert werden. In Abbildung 6.7 ist der Einfluss einer solchen Veränderung der Parameter für den Autotransporter durch Pfeile dargestellt. Streng genommen sind diese Approximationen nur für „kleine“ Parameterstörungen anzuwenden, allerdings wurde eine große Veränderung gewählt, um die entstehenden Effekte deutlicher zu machen. In den Abbildungen sind die Veränderungen der jeweiligen diskreten Randwerte durch Pfeile markiert, wobei jeder Pfeil bei

$s_\psi(\theta)$ startet und je nachdem, welche Sensitivität betrachtet wird, bei $s_\psi^{K_X}(\theta_k)$, $s_\psi^{K_Y}(\theta_k)$ oder $s_\psi^\mu(\theta_k)$ endet. Durch die Pfeilspitzen wird die Approximation an den Rand der stationären Zulässigkeitsmenge bezüglich der genannten 50%-igen Veränderung der Parameter dargestellt. Zusätzlich wird ebenfalls die exakte Zulässigkeitsmenge für die jeweils veränderten Parameter dargestellt, sodass die Approximation durch die Sensitivitätsdifferenziale mit diesen verglichen werden kann.

In der oberen linken Abbildung ist zu erkennen, dass eine Veränderung des Parameters K_X (also entweder des Formparameters k_x oder der frontalen Seitenfläche A_F) ausschließlich dort einen Einfluss auf die Zulässigkeitsmenge ausübt, wo diese Menge von der berechneten oberen Grenze abweicht. Anhand der theoretischen Untersuchungen lässt sich dies leicht begründen. Die berechnete obere Grenze der stationären Zulässigkeitsmenge, dargestellt in rot, ist das Minimum der Nullstellen der ersten beiden Funktionen $F_{1,2}(\cdot, \theta - \psi)$ für $\theta, \psi \in \Pi$. In diesen beiden Funktionen taucht der Parameter K_X nicht auf. Stimmen obere Grenze und stationäre Zulässigkeitsmenge überein, so bildet dieses Minimum die maximale Windstärke und ist nicht abhängig vom Parameter K_X , dessen Veränderung also auch keinen Einfluss auf die Form der Menge ausüben kann. Erst wenn die Nullstelle der dritten Funktion $F_3(\cdot, \theta - \psi)$ die kleinste der drei Nullstellen und damit die maximal zulässige Windstärke ist, kann der Parameter K_X Einfluss ausüben. Dieser Einfluss wird immer größer, je „paralleler“ der wahre Wind und die Orientierung des Schiffes verlaufen. Dies ist ebenfalls an der theoretischen Formel zu begründen. Dort taucht der Parameter K_X nur im Absolutbetrag beziehungsweise quadriert und gemeinsam mit dem Faktor $\cos(\theta - \psi)$ auf.

In Abbildung 6.7b ist der Einfluss der Veränderung des Parameters K_Y dargestellt. Eine Veränderung dieses Parameters übt überall einen Einfluss auf die Form der stationären Zulässigkeitsmenge aus, außer wenn Wind und Orientierung parallel zueinander verlaufen, der Wind also genau von vorn oder achtern kommt. Ebenso wird der Einfluss größer, je „senkrechter“ Orientierung und Windrichtung zueinander verlaufen. Diese zwei Beobachtungen lassen sich analog zu den obigen Begründungen anhand der theoretischen Formel herleiten. Dort taucht der Parameter K_Y ausschließlich gemeinsam mit dem Faktor $\sin(\theta - \psi)$ und ebenfalls quadriert auf. Falls sie parallel zueinander liegen, so ist dieses Gewicht Null. Damit kann eine Veränderung des Parameters K_Y keinen Einfluss auf die Menge ausüben.

Eine Vergrößerung der Parameter K_X und K_Y liefert eine Verkleinerung der stationären Zulässigkeitsmenge. Intuitiv ist dies direkt zu erkennen. Je größer die Seitenflächen, desto mehr Angriffsfläche bieten sie für den Wind und desto größer fällt die Windkraft aus. Im Gegensatz dazu ist in Abbildung 6.7c der Einfluss einer Veränderung der Schlepperbeschränkungen $\bar{\mu}_{1,2}$ zu erkennen. Eine Vergrößerung dieser Parameter bewirkt ebenso eine Vergrößerung der stationären Zulässigkeitsmenge. Auch dies ist intuitiv direkt zu begründen, denn je mehr Kraft die Schlepperboote besitzen, desto stärkeren Winden können sie entgegenhalten. Die eigentliche Form der Zulässigkeitsmenge ändert sich dabei (augenscheinlich) nicht, sie wird lediglich größer.

In den Abbildungen 6.7a-6.7c können die approximierten Werte berechnet durch die Sensitivitäten mit der exakten Zulässigkeitsmenge bezüglich der jeweils gestörten Parameter verglichen werden. Die Pfeilspitzen der Sensitivitäten und die exakte Zulässigkeitsmenge (gestrichelt) weichen voneinander ab. Ein Grund dafür kann die große Störung sein,

welche dazu führt, dass die lineare Approximation keine genauen Ergebnisse liefert. Es ist zu erwarten, dass bei einer kleineren Störung der Parameter auch die Abweichungen kleiner werden. Dennoch ist zu erkennen, dass die Sensitivität bezüglich der Formparameter und der Schlepperbeschränkungen recht gering ausfällt, wenn man bedenkt, dass die Parameter in den Abbildungen um 50 % erhöht werden. Eine solche Erhöhung würde bedeuten, dass die frontale Seitenfläche um 600 m^2 erhöht wird, die laterale Seitenfläche sogar um 3600 m^2 . Die Schlepperbeschränkungen werden um 200 kN beziehungsweise 150 kN erhöht.

Abschließend wird die Veränderung der Zulässigkeitsmenge untersucht, wenn eine gleichmäßige Veränderung der Formparameter sowie der Schlepperbeschränkungen vorliegt. In Abbildung 6.7d ist ebenso wie in den vorangegangenen Abbildungen die ungestörte stationäre Zulässigkeitsmenge dargestellt, gemeinsam mit der approximierten Veränderung bei Erhöhung um 50 % *aller* genannten Parameter, also K_X , K_Y , $\bar{\mu}_1$ und $\bar{\mu}_2$, und der exakten stationären Zulässigkeitsmenge bezüglich dieser veränderten Parameter. Allerdings ist ausschließlich die ungestörte stationäre Zulässigkeitsmenge zu erkennen, da sich die Einflüsse der Formparameter und Schlepperbeschränkungen so ergänzen, dass die Zulässigkeitsmenge unverändert bleibt. Dies lässt sich ebenfalls anhand der Ungleichungen verifizieren. Werden die genannten Parameter mit einem konstanten positiven Faktor multipliziert, lässt sich dieser aus allen drei Ungleichungen ausklammern. Anschließendes Dividieren durch diesen Faktor ergibt äquivalent die ursprünglichen Ungleichungen. Aus dieser Beobachtung lässt sich nun ableiten, dass bei einem Schiff mit beispielsweise doppelter Größe auch Schlepperboote mit doppelter Kraft benötigt werden, um dieselbe stationäre Zulässigkeitsmenge zu erhalten.

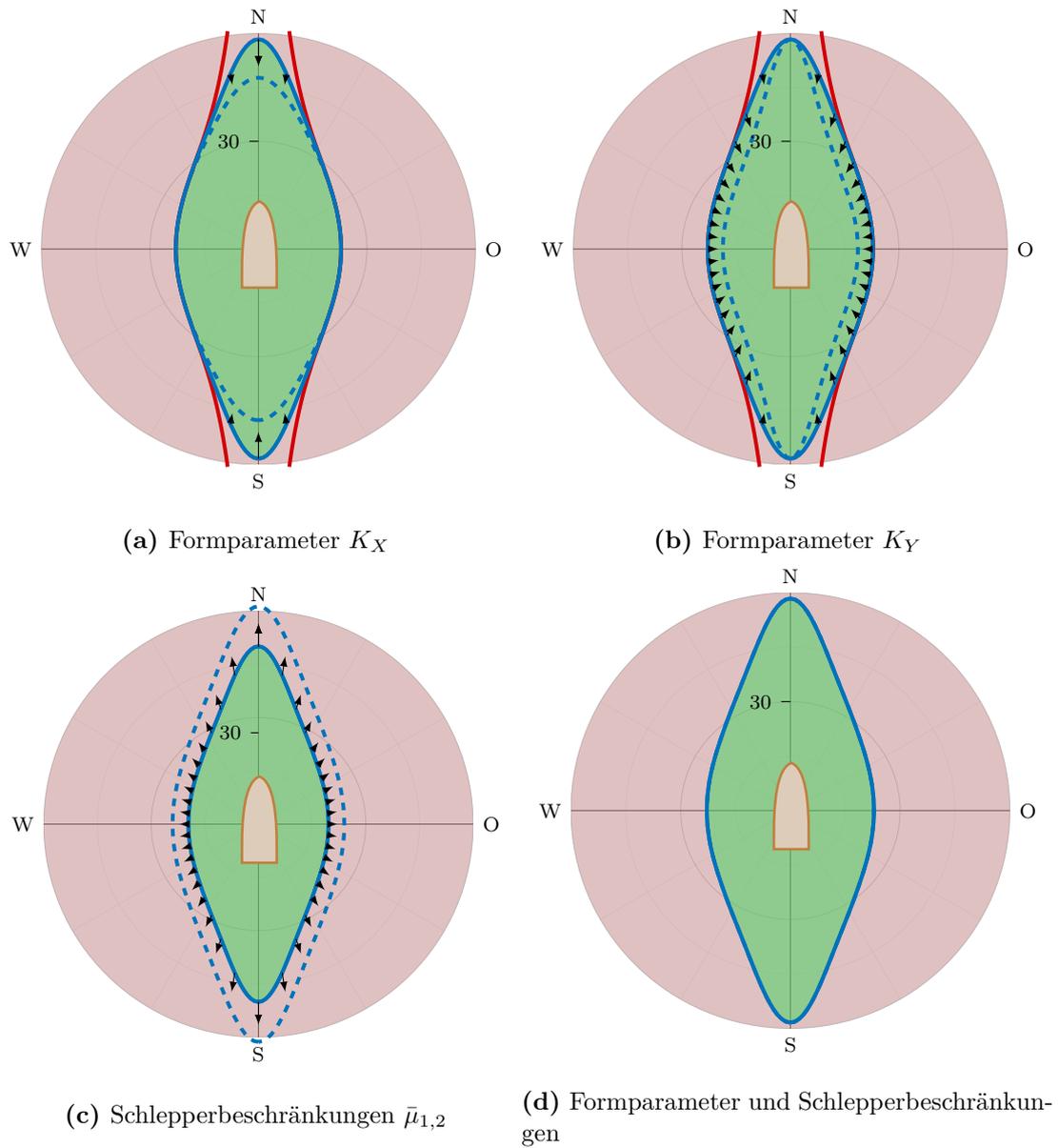


Abbildung 6.7: Abbildung der Veränderung der stationären Zulässigkeitsmenge bezüglich $\psi = 0$ mit den Schiffparametern des Autotransporters bei Erhöhung des angegebenen Parameters um 50%. Zusätzlich wird die exakte stationäre Zulässigkeitsmenge bezüglich der jeweils veränderten Parameter (gestrichelt) dargestellt.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel dieser Arbeit war es, eine Risikoanalyse bezüglich des Einflusses des Windes herzuleiten, um dem Lotsen unterstützende Informationen zu liefern. Das Schiff wird in diesem Szenario von zwei Schlepperbooten gesteuert, die nur beschränkte Kräfte besitzen. Es stellte sich demnach die Frage, ob diese Schlepperboote genug Kraft besäßen, um das geplante Manöver bei dem aktuellen Wind durchführen zu können. Als Darstellungsmittel diente dazu ein Polarplot, in welchem wir sichere und potentiell gefährliche Windbereiche markiert haben. Die Lage der aktuellen Windsituation innerhalb dieses Polarplots lieferte dem Lotsen dann die Informationen über die Durchführbarkeit. Wir sind in der Lage, diese Bereiche auf zwei verschiedene Weisen zu berechnen: Mithilfe einer analytischen Berechnungsformel und durch Lösung optimaler Steuerprozesse mit der Softwarebibliothek TransWORHP.

In Kapitel 2 wurden zunächst die theoretischen Grundlagen optimaler Steuerprozesse erläutert. Eingangs lag der Fokus auf der Theorie der nichtlinearen Optimierung, wobei insbesondere der Lösungsansatz der Sequentiellen Quadratischen Programmierung und die Sensitivitätsanalyse motiviert wurden. Im Zuge dessen wurde die Softwarebibliothek WORHP zur numerischen Lösung solcher Probleme vorgestellt. Im Anschluss daran folgte die Theorie optimaler Steuerprozesse, deren Lösung durch einen Diskretisierungsansatz auf die Lösung nichtlinearer Optimierungsprobleme zurückgeführt werden kann. Abschließend wurde die Bibliothek TransWORHP zur effizienten Lösung von Optimalsteuerungsproblemen hervorgehoben.

Das mathematische Modell, auf dessen Grundlage die Risikoanalyse durchgeführt werden sollte, wurde in Kapitel 3 eingeführt. Die grundlegende Annahme hinter der Modellierung war die Einschränkung auf drei Freiheitsgrade, sodass sich das Schiff ausschließlich in der Horizontalebene bewegt. Weiterhin wurde angenommen, dass das Schiff nur von Schlepperbooten gesteuert wurde, sodass die Wirkungen von Ruder und Propeller vernachlässigt werden konnten. Nach einer Einführung in die Kinematik der Schiffsbewegung und die Einführung der vorkommenden Größen und Koordinatensysteme, folgte die Betrachtung der Kinetik. Die kinetischen Grundgleichungen wurden hergeleitet und die einzelnen Kraftkomponenten modelliert. Dabei wurden die einzelnen Bestandteile des Schiffes und ihre resultierenden Effekte einzeln betrachtet und hergeleitet. Es folgte eine Betrachtung der wirkenden hydrodynamischen und aerodynamischen Kräften. Der Antrieb des Schiffes erfolgte durch zwei Schlepperboote, dessen Kraftwirkung kompakt

durch Kraftvektoren modelliert wurde. Abschließend wurden die kinematischen und kinetischen Grundgleichungen ebenso wie die modellierten Kräfte in einem Gesamtsystem zusammengefasst.

Eine erste, sehr stark vereinfachte Risikoanalyse ist in Kapitel 4 durchgeführt worden. Das modellierte System wurde auf einen verbleibenden Freiheitsgrad eingeschränkt, so dass sich das Schiff ausschließlich entlang einer geraden Linie bewegen konnte. Weiterhin konnte auch der Wind nur entlang dieser Bewegungslinie angreifen. Wir zeigten, dass die Menge aller Windstärken, bei denen das Manöver durchführbar war, die *Zulässigkeitsmenge*, ein Intervall mit explizit berechenbarem Rand war. Dieses Intervall konnte in der vereinfachten Risikoanalyse als sicherer Bereich deklariert werden, alles außerhalb als potentiell gefährlich.

Die tatsächliche Risikoanalyse wurde anschließend in Kapitel 5 durchgeführt, wobei einige Motivationen und Beweisideen auf der vereinfachten Analyse aufbauten. In diesem nun komplexeren Fall haben wir uns auf *kontrollierte* Manöver beschränkt, wobei die Schlepperboote zu jedem Zeitpunkt in der Lage sein mussten, das Schiff stillzuhalten, ohne dass es abdriftet. Ziel war die Berechnung der *kontrollierten Zulässigkeitsmenge*, also aller Winde, bei denen die Schlepperboote stark genug waren, dass das geplante Manöver kontrolliert durchführbar war. In der Analyse wurde der Fokus zunächst auf stationäre Manöver gelegt, bei denen das Schiff nur stillgehalten werden sollte. Für die dazugehörige Zulässigkeitsmenge wurde eine explizite Berechnungsformel hergeleitet. Im Anschluss daran wurden bewegte kontrollierte Manöver betrachtet, wobei die Zulässigkeitsmenge entweder unter Ausnutzung der expliziten Formel oder durch Lösung eines optimalen Steuerprozesses gelöst werden konnte.

Abschließend fand in Kapitel 6 eine sowohl theoretische als auch numerische Auswertung der Ergebnisse statt. Zunächst wurden Auswirkungen unterschiedlicher Modellierungen auf die Form der stationären Zulässigkeitsmengen betrachtet. Anschließend folgte ein Vergleich der theoretischen und numerischen Berechnungsmethoden für die kontrollierte Zulässigkeitsmenge anhand eines Beispielschiffes. Zum Abschluss wurde eine Sensitivitätsanalyse durchgeführt, wobei der Einfluss der Veränderung von Schiffsparametern oder Schlepperbeschränkungen auf die Zulässigkeitsmenge untersucht wurde.

Im folgenden Absatz wollen wir die gesammelten Erkenntnisse, die in der Anwendung einen Beitrag zur Risikoanalyse leisten, kompakt zusammenfassen und anhand eines fiktiven Szenarios darstellen.

Anwendung der Risikoanalyse Der Lotse bestimmt/schätzt die diskutierten Schiffsparameter, die zur Berechnung der sicheren Bereiche notwendig sind. Außerdem wird die aktuelle Windstärke und Windrichtung bestimmt. Allein anhand der Parameter lässt sich bereits eine minimale Menge gemäß Proposition 5.12 berechnen und als Kreis im Polarplot darstellen. Befindet sich die aktuelle Windsituation innerhalb des Kreises, so ist *jedes* geplante Manöver kontrolliert durchführbar. Wird nun als weitere Information die Startorientierung des Schiffes mit einbezogen, so lässt sich die stationäre Zulässigkeitsmenge bezüglich dieser Orientierung gemäß Satz 5.14 berechnen und im Polarplot darstellen. Befindet sich die aktuelle Windsituation außerhalb der Menge, so kann ausgehend von der Startorientierung kein Manöver kontrolliert durchgeführt werden, weder stationär noch bewegt. Wird abschließend auch die geplante Endorientierung miteinbezogen, so

lässt sich die kontrollierte Zulässigkeitsmenge entweder analytisch durch Satz 5.22 oder numerisch durch Satz 5.23 bestimmen. Liegt die aktuelle Windsituation innerhalb der Menge, ist das Manöver kontrolliert durchführbar, ansonsten nicht. Befindet sich der aktuelle Wind in der Nähe des Randes der Menge, so können ebenfalls Ergebnisse der Sensitivitätsanalyse genutzt werden. Die Sensitivität bezüglich der Formparameter des Schiffes liefert Informationen über die Genauigkeit der berechneten Menge. Die Sensitivität bezüglich der Schlepperbeschränkungen liefert im Gegensatz dazu Informationen darüber, bei welcher Erhöhung der Schlepperkräfte das Manöver eventuell doch durchführbar wäre.

7.1 Ausblick

Die Risikoanalyse, wie wir sie in der vorliegenden Arbeit gesehen haben, kann durch zahlreiche weitere Aspekte und Modellierungen ergänzt werden. Um nur einige zu nennen, könnte die Bewegung des Schiffes nicht auf drei Freiheitsgrade eingeschränkt, sondern die gesamten sechs Freiheitsgrade betrachtet werden. Auch die Modellierung der Schlepperkräfte - in dieser Arbeit als simple Kraftvektoren - könnte sehr viel komplexer mit eigener Dynamik und eigenen Widerständen durchgeführt werden, wie beispielsweise in [22]. Dasselbe gilt für die Modellierung des Windes, welcher in dieser Arbeit als konstant angenommen wird. Die Berücksichtigung von Wirbelfeldern oder markanten Unregelmäßigkeiten des Windes, welche in Häfen nicht selten auftreten, wäre ein weiterer Schritt, der die Komplexität des Modells jedoch enorm steigern würde.

Ungeachtet der Modellierung lässt sich ein weiteres Gebiet nennen, in welchem noch Kapazitäten für weitere Untersuchungen liegen: Die Berechnung der gesamten Zulässigkeitsmenge \mathcal{S} . In dieser Arbeit haben wir uns auf die kontrollierten Manöver beschränkt, um Abdriftmanöver und Ähnliches aus den Überlegungen auszuschließen. In der realen Anwendung kann es aber durchaus auch zulässig sein, für einige Meter solche dynamischen Effekte wie das Abdriften auszunutzen. Dabei wäre es interessant, den Unterschied zwischen der kontrollierten und der gesamten Zulässigkeitsmenge zu untersuchen. Im Zuge dessen wäre aus mathematischer Sicht interessant, ob die gesamte Menge ebenfalls sternförmig ist und wenn ja, wie man dieses beweisen könnte. Wäre ein solcher Beweis möglich, so könnte die gesamte Menge \mathcal{S} durch die Lösung eines optimalen Steuerprozesses bestimmt werden, analog zur Berechnung der kontrollierten Menge \mathcal{K} . Zur Lösung des Systems müsste die Dynamik aus Kapitel 3 betrachtet werden und die in Kapitel 5 hergeleiteten Nebenbedingungen spielen keine Rolle mehr. Sowohl der Beweis der Sternförmigkeit als auch die Implementierung der realen Dynamik hätten den Rahmen dieser Arbeit überschritten.

Im Kontext der numerischen Berechnung dieser Zulässigkeitsmenge können noch Erweiterungen wie die Integration von geometrischen Beschränkungen zur Modellierung von Hafengebieten hinzugezogen werden. Ebenso kann die in dieser Arbeit bereits angesprochene Idee der Sensitivitätsanalyse weiter ausgebaut werden, um beispielsweise Unsicherheitsbereiche um den Rand der berechneten Zulässigkeitsmenge hinzuzufügen. Liegt der aktuelle Wind innerhalb dieser Unsicherheitsbereiche, so kann ihm mitgeteilt werden, dass das Manöver zwar möglich, aber dennoch Vorsicht geboten ist. Seine per-

sönliche Einschätzung der Situation als Ortskundiger ist damit in einem solchen Szenario besonders nötig.

Abschließend sei noch erwähnt, dass in dieser Arbeit nur einer der zwei bekannten Umwelteinflüsse auf ein Schiff untersucht wurde. Auf ähnliche Weise könnte auch der Einfluss der Strömung untersucht werden, was allerdings ebenfalls nicht mehr im Rahmen dieser Arbeit lag.

Literaturverzeichnis

- [1] *GALILEOnautic 2 - Hochschule Wismar - Fakultät für Ingenieurwissenschaften, Bereich Seefahrt.* <https://fiw.hs-wismar.de/bereiche/sal/forschung/issims/laufende-projekte/galileonautic-2/>.
- [2] *GALILEOnautic 2 - RWTH Aachen.* <https://www.irt.rwth-aachen.de/go/id/suhc?>
- [3] *Hafen Bremerhaven.* <https://www.bremerhaven.de/de/tourismus/schiffe-haefen/schiffe-haefen.22075.html>.
- [4] *Hanover Express.* <https://www.vesselfinder.com/de/vessels/HANOVER-EXPRESS-IMO-9343716-MMSI-218092000>.
- [5] *Lotsen.* <https://www.hafen-hamburg.de/de/lotsen>.
- [6] *Procyon Leader.* <https://www.vesselfinder.com/de/vessels/PROCYON-LEADER-IMO-9207754-MMSI-431557000>, aufgerufen am 29.04.20.
- [7] *Schlepper.* [urlhttps://www.hafen-hamburg.de/de/schiffe/schlepper?view=grid](https://www.hafen-hamburg.de/de/schiffe/schlepper?view=grid).
- [8] *TransWORHP Benutzerhandbuch.* Steinbeis-Forschungszentrum für Optimierung, Steuerung und Regelung, Version 2. Februar 2017.
- [9] *Users' Guide to WORHP 1.13.* Steinbeis-Forschungszentrum Optimierung, Steuerung und Regelung, Website: www.worhp.de, Stand März 2019.
- [10] *Zentrum für Technomathematik: TransWORHP.* <http://www.math.uni-bremen.de/zetem/cms/detail.php?id=11993>, aufgerufen am 01.04.2020.
- [11] M. A. Abkowitz. *Lectures on Ship Hydrodynamics: Steering and Manoeuvrability.* Hydro- and Aerodynamics Laboratory, 1964.
- [12] W. Alt. *Nichtlineare Optimierung: Eine Einführung in Theorie, Verfahren und Anwendung.* Aufbaustudium Mathematik, Vieweg Studium, 2002.
- [13] S. Bauer, C. Hubacsek, and C. Thiel. *Satz von Picard-Lindelöf.* Vorlesungsskript Universität Essen, Fakultät für Mathematik, https://www.uni-due.de/imperia/md/content/mathematik/ag_neff/modellieren/picard.pdf, 2012.
- [14] W. Blendermann. *Wind loading of ships-collected data from wind tunnel tests in uniform flow.* Institut für Schiffbau der Universität Hamburg, Report no. 574, 1996.

- [15] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- [16] C. Büskens. *Optimierungsmethoden und Sensitivitätsanalyse für optimale Steuerprozesse mit Steuer- und Zustandsbeschränkungen*. Dissertation, Universität Münster, Institut für Numerische Mathematik, 1998.
- [17] C. Büskens. *Real-Time Solutions for Perturbed Optimal Control Problems by a Mixed Open- and Closed-Loop Strategy*. Grötschel et al [38], Kapitel 7, S. 105-116, 2001.
- [18] C. Büskens. *Real-Time Optimization and Real-Time Optimal Control of Parameter-Perturbed Problems*. Habilitationsschrift, Universität Bayreuth, 2002.
- [19] C. Büskens. *Autonomes Fahren: Grundlagen der nichtlinearen Optimierung und optimalen Steuerung*. Vorlesung an der Universität Bremen, 2017.
- [20] C. Büskens and H. Maurer. *Real-Time Control of an Industrial Robot Using Nonlinear Programming Methods*. Proceedings of the 4th IFAC Workshop on Algorithms and Architectures für Real-Time Control, Vilamoura, Portugal, 1997.
- [21] C. Büskens and H. Maurer. *Sensitivity Analysis and Real-Time Optimization of Parametric Nonlinear Programming Problems*. Grötschel et al [38], Kapitel 1, S. 3-16, 2001.
- [22] V. P. Bui, H. Kawai, Y. B. Kim, and K. S. Lee. *A ship berthing system design with four tug boats*. Journal of Mechanical Science and Technology 25 (5), 1257 1264, 2011.
- [23] H. Chun-HaoHuang, Tian-YiXu, and Bang-Xin. *The Celestial Reference System in Relativistic Framework*. International Astronomical Union / Union Astronomique Internationale, vol 141. Springer, Dordrecht, 1990.
- [24] D. Cornelissen. <http://www.portpictures.nl>.
- [25] K. K. Dedyayevsky and G. V. Sobolev. *Control and Stability in Ship Design*. Washington, DC: U.S. Department of Commerce Translation, 1964.
- [26] W. Domschke, A. Drexl, R. Klein, and A. Scholl. *Lineare Optimierung*. Einführung in Operations Research. Springer Gabler, Berlin, Heidelberg, 2015.
- [27] M. Echim. *Modellbasierte optimale Mehrgrößenregelung eines aufgeladenen Dieselmotors mittels Methoden der nichtlinearen Optimierung*. Dissertation, Universität Bremen, Fakultät für Mathematik und Informatik, 2014.
- [28] A. Ettetmeyer, O. Wallrapp, and B. Schäfer. *Technische Mechanik Teil 3: Kinematik und Kinetik*. Fachhochschule München, Fachbereich 6, 2005.
- [29] A. V. Fiacco. *Introduction to Sensitivity and Stability Analysis in Nonlinear Programming*. Mathematics in Science and Engineering, Volume 165, Academic Press, New York, 1983.
- [30] R. Fletcher. *Practical Methods of Optimization*. Wiley, Braunschweig, 1987.

-
- [31] T. I. Fossen. *Handbook of Marine Craft Hydrodynamics and Motion Control*. John Wiley and Sons, 2011.
- [32] T. I. Fossen and T. Perez. *Ship Motion Control: Course Keeping and Roll Stabilisation Using Rudder and Fins*. 978-1-85233-959-3, 2005.
- [33] R. W. Freund and R. H. W. Hoppe. *Stoer/Bulirsch: Numerische Mathematik 1*. Springer Verlag, 2007.
- [34] S. Geffken. *Effizienzsteigerung numerischer Verfahren der nichtlinearen Optimierung*. Dissertation, Universität Bremen, 2017.
- [35] S. Geffken and C. Büskens. *Workshop Multi-Core Interface, Parallelisation Approaches for an NLP Solver*. Proceedings of the 6th International Conference on Astrodynamics Tools and Techniques, 14.03. - 17.03.2016, Darmstadt, Germany, 2016.
- [36] M. Gerdts. *Optimale Steuerung*. Vorlesungsskript, Universität Würzburg, 2010.
- [37] P. E. Gill, W. Murray, and M. H. Wright. *Practical Optimization*. Emerald, 1982.
- [38] M. Grötschel, S. Krumke, and J. Rambau. *Online Optimization of Large Scale Systems: State of the Art*. Springer, Berlin, 2001.
- [39] H. Hensen. *Ship Bridge Simulators: A Project Handbook*. London: THE Nautical Institute, 1999.
- [40] J. Holtrop. *A Statistical Re-Analysis of Resistance and Propulsion Data*. International Shipbuilding Progress 31, 1984.
- [41] J. Holtrop and G. G. J. Mennen. *Statistical Power Prediction Method*. International Shipbuilding Progress 25, 1978.
- [42] J. Holtrop and G. G. J. Mennen. *An Approximate Power Prediction Method*. International Shipbuilding Progress 29, 1982.
- [43] J. M. J. Journée and L. J. M. Adegeest. *Theoretical Manual of Strip Theory Program "SEAWAY for Windows"*. Delft University of Technology, AMARCON, 2003.
- [44] P. Kalmbach. *Effiziente Ableitungsbestimmung bei hochdimensionaler nichtlinearer Optimierung*. Dissertation, Universität Bremen, 2011.
- [45] M. Knauer. *Sensitivitätsanalyse verschiedener Gütekriterien bei der optimalen Bahnplanung von Industrierobotern*. Diplomarbeit, Universität Bayreuth, Lehrstuhl für Ingenieurmathematik, 2001.
- [46] M. Knauer. *Bilevel-Optimalsteuerung mittels hybrider Lösungsmethoden am Beispiel eines deckengeführten Regalbediengerätes in einem Hochregallager*. Dissertation, Universität Bremen, Fachbereich Mathematik & Informatik, 2006.
- [47] K. Königsberger. *Analysis 2*. Springer Verlag, 2004.
- [48] R. Kuhlmann and C. Büskens. *A primal-dual augmented Lagrangian penalty-interior-point filter line search algorithm*. Mathematical Methods of Operations Research, 2017.

-
- [49] R. Kuhlmann, S. Geffken, and C. Büskens. *WORHP Zen: Parametric Sensitivity Analysis for the Nonlinear Programming Solver WORHP*. Operations Research Proceedings 2017. , pp. 649-654. Springer International Publishing, 2017.
- [50] H. Kuhn. *Nonlinear Programming. A historical view*. R. W. Cottle, C. E. Lemke, Nonlinear Programming, SIAM-AMS Proc. 9, American Mathematical Society, S. 1–26, 1976.
- [51] H. Kuhn and A. Tucker. *Nonlinear Programming*. Jerzey Neyman, Proc. 2. Berkeley Symp. Math. Statistics and Probability, University of California Press, S. 481–492, 1951.
- [52] E. M. Lewandowski. *The Dynamics of Marine Craft: Maneuvering and Seakeeping*. Advanced Series on Ocean Engineering, World Scientific, 2004.
- [53] N. Matsumoto and K. Suemitsu. *Experimental Prediction Method of Manoeuvring Performance of Ships and Ocean Structures*. Nippon Kokan Technical Report No. 32, Tokyo/Japan, 1981.
- [54] H. Maurer. *Optimierung*. Vorlesungsskript, Universität Münster, 1993.
- [55] J. N. Newmann. *Marine Hydrodynamics*. MIT Press, 40. Auflage, 1977.
- [56] T. Nikolayzik, C. Büskens, and D. Wassel. *Nonlinear Optimization in Space Applications with WORHP*. Proceedings of the 62nd International Astronautical Congress, 62nd International Astronautical Conference, 03.10.-07.10.2011, Kapstadt, Südafrika, 2011.
- [57] J. Nocedal and S. J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer Verlag, 2006.
- [58] A. Ogawa and H. Kasai. *On the Mathematical Model of Manoeuvring Motion of Ships*. International Shipbuilding Progress, Vol. 25, pp. 306-319, 1978.
- [59] P. Oltmann and S. Sharma. *Simulation and Combined Engine and Rudder Maneuvers using an Improved Model of Hull-Propeller-Rudder Interactions*. Schriftenreihe Schiffsbau, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1984.
- [60] L. S. Pontryagin, V. Boltyanskij, R. Gamkrelidze, and E. Mishchenko. *Mathematische Theorie optimaler Prozesse*. Oldenbourg, München, 1964.
- [61] A. Pätzold. *Parameteridentifikation von Schiffsmoellen anhand von Schiffsmanövriermerkmalen*. Masterarbeit an der Universität Bremen, 2019.
- [62] U. Rossbach. *Reference Systems Used in Global Navigation Satellite Systems*. International Association of Geodesy Symposia, vol 120. Springer, Berlin, Heidelberg, 2000.
- [63] S. Roy. *Parameter Identification and Optimization in Robotics*. Vorlesung an der Universität Bremen, 2011.
- [64] H. R. Schwarz and R. Köckler. *Numerische Mathematik*. Springer Verlag, 2009.
- [65] D. T. Sen and T. C. Vinh. *Determination of Added Mass and Inertia Moment of Marine Ships Moving in 6 Degrees of Freedom*. International Journal of Transportation Engineering and Technology, 2016.

-
- [66] J. A. Slater and S. Malys. *WGS84 - Past, Present and Future*. International Association of Geodesy Symposia, vol 118. Springer, Berlin, Heidelberg, 1998.
- [67] J. Strøm-Tejse and M. S. Chislett. *A Model Testing Technique and Method of Analysis for the Prediction of Steering and Maneuvering Qualities of Surface Ships*. Proc. 6th ONR Symposium on Naval Hydrodynamics, Washington DC/USA, pp. 317-381, 1966.
- [68] D. L. Torre, H. Kunze, M. Ruiz-Galan, T. Malik, and S. Marsiglio. *Optimal Control: Theory and Application to Science, Engineering, and Social Sciences*. Hindawi Publishing Corporation, Abstract and Applied Analysis, 2015.
- [69] M. van der Laan. *Design for Tugboat*. United States Patent, 2004.
- [70] D. Wassel. *Exploring novel designs of NLP solvers: Architecture and Implementation of WORHP*. Dissertation, Universität Bremen, 2013.
- [71] D. Wassel, F. Wolff, J. Vogelsang, and C. Büskens. *The ESA NLP Solver*. Proceedings of the 5th International Conference on AstrodynamicsTools and Techniques, 29.05.-01.06.2012, Noordwijk, Niederlande, 2012.
- [72] A. Wnek, A. Paco, X.-Q. Zhou, S. Sutulo, and C. G. Soares. *Experimental study of aerodynamic loads on an LNG carrier and floating platform*. Applied Ocean Research, Volume 51, Pages 309-319, June 2015.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und ausschließlich die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Bremen, den 18. Juni 2020