



Zentrum für Technomathematik

Fachbereich 3 – Mathematik und Informatik

Viskoelastisches Zwei-Mechanismen-Modell für einen eindimensionalen Stab

Nils H. Kröger

Michael Böhm

Michael Wolff

Report 12-02

Berichte aus der Technomathematik

Report 12-02

Februar 2012

Viskoelastisches Zwei-Mechanismen-Modell für einen eindimensionalen Stab

Nils H. Kröger*, Michael Böhm, Michael Wolff

23. Februar 2012

Wir geben im Rahmen der Mehr-Mechanismen-Modelle eine Erweiterung der klassischen Beschreibung von Viskoelastizität über rheologische Modelle an. Als Ausgangspunkt dient die Reihenschaltung zweier Kelvin-Voigt-Körper. Um Wechselwirkungen der beiden Körper modellieren zu können, führen wir einen Kopplungsterm ins Modell ein. Mit dieser Erweiterung ist es möglich, Effekte wie Ratcheting zu beschreiben. Das Materialmodell wird für den allgemeinen dreidimensionalen Fall eingeführt. Eine ausführliche Herleitung und eine analytische Untersuchung erfolgt für das Modell eines eindimensionalen Stabes mit dem Verhalten *zweier Kelvin-Voigt-Körper in Reihe mit Wechselwirkung*. Ferner stellen wir die numerische Implementierung und Simulationen per COMSOL[®] und Maple[™] vor.

We introduce an extension of the classical description for viscoelasticity by rheological models within the framework of multi-mechanism models. As origin we choose the series connection of two Kelvin-Voigt bodies. To model an interaction between the two bodies we include a coupling term. With this extension it is possible to describe certain effects like ratcheting. The material model is introduced for the general three-dimensional case. A detailed derivation and an analytical investigation is carried out for the one-dimensional model of a rod with the behaviour of *two Kelvin-Voigt bodies in series with interaction*. Furthermore, we present the numerical implementation and simulations using COMSOL[®] and Maple[™].

Keywords: Mehr-Mechanismen-Modelle, Rheologische Modelle, Viskoelastizität, Ratcheting

*nkroeger@math.uni-bremen.de, AG Modellierung & Partielle Differentialgleichungen, Zentrum für Technomathematik, Universität Bremen, Postfach 330440, 28334 Bremen

Inhaltsverzeichnis

1. Grundlagen	3
1.1. Bilanzen und Mehr-Mechanismen-Ansatz	3
1.2. Materialmodell für Viskoelastizität mit Wechselwirkung	4
1.2.1. Ortsunabhängiger Fall	6
2. Viskoelastisches Zwei-Mechanismen-Modell für einen eindimensionalen Stab	8
2.1. Modellierung	8
2.2. Anfangs- und Randbedingungen	10
2.2.1. Anfangsbedingungen	10
2.2.2. Randbedingungen	11
3. Schwache Lösbarkeit der instationären Gleichung	14
3.1. Homogene Dirichlet-Randwertaufgabe	14
3.2. Inhomogene Dirichlet-Randwertaufgabe	29
3.3. Gemischte Randwertbedingungen	31
4. Numerische Simulationen	36
4.1. Numerische Simulation mit COMSOL Multiphysics [®] 4.2	36
4.2. Numerische Simulation mit Maple [™] 11	41
5. Zusammenfassung und Ausblick	42
A. Problem der konsistenten inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen	43
Literatur	45

1. Grundlagen

Viele alltägliche Materialien zeigen viskoelastisches Materialverhalten (vgl. Lakers (2009)). Als Beispiel mögen biologische Materialien wie Blut oder Muskeln dienen (vgl. Fung (1993)). Auch bei künstlichen Polymeren ist viskoelastisches Materialverhalten bekannt (vgl. Scavuzzo (2000)). Einige dieser Polymere zeigen unter zyklischer Belastung Ratchetingverhalten, unter anderem das Harz „epoxy resin“ (vgl. Tao und Xia (2007)). Ratcheting kann mit den üblichen Modellen zur linearen Visokoelastizität, wie den Maxwell-, Kelvin-Voigt- oder Standardmodellen, nicht beschrieben werden. Berücksichtigung findet Ratcheting in den Modellen zur nichtlinearen Visokoelastizität (Arzoumandis und Liechti (2003), Caruthers et al. (2004), Xia et al. (2006)). Ein weiteres Anwendungsgebiet der Gleichungen zur Visokoelastizität ist die Geographie, zum Beispiel zur Simulation von mechanischen Bodenreaktionen auf seismische Aktivität, siehe unter anderem Carcione et al. (2005), Hosali (1923), Tromp und Mitrovica (1999), Zhong et al. (2003).

Die Theorie zum klassischen 3D-thermoviskoelastischen Materialverhalten wurde in Bonetti und Bonfanti (2003) und (2005) untersucht. Für Modelle mit Integro-Differentialgleichungen können Ergebnisse bei Bloom (1981) gefunden werden.

1.1. Bilanzen und Mehr-Mechanismen-Ansatz

Das vorgestellte Modell soll im Rahmen kleiner Deformationen formuliert werden. Die lokalen Bilanzen (1.1) sollen in Raum und Zeit, $\Omega \times]0, T[$, erfüllt sein. Dabei ist Ω ein Gebiet mit hinreichend glattem Rand und $0 < T < \infty$. \mathbf{u} beschreibt die Verschiebung, $\boldsymbol{\varepsilon}$ den linearisierten Greenschen Verzerrungstensor, $\boldsymbol{\sigma}$ den Spannungstensor, θ die Temperatur, ρ die Dichte, \mathbf{f} die Volumendichte der externen Massekräfte, e die Massendichte der innere Energie, \mathbf{q} die Wärmestromdichte, r Volumendichte der Wärmezufuhr, ψ die Massedichte der freien (Helmholtz-)Energie und η die Massedichte der Entropie. Ferner verwenden wir die Bezeichnungen \dot{f} für die zeitliche Ableitung von f , $\boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\beta}$ für das Skalarprodukt der Tensoren $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\beta}$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ für das Skalarprodukt der Vektoren \mathbf{v} und \mathbf{w} , sowie $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ für die komponentenweise Multiplikation, definiert durch $(v_1, \dots, v_n)^T \cdot (w_1, \dots, w_n)^T := (v_1 w_1, \dots, v_n w_n)^T$, der Vektoren \mathbf{v} und \mathbf{w} .

Die lokalen Bilanzen sind gegeben durch

$$(1.1a) \quad \rho \ddot{\mathbf{u}} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f} \quad (\text{Impuls-Gleichung}),$$

$$(1.1b) \quad \rho \dot{e} + \operatorname{div} \mathbf{q} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + r \quad (\text{Energie-Gleichung}),$$

$$(1.1c) \quad -\rho \dot{\psi} - \rho \eta \dot{\theta} + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \geq 0 \quad (\text{Clausius-Duhem-Ungleichung}).$$

Die linearisierte Verzerrung ist über die Gleichung

$$(1.2) \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$$

definiert. Des Weiteren wird im Fall inelastischen Materialverhaltens die Gesamtverzerrung in thermoelastische ($\boldsymbol{\varepsilon}_{te}$) und inelastische ($\boldsymbol{\varepsilon}_{in}$) Verzerrung aufgespalten, also

$$(1.3) \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{te} + \boldsymbol{\varepsilon}_{in}.$$

Die thermoelastische Verzerrung steht hierbei in einem eindeutigen Zusammenhang mit der Spannung $\boldsymbol{\sigma}$, vgl. (Altenbach und Altenbach, 1994, S. 198). Für mehrdimensionale Fälle trifft man oft die Annahme, dass der inelastische Anteil der Verzerrung spurfrei ist, $\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{in}) = 0$. Wie üblich in der Modellierung von Visokoelastizität, machen wir diese Annahme hier *nicht*. Es gilt der folgende Zusammenhang (siehe (Haupt, 2002, S. 510), (Altenbach und Altenbach, 1994, S. 148))

$$(1.4) \quad \psi = e - \theta \eta.$$

Die freie Energie setzen wir allgemein als Summe eines thermoelastischen Anteils ψ_{te} und inelastischen Anteils ψ_{in} an. ψ_{in} ist dabei abhängig von inneren Variablen ξ_k , $k \in \{1, \dots, N\}$, so dass

$$(1.5) \quad \psi = \psi_{te}(\varepsilon_{te}, \theta) + \psi_{in}(\xi_1, \dots, \xi_N, \theta)$$

gilt. Mehr-Mechanismen-Modelle zeichnen sich dadurch aus, dass folgende Darstellung für ε_{in} angesetzt wird

$$(1.6) \quad \varepsilon_{in} = \sum_{i=1}^n A_j \varepsilon_i.$$

Dabei sind die A_j positive Zahlen und können beispielsweise für die Gewichtung der verschiedenen Mechanismen stehen. Dies lässt Raum für Verallgemeinerungen, siehe Wolff et al. (2010) für den plastischen Fall. Mehr-Mechanismen-Modelle fanden bisher vornehmlich in der Beschreibung von

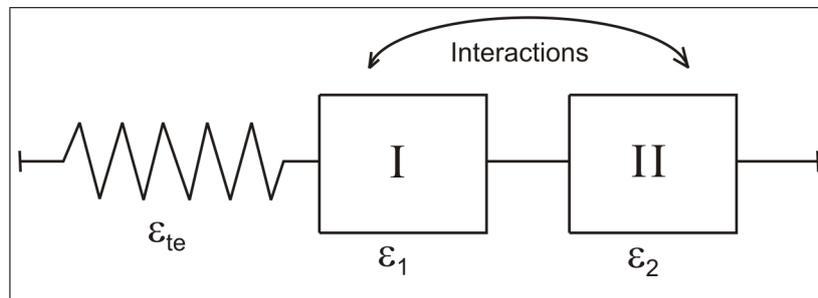


Abbildung 1: Schema eines Zwei-Mechanismen-Modells

plastischem Materialverhalten Anwendung, siehe Wolff et al. (2010), Wolff et al. (2011), Wolff und Taleb (2008) und als Überblick Saï (2011).

1.2. Materialmodell für Viskoelastizität mit Wechselwirkung

Im Folgenden betrachten wir ein Zwei-Mechanismen-Modell für den isothermen Fall, das heißt $\theta = const$ (vgl. Wolff et al. (2012) für den nicht isothermen Fall). Zudem gelte die Vereinfachung $A_j = 1$. Wir verzichten auf ein vorgeschaltetes (thermo)elastisches Element und vernachlässigen auch weitere thermische Effekte, so dass $\varepsilon_{te} = 0$ und $\varepsilon = \varepsilon_{in}$ folgen. Im Weiteren behandeln wir eine Erweiterung der Reihenschaltung zweier Kelvin-Voigt-Elemente. Grundlagen zu rheologischen Modellen lassen sich zum Beispiel Altenbach und Altenbach (1994), Mathiak (2010) oder Haupt (2002) entnehmen. Wir stellen das Materialmodell zunächst für den allgemeinen dreidimensionalen Fall vor, bevor im folgenden Abschnitt ein eindimensionaler Stab betrachtet wird. Die klassische Reihenschaltung zweier Kelvin-Voigt-Elemente wird mit den Ansätzen

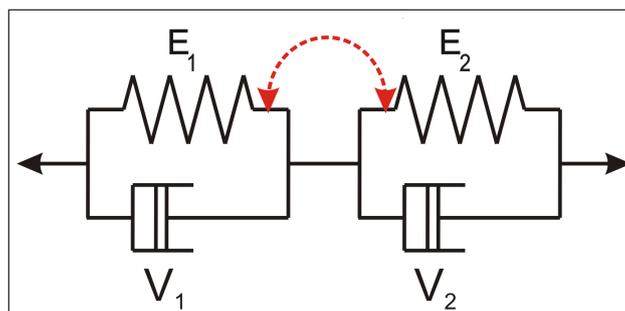


Abbildung 2: Zwei Kelvin-Voigt-Körper in Reihe mit Wechselwirkung

$$(1.7) \quad \boxed{\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2} \quad \boxed{\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_1 = \boldsymbol{\sigma}_2}$$

und der Materialantwort für das jeweilige i -te Element

$$(1.8) \quad \boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{E}_i : \boldsymbol{\varepsilon}_i + \mathbf{V}_i : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i$$

beschrieben, wobei \mathbf{E}_i die vierstufigen, positiv definiten Elastizitäts- und \mathbf{V}_i die Viskositätstensenoren seien. Die Reformulierung von (1.8) als

$$(1.9) \quad \mathbf{V}_i : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i = (\boldsymbol{\sigma} - \underbrace{\mathbf{E}_i : \boldsymbol{\varepsilon}_i}_{=: \mathbf{X}_i})$$

motiviert für \mathbf{X}_i die Bezeichnung *Rückspannung*. Unter Berücksichtigung des Ansatzes für die spezifische Formänderungsenergie (siehe (Altenbach und Altenbach, 1994, S.201)) erhält man für die Spannungs- und Verzerrungstensenoren die Symmetrien

$$(1.10a) \quad E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{ijlk} = E_{klij},$$

$$(1.10b) \quad V_{ijkl} = V_{jikl} = V_{ijlk} = V_{klij}.$$

Im Falle vollständig anisotropen Materialverhaltens besitzen die Materialtensenoren daher jeweils 21 linear-unabhängige Einträge. Für das klassische Modell zweier Kelvin-Voigt-Körper in Reihe ist die freie Energie durch

$$(1.11) \quad \psi := \frac{1}{\rho(x)} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_1 : \mathbf{E}_1 : \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_2 : \mathbf{E}_2 : \boldsymbol{\varepsilon}_2 \right)$$

gegeben. Wie üblich definieren wir die Rückspannungen als

$$(1.12) \quad \mathbf{X}_i := \rho(x) \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_i}$$

(vgl. (Haupt, 2002, S. 527)). Um Wechselwirkungen der beiden Kelvin-Voigt-Elemente modellieren zu können, modifizieren wir die freie Energie so, dass

$$(1.13) \quad \psi := \frac{1}{\rho(x)} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_1 : \mathbf{E}_1 : \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_2 : \mathbf{E}_2 : \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_1 : \mathbf{E}_{12} : \boldsymbol{\varepsilon}_2 \right).$$

$\boldsymbol{\varepsilon}_1 : \mathbf{E}_{12} : \boldsymbol{\varepsilon}_2$ beschreibt hierbei die Kopplung der beiden Elemente und wir bezeichnen \mathbf{E}_{12} als Kopplungstensor. Wir setzen voraus, dass \mathbf{E}_{12} die gleichen Symmetrieeigenschaften wie die Tensenoren der Elastizität und Viskosität (vgl. (1.10)) erfüllt. Analoge Ansätze finden sich bei Zwei-Mechanismen-Modellen des plastischen Materialverhaltens, siehe u.a. Wolff et al. (2011). Somit gelten für die Rückspannungen des gekoppelten Systems

$$(1.14) \quad \mathbf{X}_1^{neu} = \rho(x) \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_1} = \mathbf{E}_1 : \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \mathbf{E}_{12} : \boldsymbol{\varepsilon}_2, \quad \mathbf{X}_2^{neu} = \rho(x) \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_2} = \mathbf{E}_{12} : \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \mathbf{E}_2 : \boldsymbol{\varepsilon}_2.$$

Es ergibt sich ein neues, gekoppeltes System:

$$(1.15a) \quad \mathbf{V}_1 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 = \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}_1^{neu} = \boldsymbol{\sigma} - (\mathbf{E}_1 : \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \mathbf{E}_{12} : \boldsymbol{\varepsilon}_2),$$

$$(1.15b) \quad \mathbf{V}_2 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 = \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}_2^{neu} = \boldsymbol{\sigma} - (\mathbf{E}_{12} : \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \mathbf{E}_2 : \boldsymbol{\varepsilon}_2)$$

(vgl. (1.9)). In Vektor-Matrix-Schreibweise erhält man

$$(1.16) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 \end{pmatrix} = - \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_{12} \\ \mathbf{E}_{12} & \mathbf{E}_2 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{E}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}.$$

In Anlehnung an (1.11) wird gefordert, dass die freie Energie (1.13) weiterhin durch eine konvexe quadratische Form beschrieben wird¹. Dies gilt hier genau dann, wenn

$$(1.17) \quad \sum_{i,j,k,l=1}^{3,3,3,3} E_{1,ijkl} T_{1,ij} T_{1,kl} + E_{2,ijkl} T_{2,ij} T_{2,kl} + 2E_{12,ijkl} T_{1,ij} T_{2,kl} \geq 0$$

für alle symmetrischen Tensoren T_i zweiter Stufe gilt. Für den skalaren und eindimensionalen Fall reduziert sich diese Bedingung auf

$$(1.18) \quad E_{12}^2 \leq E_1 E_2.$$

Für diesen Fall sind E_{ij} Konstanten oder skalare Funktionen. Eine wesentliche Erweiterung im Vergleich zu dem klassischen rheologischen Modell zweier Kelvin-Voigt-Körper bildet der singuläre Fall

$$(1.19) \quad E_{12}^2 = E_1 E_2.$$

Die thermodynamische Konsistenz ist unter der obigen Bedingung im isothermen Fall stets erfüllt. Um dies zu begründen, betrachten wir die Restungleichung für den isothermen Fall (vgl. Haupt (2002))

$$(1.20) \quad \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{in} - \sum_{i=1}^n \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\xi}_i} : \dot{\boldsymbol{\xi}}_i \geq 0,$$

wobei

$$(1.21) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{in} - \sum_{i=1}^n \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\xi}_i} : \dot{\boldsymbol{\xi}}_i &= \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 - \mathbf{X}_1^{neu} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 - \mathbf{X}_2^{neu} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 \\ &= (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}_1^{neu}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 + (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}_2^{neu}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 \\ &= (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}_1^{neu}) : \mathbf{V}_1^{-1} : (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}_1^{neu}) + (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}_2^{neu}) : \mathbf{V}_2^{-1} : (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}_2^{neu}). \end{aligned}$$

Für positiv definite Viskositätstensoren ist die Restungleichung also stets erfüllt.

1.2.1. Ortsunabhängiger Fall

Die Beziehung der Verzerrungen zu vorgegebener Spannung kann für den skalaren ortsunabhängigen Fall analytisch aus dem linearen Differentialgleichungssystem bestimmt werden. Die Materialparameter E_1, E_2, E_{12}, V_1 und V_2 sind hier skalare Größen. Ohne Rechnung wollen wir zur Illustration die Lösungsformeln für den regulären sowie den singulären Fall und Graphiken für einen Relaxationsversuch für beide Fälle vorstellen:

Für den regulären Fall erhält man

$$(1.22) \quad \varepsilon = \eta_1 e^{\lambda_1 t} \int_0^t \sigma(\tau) e^{-\lambda_1 \tau} d\tau + \eta_2 e^{\lambda_2 t} \int_0^t \sigma(\tau) e^{-\lambda_2 \tau} d\tau,$$

sowie für den singulären Fall

$$(1.23) \quad \varepsilon = \eta_1 \int_0^t \sigma(\tau) d\tau + \eta_2 e^{\lambda t} \int_0^t \sigma(\tau) e^{-\lambda \tau} d\tau.$$

¹vgl. auch (Haupt, 2002, S. 520f). Im isothermen Fall der klassischen Viskoelastizität ist die freie Energie gleich der potentiellen Energie der elastischen Elemente, und diese wird meist als konvex vorausgesetzt.

Hierbei sind η_i positive Konstanten und λ_i die Eigenwerte der Matrix

$$(1.24) \quad A := \begin{pmatrix} -V_1^{-1}E_1 & -V_1^{-1}E_{12} \\ -V_2^{-1}E_{12} & -V_2^{-1}E_2 \end{pmatrix}.$$

Im singulären Fall ist ein Eigenwert gleich 0. Für vorgegebene asymmetrische Spannungen liefert (1.23) direkt einen Ratcheting-Effekt. Zur Illustration zeigen die Graphiken 3 und 4 die Reaktion auf die vorgegebene Spannung

$$(1.25) \quad \sigma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \alpha \sin(\omega t - \arcsin(\frac{c}{\alpha})) + c & 0 < t < T_R \\ 0 & t \geq T_R \end{cases}$$

mit T_R als Startzeitpunkt der Relaxation.

Mit Beginn der Relaxation auf $\sigma = 0$ im regulären Fall stellt sich die Verzerrung nach einiger Zeit wieder auf $\varepsilon = 0$ ein (vgl. Abb. 3). Im singulären Fall bleibt auch nach Zurücknahme der Spannung auf 0 ein konstante Verzerrung bestehen (vgl. Abb. 4).

Qualitative Unterschiede zwischen dem klassischen rheologischen Modell zweier Kelvin-Voigt-Elemente und dem hier vorgestellten gekoppelten System treten für Relaxationstests und zyklische Zug-/Druckversuche mit vorgegebener asymmetrischer Spannung auf (vgl. Mathiak (2010)). Es ist zu beachten, dass nach Entlastung die Verzerrung im singulären Fall nicht auf Null zurück geht. Bei Zug-/Druckversuchen kommt es in den singulären Fällen zu Ratchetingeffekten.

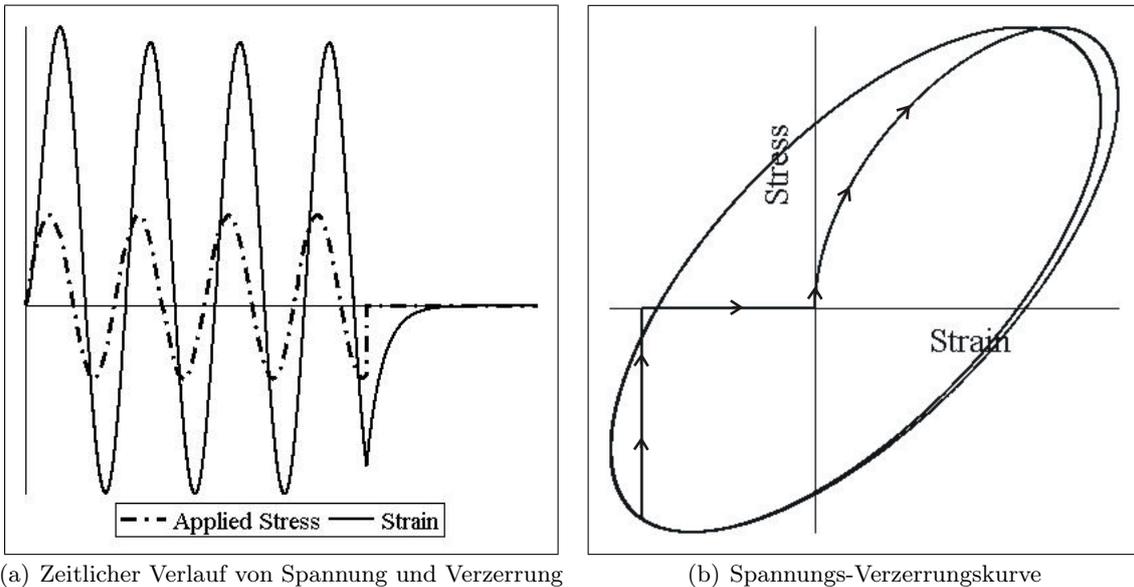


Abbildung 3: Asymmetrischer Zug-/Druckversuch mit anschließender Relaxation für den regulären Fall (Maple™11.02)

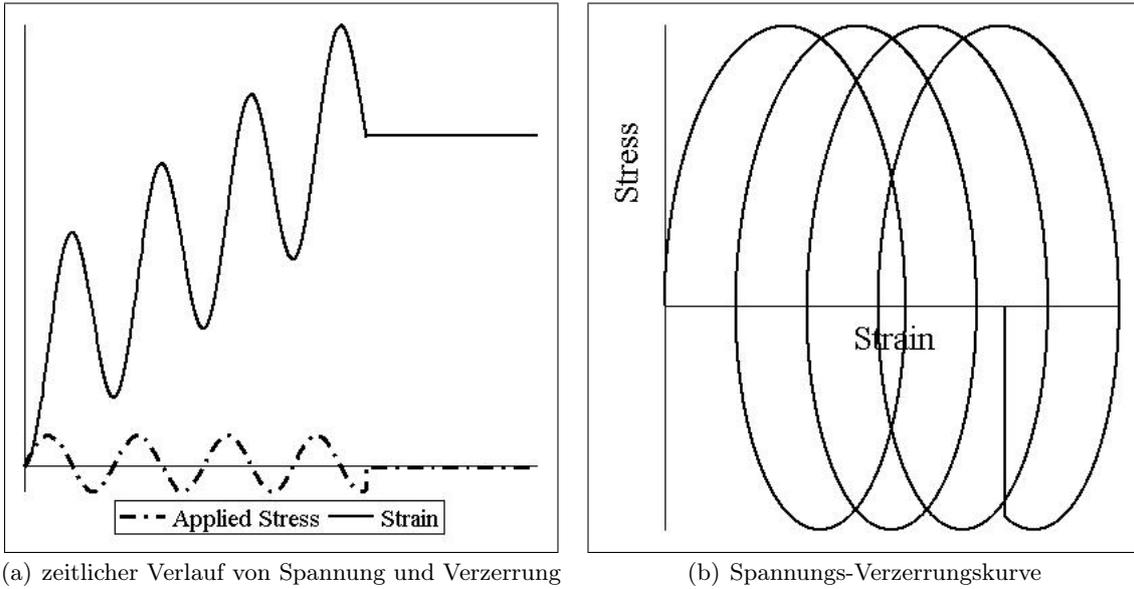


Abbildung 4: Asymmetrischer Zug-/Druckversuch mit anschließender Relaxation für den singulären Fall, $E_{12} = \sqrt{E_1 E_2}$ (Maple™ 11.02)

2. Viskoelastisches Zwei-Mechanismen-Modell für einen eindimensionalen Stab

In diesem Kapitel befassen wir uns

- mit der Herleitung eines Systems partieller Differentialgleichungen zur Beschreibung von viskoelastischen Materialverhaltens für einen eindimensionalen Stab mittels des in Abschnitt 1.2 vorgestellten Ansatzes der „Zwei Kelvin-Voigt-Körper in Reihe mit Wechselwirkung“
- und gehen auf adäquate Anfangs- und Randbedingungen ein.

2.1. Modellierung

Der betrachtete Stab habe die Länge $l > 0$ und den Querschnitt S . Seine Achse verlaufe parallel zur x -Achse. Wir untersuchen nun ein kleines Segment des Stabes der Länge h von x bis $x + h$. $u(t, x)$ sei die Auslenkung des Querschnitts in x -Richtung bei x zum Zeitpunkt t des Zeitintervalls $[0, T]$, $T > 0$. Wir setzen Differenzierbarkeit der Auslenkung voraus, so dass näherungsweise gilt

$$(2.1) \quad \partial_x u(t, x) \approx \frac{u(t, x + h) - u(t, x)}{h}.$$

Alle auftretenden Kräfte sollen ausschließlich in Richtung der x -Achse wirken. Die Antwort des Stabes auf äußere Kräfte sei durch das Modell der Reihenschaltung *zweier Kelvin-Voigt-Körper mit Wechselwirkung* bestimmt. Außerdem sollen Trägheitseffekte berücksichtigt werden.

Das Kräftegleichgewicht nach d'Alembert liefert den folgenden Zusammenhang zwischen den Trägheitskräften F_T , den äußeren Volumenkräften F_V und den inneren Kräften F_{in} als Antwort auf äußere Kräfte in $]0, T[\times]0, l[$:

$$(2.2) \quad F_T(t, x) - F_{in}(x, t) = F_V(x, t),$$

- stets bezogen auf das Segment $S \times [x, x + h)$. Die Trägheit sei wie üblich über

$$(2.3) \quad F_T(t, x) = \rho(x) \partial_{tt} u(t, x) |S| h$$

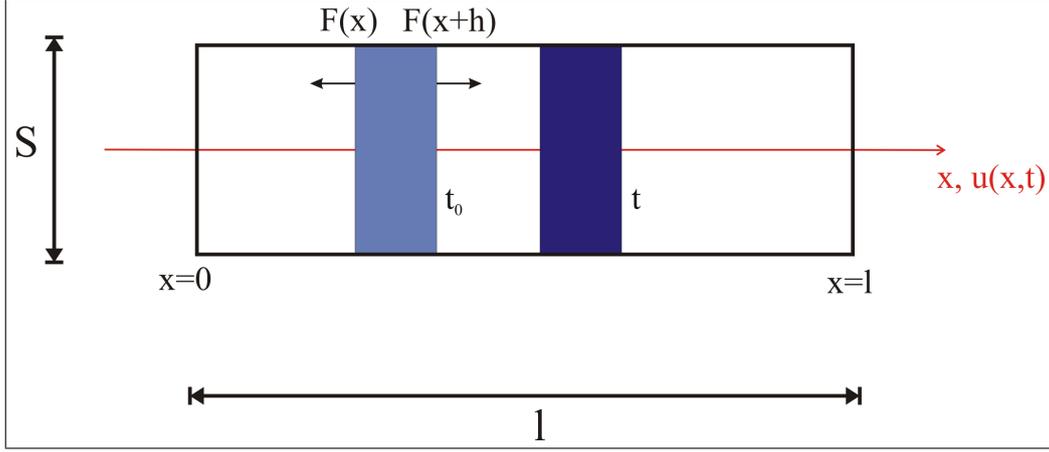


Abbildung 5: Stab als (1d,1d)-Modell

bestimmt, wobei $\rho(x)$ die Dichte in x beschreibt. Für homogene Stäbe ist ρ konstant. Die äußeren Volumenkräfte seien durch

$$(2.4) \quad F_V(t, x) = \rho(x) f_V(t, x) |S| h$$

gegeben. Hierbei ist f_V die Massedichte der äußeren Kräfte, wie zum Beispiel die Gravitation in x -Richtung.

Die Modellierung der Antwort der inneren Kräfte sei im Folgenden ausgeführt. Seien $F_{in}^{\textcircled{1}}(t, x)$ die im Punkt x zur Zeit t wirkenden Kontaktkräfte in Längsrichtung ausgehend vom jeweiligen Kelvin-Voigt-Element als Antwort auf äußere Kräfte. Es gelten aufgrund der Reihenschaltung der Kelvin-Voigt-Körper (vgl. (1.7)):

$$(2.5) \quad \partial_x u(t, x) = \partial_x u_1(t, x) + \partial_x u_2(t, x)$$

und

$$(2.6) \quad F_{in}(t, x) = F_{in}^{\textcircled{1}}(t, x) = F_{in}^{\textcircled{2}}(t, x).$$

Weiter setzen wir die additive Zerlegung der Verschiebung in zwei Teilverschiebungen voraus, so dass

$$(2.7) \quad u(t, x) = u_1(t, x) + u_2(t, x).$$

Diese Annahme ist für den eindimensionalen Fall sinnvoll - insbesondere wenn an einem Stabende homogene Dirichlet-Randbedingungen gelten (vgl. Abschnitt 3).

Im Punkt x gilt mit den Elastizitäten E_i , den Viskositäten V_i und der Kopplung E_{12}

$$(2.8a) \quad \frac{F_{in}^{\textcircled{1}}(t, x)}{|S|} = E_1(x) \partial_x u_1(t, x) + E_{12}(x) \partial_x u_2(t, x) + V_1(x) \partial_{tx} u_1(t, x),$$

$$(2.8b) \quad \frac{F_{in}^{\textcircled{2}}(t, x)}{|S|} = E_{12}(x) \partial_x u_1(t, x) + E_2(x) \partial_x u_2(t, x) + V_2(x) \partial_{tx} u_2(t, x).$$

Auf das Segment $S \times [x, x+h]$ wirken dann die (Kontakt-)Kräfte

$$(2.9a) \quad \begin{aligned} & F_{in}^{\textcircled{1}}(t, x+h) - F_{in}^{\textcircled{1}}(t, x) \\ &= |S| ((E_1(x+h) \partial_x u_1(t, x+h) - E_1(x) \partial_x u_1(t, x)) \\ & \quad + (E_{12}(x+h) \partial_x u_2(t, x+h) - E_{12}(x) \partial_x u_2(t, x)) \\ & \quad + (V_1(x+h) \partial_{tx} u_1(t, x+h) - V_1(x) \partial_{tx} u_1(t, x))) \\ & \approx \partial_x (E_1(x) \partial_x u_1(t, x) + E_{12}(x) \partial_x u_2(t, x) + V_1(x) \partial_{tx} u_1(t, x)) |S| h, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2.9b) \quad & F_{in}^{\textcircled{2}}(t, x+h) - F_{in}^{\textcircled{2}}(t, x) \\
& = |S| ((E_{12}(x+h)\partial_x u_1(t, x+h) - E_{12}(x)\partial_x u_1(t, x)) \\
& \quad + (E_2(x+h)\partial_x u_2(t, x+h) - E_2(x)\partial_x u_2(t, x)) \\
& \quad + (V_2(x+h)\partial_{tx} u_2(t, x+h) - V_2(x)\partial_{tx} u_2(t, x))) \\
& \approx \partial_x (E_{12}(x)\partial_x u_1(t, x) + E_2(x)\partial_x u_2(t, x) + V_2(x)\partial_{tx} u_2(t, x)) |S|h.
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich für das Kräftegleichgewicht im Segment unter Beachtung, dass „gleichgerichtete gleiche Kräfte F nicht zu einer relativen Längenänderung führen“², folgendes Problem

$$(2.10) \quad F_T - \left(F_{in}^{\textcircled{1}}(t, x+h) - F_{in}^{\textcircled{1}}(t, x) \right) = F_V,$$

so dass ein System zweier partieller Differentialgleichungen 3. Ordnung zu untersuchen ist,

$$(2.11a) \quad \rho \partial_{tt}(u_1 + u_2) |S|h - \partial_x (E_1 \partial_x u_1 + E_{12} \partial_x u_2 + V_1 \partial_{tx} u_1) |S|h = \rho f_V |S|h,$$

$$(2.11b) \quad \rho \partial_{tt}(u_1 + u_2) |S|h - \partial_x (E_{12} \partial_x u_1 + E_2 \partial_x u_2 + V_2 \partial_{tx} u_2) |S|h = \rho f_V |S|h,$$

dass heißt

$$(2.12a) \quad \rho \partial_{tt}(u_1 + u_2) - \partial_x (E_1 \partial_x u_1 + E_{12} \partial_x u_2 + V_1 \partial_{tx} u_1) = \rho f_V,$$

$$(2.12b) \quad \rho \partial_{tt}(u_1 + u_2) - \partial_x (E_{12} \partial_x u_1 + E_2 \partial_x u_2 + V_2 \partial_{tx} u_2) = \rho f_V.$$

Das System (2.12) kann unter Einführung der nachfolgenden Bezeichnungen kompakter geschrieben werden. Mit

$$(2.13a) \quad \mathbf{u}(t, x) := \begin{pmatrix} u_1(t, x) \\ u_2(t, x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t, x) := \begin{pmatrix} f_1(t, x) \\ f_2(t, x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f_V(t, x) \\ f_V(t, x) \end{pmatrix},$$

$$(2.13b) \quad \mathbf{E} := \begin{pmatrix} E_1(x) & E_{12}(x) \\ E_{12}(x) & E_2(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} := \begin{pmatrix} V_1(x) & 0 \\ 0 & V_2(x) \end{pmatrix}$$

und

$$(2.13c) \quad \mathbf{P}(\cdot) := [\mathbf{E} \partial_x(\cdot) + \mathbf{V} \partial_{tx}(\cdot)]$$

liefert die Gleichung (2.12)

$$(2.14) \quad \rho(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \partial_{tt} \mathbf{u}(t, x) - \partial_x \mathbf{P} \mathbf{u}(t, x) = \rho(x) \mathbf{f}(t, x).$$

2.2. Anfangs- und Randbedingungen

2.2.1. Anfangsbedingungen

Die Anfangsbedingungen beschreiben die Ausgangslage des Stabes zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$(2.15) \quad u_1(0, x) = u_1^{(0)}(x), \quad \partial_t u_1(0, x) = u_1^{(1)}(x),$$

$$(2.16) \quad u_2(0, x) = u_2^{(0)}(x), \quad \partial_t u_2(0, x) = u_2^{(1)}(x).$$

In kompakter Schreibweise schreiben sich die Anfangsbedingungen als

$$(2.17) \quad \mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}^{(0)}(x) := \begin{pmatrix} u_1^{(0)}(x) \\ u_2^{(0)}(x) \end{pmatrix}, \quad \partial_t \mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}^{(1)}(x) := \begin{pmatrix} u_1^{(1)}(x) \\ u_2^{(1)}(x) \end{pmatrix}.$$

²(Wolff, 2011, S. 42f)

2.2.2. Randbedingungen

In diesem Unterabschnitt werden sinnvolle Randbedingungen für den Stab motiviert und diskutiert. Sie gelten für alle $t \geq 0$.

Dirichlet-Randbedingungen Ist der Stab an beiden Enden fest eingespannt, so sind homogene Dirichlet-Randbedingungen zu wählen, dass heißt

$$(2.18) \quad \mathbf{u}(t, 0) = \mathbf{u}(t, l) = 0.$$

Inhomogene Dirichlet-Randbedingungen treten auf, wenn die Verschiebung auf dem Rand vorgegeben wird. Dieser Fall tritt zum Beispiel für dehnungsgetriebene Versuche auf. Exemplarisch

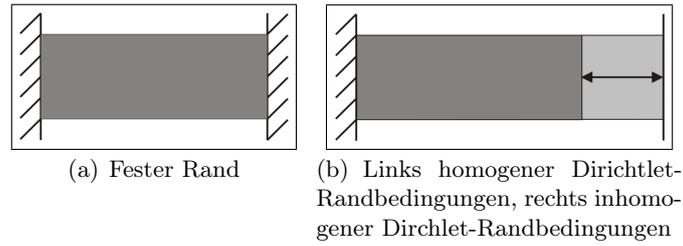


Abbildung 6: Dirichlet-Randbedingungen

soll die Situation aus Abbildung 6(b) vorgegeben sein. Der linke Rand des Stabes ist für alle Zeiten fest an einem Ort fixiert, dass heißt es gelten links homogene Dirichlet-Randbedingungen. Am rechten Rand wird eine bekannte Verschiebung u^R auf den Stab gegeben.³ Dann gilt

$$(2.19) \quad u(t, l) = u_1(t, l) + u_2(t, l) = u^R(t).$$

Wird auch am linken Rand ($x = 0$) eine Verschiebung u^L vorgegeben, gilt entsprechend

$$(2.20) \quad u(t, 0) = u_1(t, 0) + u_2(t, 0) = u^L(t).$$

Neumann-Randbedingungen Nimmt man freie Enden an, sind Neumann-Randbedingungen zu wählen. Homogene Bedingungen sind gegeben, wenn der Stab ohne auf den Rand wirkende Kontaktkräfte im Raum liegt. Dies würde zum Beispiel für „Zero-G“-Zustände gelten, also unter anderem im Weltall oder bei Parabelflügen.

Man betrachtet die Kräftebilanz an den Stabenden, dass heißt in $[0, h]$ beziehungsweise in $[l-h, l]$ (vgl. Abb. 5). Für $[0, h]$ erhalten wir

$$(2.21) \quad F_T(t, 0) = F_V(t, 0) + F_{in}^{\textcircled{i}}(t, h)$$

und damit

$$(2.22) \quad \rho(0)\partial_{tt}u(t, 0)Sh - \rho(0)f_V(t, 0)Sh = F_{in}^{\textcircled{i}}(t, h).$$

Für den Grenzübergang $h \rightarrow 0$ gilt dann

$$(2.23) \quad \underbrace{\rho(0)\partial_{tt}u(t, 0)Sh}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\rho(0)f_V(t, 0)Sh}_{\rightarrow 0} = \underbrace{F_{in}^{\textcircled{i}}(t, h)}_{\rightarrow F_{in}^{\textcircled{i}}(t, 0)},$$

$$(2.24) \quad \text{also } F_{in}^{\textcircled{i}}(t, 0) = 0.$$

³Es ergibt sich die Schwierigkeit, die Randverschiebung u^R auf die beiden Teilverschiebungen $u_1(t, l)$ und $u_2(t, l)$ vorzugeben. Ein sinnvoller Ansatz ist $u_1(t, l) = q(t)u^R(t)$ und $u_2(t, l) = (1 - q(t))u^R(t)$ zu wählen und $q(t)$ über das Materialgesetz zu ermitteln. Entsprechendes gilt für u^L (vgl. Anhang A).

Somit gilt

$$(2.25a) \quad E_1(0)\partial_x u_1(t, 0) + E_{12}(0)\partial_x u_2(t, 0) + V_1(0)\partial_{tx} u_1(t, 0) = 0,$$

$$(2.25b) \quad E_{12}(0)\partial_x u_1(t, 0) + E_2(0)\partial_x u_2(t, 0) + V_2(0)\partial_{tx} u_2(t, 0) = 0.$$

Analoge Schlüsse gelten für die rechte Seite ($x = l$).

Wird an der rechten Seite eine zeitabhängige Spannung σ^R auf den Querschnitt S des Sta-
bes angelegt, erhält man eine inhomogene Neumann-Randbedingung auf dieser Seite. Betrachtet
man die Kräftebilanz an diesem Ende und beachtet dabei, dass $|S| \cdot \sigma^R$ eine Kraft ist, so folgt

$$(2.26) \quad F_T(t, l) = F_V(t, l) - F_{in}^{\textcircled{i}}(t, l - h) + |S|\sigma^R(t).$$

Einsetzen und Umstellen liefern

$$(2.27) \quad \rho(l)\partial_{tt}u(t, l)|S|h - \rho(l)f_V(t, l)|S|h = -F_{in}^{\textcircled{i}}(t, l - h) + |S|\sigma^R(t).$$

Für den Grenzübergang $h \rightarrow 0$ gilt dann

$$(2.28) \quad F_{in}^{\textcircled{i}}(t, l) = |S|\sigma^R(t),$$

und somit

$$(2.29a) \quad E_1(l)\partial_x u_1(t, l) + E_{12}(l)\partial_x u_2(t, l) + V_1(l)\partial_{tx} u_1(t, l) = \sigma^R(t),$$

$$(2.29b) \quad E_{12}(l)\partial_x u_1(t, l) + E_2(l)\partial_x u_2(t, l) + V_2(l)\partial_{tx} u_2(t, l) = \sigma^R(t),$$

beziehungsweise, in kompakter Schreibweise,

$$(2.30) \quad \mathbf{P}\mathbf{u}(t, l) = \begin{pmatrix} \sigma^R(t) \\ \sigma^R(t) \end{pmatrix}.$$

Kombiniert mit einer homogenen Dirichlet-Randbedingung am linken Rand erhält man die Be-
schreibung für einen spannungsgetriebenen Versuch.

Analog kann eine inhomogene Neumann-Randbedingung für den linken Rand hergeleitet wer-
den.

Robin-Randbedingungen Ist der zu untersuchende Körper zwischen zwei weiteren Körpern
eingespannt, ergeben sich Robin-Randbedingungen (vgl. Abb. 7). Seien K_1 und K_2 elastische



Abbildung 7: Robin-Randbedingungen

Körper. Dann gilt an den Rändern, bei $x = 0$

$$(2.31a) \quad E^L(u_1(t, 0) + u_2(t, 0)) = E_1\partial_x u_1(t, 0) + E_{12}\partial_x u_2(t, 0) + V_1\partial_{tx} u_1(t, 0),$$

$$(2.31b) \quad E^L(u_1(t, 0) + u_2(t, 0)) = E_{12}\partial_x u_1(t, 0) + E_2\partial_x u_2(t, 0) + V_2\partial_{tx} u_2(t, 0),$$

sowie bei $x = l$,

$$(2.32a) \quad -E^R (u_1(t, l) + u_2(t, l)) = E_1 \partial_x u_1(t, l) + E_{12} \partial_x u_2(t, l) + V_1 \partial_{tx} u_1(t, l),$$

$$(2.32b) \quad -E^R (u_1(t, l) + u_2(t, l)) = E_{12} \partial_x u_1(t, l) + E_2 \partial_x u_2(t, l) + V_2 \partial_{tx} u_2(t, l).$$

E^L und E^R sind hierbei die Elastizitätskonstanten des an der linken sowie rechten Seite angefügten elastischen Körpers.

Sind K_1 und K_2 viskoelastische Körper, seien zusätzlich V^L und V^R die Viskositäten des jeweilig angefügten Körpers, so sind für die Ränder die Bedingungen

$$(2.33a) \quad \begin{aligned} E^L (u_1(t, 0) + u_2(t, 0)) + V^L \partial_t (u_1(t, 0) + u_2(t, 0)) \\ = E_1(0) \partial_x u_1(t, 0) + E_{12}(0) \partial_x u_2(t, 0) + V_1(0) \partial_{tx} u_1(t, 0), \end{aligned}$$

$$(2.33b) \quad \begin{aligned} E^L (u_1(t, 0) + u_2(t, 0)) + V^L \partial_t (u_1(t, 0) + u_2(t, 0)) \\ = E_{12}(0) \partial_x u_1(t, 0) + E_2(0) \partial_x u_2(t, 0) + V_2(0) \partial_{tx} u_2(t, 0) \end{aligned}$$

sowie bei $x = l$,

$$(2.34a) \quad \begin{aligned} -E^R (u_1(t, l) + u_2(t, l)) - V^R \partial_t (u_1(t, l) + u_2(t, l)) \\ = E_1(l) \partial_x u_1(t, l) + E_{12}(l) \partial_x u_2(t, l) + V_1(l) \partial_{tx} u_1(t, l), \end{aligned}$$

$$(2.34b) \quad \begin{aligned} -E^R (u_1(t, l) + u_2(t, l)) - V^R \partial_t (u_1(t, l) + u_2(t, l)) \\ = E_{12}(l) \partial_x u_1(t, l) + E_2(l) \partial_x u_2(t, l) + V_2(l) \partial_{tx} u_2(t, l) \end{aligned}$$

zu stellen. Wir definieren für die kompakte Schreibweise

$$(2.35) \quad \mathbf{E}^L := \begin{pmatrix} E^L & E^L \\ E^L & E^L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}^R := \begin{pmatrix} E^R & E^R \\ E^R & E^R \end{pmatrix}.$$

E^L, E^R sind die Elastizitätskoeffizienten des linken ($x = 0$), sowie rechten ($x = l$) anliegenden Körpers. Entsprechend definiert man für die Viskositäten

$$(2.36) \quad \mathbf{V}^L := \begin{pmatrix} V^L & V^L \\ V^L & V^L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}^R := \begin{pmatrix} V^R & V^R \\ V^R & V^R \end{pmatrix}.$$

Für anliegende viskoelastische Körper gilt dann am Rand

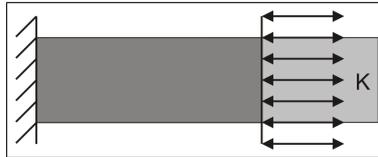


Abbildung 8: Inhomogene Robin-Randbedingungen am rechten Rand

$$(2.37a) \quad \mathbf{P}\mathbf{u}(t, 0) = \mathbf{E}^L \mathbf{u}(t, 0) + \mathbf{V}^L \partial_t \mathbf{u}(t, 0),$$

$$(2.37b) \quad \mathbf{P}\mathbf{u}(t, l) = -\mathbf{E}^R \mathbf{u}(t, l) - \mathbf{V}^R \partial_t \mathbf{u}(t, l).$$

Handelt es sich um einen ideal elastischen oder einen ideal viskosen Körper, setzt man die Viskositäts- bzw. Elastizitätskoeffizienten gleich 0.

Auch hier sind wieder inhomogene Robin-Randbedingungen verwendbar, dass heißt, es addieren sich die Randspannungen σ^L und σ^R ,

$$(2.38) \quad \boldsymbol{\sigma}^L(t) = \begin{pmatrix} \sigma^L(t) \\ \sigma^L(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}^R(t) = \begin{pmatrix} \sigma^R(t) \\ \sigma^R(t) \end{pmatrix},$$

an der jeweiligen Seite, so dass

$$(2.39a) \quad \mathbf{P}\mathbf{u}(t, 0) = \mathbf{E}^L \mathbf{u}(t, 0) + \mathbf{V}^L \partial_t \mathbf{u}(t, 0) + \boldsymbol{\sigma}^L(t),$$

$$(2.39b) \quad \mathbf{P}\mathbf{u}(t, l) = -\mathbf{E}^R \mathbf{u}(t, l) - \mathbf{V}^R \partial_t \mathbf{u}(t, l) + \boldsymbol{\sigma}^R(t).$$

Natürlich sind auch **gemischte Randbedingungen** sinnvoll.

3. Schwache Lösbarkeit der instationären Gleichung

Als Nächstes wollen wir uns mit der schwachen Lösbarkeit des Systems (2.12) auseinandersetzen. Im Folgenden formulieren wir die mathematische Aufgabenstellungen

- für homogene Dirichlet-Randbedingungen,
- für inhomogene Dirichlet-Randbedingungen,
- für gemischte Randbedingungen

und tätigen Aussagen über Existenz und Eindeutigkeit der schwachen Lösungen. Als allgemeine mathematische Referenzen seien zum Beispiel Gajewski et al. (1974), Wloka (1982), Zeidler (1990a) - u.a. für die Notation der Funktionenräume.

Zunächst definieren wir folgendes Dichte-gewichtete Skalarprodukt:

Definition 3.1. Für $f, g \in L^2(\Omega)$ und $\rho \in L^\infty(\Omega)$ mit $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$ für fast alle $x \in \Omega$ wird ein Dichte-gewichtetes Skalarprodukt eingeführt:

$$(3.1) \quad (f, g)_\rho := \int_{\Omega} \rho(x) f(x) g(x) dx.$$

Dieses Skalarprodukt erzeugt die gewichtete L^2 -Norm:

$$(3.2) \quad \|f\|_{\rho, L^2} := \left(\int_{\Omega} \rho(x) |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Für vektorwertiges $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^n$ definieren wir:

$$(3.3) \quad \|\mathbf{f}\|_{\rho, [L^2]^n} := \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \rho(x) |f_i(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

3.1. Homogene Dirichlet-Randwertaufgabe

Seien $S :=]0, T[$, $\Omega :=]0, l[$, \mathbf{P}, \mathbf{f} wie in (2.13), $E_i, E_{12}, V_i, \rho \in L^\infty(\Omega)$.

Finde ein $\mathbf{u} : S \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, so dass die instationäre Gleichung

$$(3.4a) \quad \rho(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \partial_{tt} \mathbf{u}(t, x) - \partial_x \mathbf{P}\mathbf{u}(t, x) = \rho(x) \mathbf{f} \quad \text{in } S \times \Omega,$$

mit den Anfangsbedingungen

$$(3.4b) \quad \mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}^{(0)}(x), \quad \partial_t \mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}^{(1)}(x) \quad \text{in } \Omega,$$

sowie den homogenen Dirichlet-Randbedingungen

$$(3.4c) \quad \mathbf{u}(t, x) = \mathbf{0} \quad \text{auf } S \times \partial\Omega$$

erfüllt ist.

Es gelte das folgende Setting für Raum, Zeit, Parameter, Funktionenräume und Daten:

Setting 3.2.

Raum & Zeit:

$$(3.5a) \quad \Omega :=]0, l[\subset \mathbb{R} \quad \text{Raum, } l > 0,$$

$$(3.5b) \quad S :=]0, T[\subset \mathbb{R} \quad \text{Zeit, } T > 0,$$

Parameter(-funktionen):

$$(3.6a) \quad \rho \in L^\infty(\Omega) \quad \text{Dichte,}$$

$$(3.6b) \quad E_i \in L^\infty(\Omega), \quad i = 1, 2 \quad \text{Elastizitätskoeffizienten,}$$

$$(3.6c) \quad V_i \in L^\infty(\Omega), \quad i = 1, 2 \quad \text{Viskositäten,}$$

$$(3.6d) \quad E_{12} \in L^\infty(\Omega) \quad \text{Kopplungskoeffizient,}$$

Funktionenräume:

$$(3.7a) \quad V := W^{1,2}(\Omega),$$

$$(3.7b) \quad V_0 := W_0^{1,2}(\Omega),$$

$$(3.7c) \quad H := L^2(\Omega),$$

$$(3.7d) \quad \mathcal{V} := L^2(S; V),$$

$$(3.7e) \quad \mathcal{V}_0 := L^2(S; V_0),$$

$$(3.7f) \quad \mathcal{H} := L^2(S; H),$$

Daten:

$$(3.8) \quad \mathbf{f} \in \mathcal{H}^2 := \mathcal{H} \times \mathcal{H}, \quad \mathbf{u}^{(0)} \in V_0^2, \quad \mathbf{u}^{(1)} \in H^2.$$

Definition 3.3. Es gelte das Setting 3.2. Genau dann heißt $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_0^2$ schwache Lösung der Aufgabe (3.4), wenn $\partial_t \mathbf{u} \in \mathcal{V}_0^2$ und für alle $\varphi \in \mathcal{V}_0^2$ mit $\partial_t \varphi \in \mathcal{H}^2$ und $\varphi(T) = \mathbf{0}$,

$$(3.9) \quad - \int_S \int_\Omega \left(\rho(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \partial_t \mathbf{u}(t, x) \right) \cdot \partial_t \varphi(t, x) \, dx \, dt + \int_S \int_\Omega \mathbf{P} \mathbf{u}(t, x) \cdot \partial_x \varphi(t, x) \, dx \, dt \\ = \int_S \int_\Omega \rho(x) \mathbf{f} \cdot \varphi(t, x) \, dx \, dt + \int_\Omega \left(\rho(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}^{(1)}(x) \right) \cdot \varphi(0, x) \, dx$$

sowie $\mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}^{(0)}(x)$ gelten.⁴

Satz 3.4. Seien die Voraussetzungen der Definition 3.3 erfüllt und mögen positive Konstanten $E_{0,i}$, $V_{0,i}$, ρ_0 , $i = 1, 2$ existieren, so dass

$$(3.10) \quad E_i(x) \geq E_{0,i}, \quad V_i(x) \geq V_{0,i}, \quad \rho(x) \geq \rho_0$$

⁴Vgl. (Zeidler, 1990b, §24, S. 453)

für fast alle $x \in \Omega$ gelten. Dann existiert eine eindeutige schwache Lösung $\mathbf{u} \in \mathcal{V}^2$ mit $\mathbf{u} \in [C(S, V_0)]^2$ und $\partial_t \mathbf{u} \in [L^2(S, V_0)]^2$ der Aufgabe (3.4). Zudem ist die Abbildung

$$(3.11) \quad \mathcal{S} : \left(\mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{f} \right) \rightarrow (\mathbf{u}, \partial_t \mathbf{u})$$

mit

$$(3.12) \quad \mathcal{S} : V^2 \times H^2 \times \mathcal{H}^2 \rightarrow [L^\infty(S, V_0)]^2 \times [L^2(S, V_0)]^2$$

linear und stetig. Insbesondere existiert eine von $\mathbf{u}, \mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{u}^{(1)}$ und \mathbf{f} unabhängige Konstante C mit

$$(3.13) \quad \|\mathbf{u}\|_{[L^\infty(S, V_0)]^2} + \|\partial_t \mathbf{u}\|_{[L^2(S, V_0)]^2} \leq C \left(\|\mathbf{u}^{(0)}\|_{V_0^2} + \|\mathbf{u}^{(1)}\|_{H^2} + \|\mathbf{f}\|_{\mathcal{H}^2} \right).$$

Zusatz: Wenn die Bedingung für die strikte Konvexität der freie Energie erfüllt ist, dass heißt, es gilt für fast alle $x \in \Omega$

$$(3.14) \quad E_{12}^2 < E_1 E_2,$$

dann ist die Konstante C in (3.13) unabhängig vom Zeitintervall S .

Beweis: Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des instationären Problems 3.4 wird im Folgenden mithilfe des Galerkin-Verfahrens bewiesen, vergleiche auch Gajewski et al. (1974) u.a.

1. Schritt Existenz der Galerkin-Lösung:

Es sei $(w_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Galerkin-Basis in dem separablem Banachraum V_0 und $(V_{0,n})_{n \in \mathbb{N}}$ mit $V_{0,n} := \text{span}\{w_1, \dots, w_n\}$ das zugehörige Galerkin-Schema. Weiter seien $(\mathbf{u}^{[n],(0)})_{n \in \mathbb{N}}, (\mathbf{u}^{[n],(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in $[V_{0,n}]^2$ mit den Eigenschaften

$$(3.15a) \quad \mathbf{u}^{[n],(0)}, \mathbf{u}^{[n],(1)} \in [V_{0,n}]^2 \quad \text{für alle } n \text{ in } \mathbb{N},$$

$$(3.15b) \quad \mathbf{u}^{[n],(0)} \rightarrow \mathbf{u}^{(0)} \quad \text{in } V_0^2 \text{ für } n \rightarrow \infty,$$

$$(3.15c) \quad \mathbf{u}^{[n],(1)} \rightarrow \mathbf{u}^{(1)} \quad \text{in } H^2 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Das Galerkin-Verfahren projiziert zu jedem Zeitpunkt t die Lösung $\mathbf{u}(t, \cdot) \in V^2$ auf $\mathbf{u}^{[n]}(t, \cdot) \in [V_{0,n}]^2$, dass heißt auf den endlichen-dimensionalen Teilraum $[V_{0,n}]^2$. Jedes Element $\mathbf{u}^{[n]} \in [L^2(S; V_{0,n})]^2$ läßt sich bezüglich der Galerkin-Basis von $V_{0,n}$ folgendermaßen darstellen

$$(3.16) \quad \mathbf{u}^{[n]}(t) = \sum_{j=1}^n \mathbf{g}_j^{[n]}(t) w_j, \quad \forall t \in S \text{ mit } \mathbf{g}_j^{[n]}(t) = \begin{pmatrix} g_{j,1}^{[n]}(t) \\ g_{j,2}^{[n]}(t) \end{pmatrix},$$

wobei $g_{j,i}^{[n]}(t) : S \rightarrow \mathbb{R}$ zu bestimmende Koeffizientenfunktionen sind. Wegen $\mathbf{u}^{[n],(0)}, \mathbf{u}^{[n],(1)} \in [V_n]^2$ existieren Darstellungen

$$(3.17) \quad \mathbf{u}^{[n],(0)} = \sum_{j=1}^n \boldsymbol{\alpha}_j^{[n]} w_j \quad \mathbf{u}^{[n],(1)} = \sum_{j=1}^n \boldsymbol{\beta}_j^{[n]} w_j,$$

mit

$$(3.18) \quad \boldsymbol{\alpha}_j^{[n]} = \begin{pmatrix} \alpha_{j,1}^{[n]} \\ \alpha_{j,2}^{[n]} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\beta}_j^{[n]} = \begin{pmatrix} \beta_{j,1}^{[n]} \\ \beta_{j,2}^{[n]} \end{pmatrix}.$$

Aufgrund der Singularität der Matrix vor dem $\partial_{tt}\mathbf{u}^{[n]}$ -Term verwenden wir für die Galerkin-Formulierung der Aufgabe (3.4) eine Regularisierung:

Finde ein $\mathbf{u}^{[n]} \in [L^2(S, V_{0,n})]^2$, so dass für alle $\varphi \in V_{0,n}^2$ fast überall in S gilt:

$$(3.19a) \quad \int_{\Omega} \left(\rho(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 - \frac{1}{n} \\ 1 - \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix} \partial_{tt}\mathbf{u}^{[n]}(t, x) \right) \cdot \varphi \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{P}\mathbf{u}^{[n]}(t, x) \cdot \partial_x \varphi \, dx \\ = \int_{\Omega} \rho(x) \mathbf{f} \cdot \varphi \, dx,$$

$$(3.19b) \quad \mathbf{u}^{[n]}(0, x) = \mathbf{u}^{[n],(0)}(x), \quad \partial_t \mathbf{u}^{[n]}(0, x) = \mathbf{u}^{[n],(1)}(x)$$

lautet. Wir testen die Galerkin-Gleichung mit $\varphi = (w_j, w_j)^T$, $j = 1, \dots, n$ und erhalten

$$(3.20) \quad \int_{\Omega} \left(\rho(x) \partial_{tt} \begin{pmatrix} 1 & 1 - \frac{1}{n} \\ 1 - \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}^{[n]}(t, x) \right) \cdot \begin{pmatrix} w_j \\ w_j \end{pmatrix} \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{P}\mathbf{u}^{[n]}(t, x) \cdot \partial_x \begin{pmatrix} w_j \\ w_j \end{pmatrix} \, dx \\ = \int_{\Omega} \rho(x) \mathbf{f} \cdot \begin{pmatrix} w_j \\ w_j \end{pmatrix} \, dx.$$

Man setze die Basisdarstellung in (3.20) ein und beachte die Umformungen für den ersten Term der linken Seite

$$(3.21) \quad \left(\int_{\Omega} \left(\rho(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 - \frac{1}{n} \\ 1 - \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{tt} \sum_{k=1}^n g_{k,1}^{[n]} w_k \\ \partial_{tt} \sum_{k=1}^n g_{k,2}^{[n]} w_k \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} w_j \\ w_j \end{pmatrix} \, dx \right)_{j=1, \dots, n} \\ = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 - \frac{1}{n} \\ 1 - \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \partial_{tt} g_{k,1}^{[n]} \int_{\Omega} \rho(x) w_k w_j \, dx \\ \sum_{k=1}^n \partial_{tt} g_{k,2}^{[n]} \int_{\Omega} \rho(x) w_k w_j \, dx \end{pmatrix} \right)_{j=1, \dots, n}.$$

Mit den Bezeichnungen

$$(3.22) \quad (\mathbf{G}^{\rho})_{jk} := \left(\int_{\Omega} \rho(x) w_k w_j \, dx \right)_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, n,$$

$$(3.23) \quad \vec{g}_i := \begin{pmatrix} g_{1,i}^{[n]} \\ \vdots \\ g_{n,i}^{[n]} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \quad \vec{g} := \begin{pmatrix} \vec{g}_1 \\ \vec{g}_2 \end{pmatrix},$$

erhält man mit

$$(3.24) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_n - \frac{1}{n} \mathbf{I}_n & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{G}^{\rho} \partial_{tt} \vec{g}_1 \\ \mathbf{G}^{\rho} \partial_{tt} \vec{g}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{G}^{\rho} & \mathbf{G}^{\rho} - \frac{1}{n} \mathbf{G}^{\rho} \\ \mathbf{G}^{\rho} - \frac{1}{n} \mathbf{G}^{\rho} & \mathbf{G}^{\rho} \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{G}^{reg}} \partial_{tt} \vec{g}$$

eine kompakte Darstellung von (3.21). Analog gilt für den zweiten Term der linken Seite

$$\begin{aligned}
(3.25) \quad & \left(\int_{\Omega} \left(\mathbf{P} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n g_{k,1}^{[n]} w_k \\ \sum_{k=1}^n g_{k,2}^{[n]} w_k \end{pmatrix} \right) \cdot \partial_x \begin{pmatrix} w_j \\ w_j \end{pmatrix} dx \right)_{j=1,\dots,n} \\
&= \left(\int_{\Omega} \left(\mathbf{E} \partial_x \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n g_{k,1}^{[n]} w_k \\ \sum_{k=1}^n g_{k,2}^{[n]} w_k \end{pmatrix} + \mathbf{V} \partial_{tx} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n g_{k,1}^{[n]} w_k \\ \sum_{k=1}^n g_{k,2}^{[n]} w_k \end{pmatrix} \right) \cdot \partial_x \begin{pmatrix} w_j \\ w_j \end{pmatrix} dx \right)_{j=1,\dots,n} \\
&= \left(\int_{\Omega} \mathbf{E} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n g_{k,1}^{[n]} \partial_x w_k \partial_x w_j \\ \sum_{k=1}^n g_{k,2}^{[n]} \partial_x w_k \partial_x w_j \end{pmatrix} + \mathbf{V} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \partial_t g_{k,1}^{[n]} \partial_x w_k \partial_x w_j \\ \sum_{k=1}^n \partial_t g_{k,2}^{[n]} \partial_x w_k \partial_x w_j \end{pmatrix} dx \right)_{j=1,\dots,n}.
\end{aligned}$$

Mit

$$(3.26) \quad (\mathbf{G}^{E_i})_{jk} := \left(\int_{\Omega} E_i(x) \partial_x w_k \partial_x w_j dx \right)_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, n, \quad i = 1, 2,$$

$$(3.27) \quad (\mathbf{G}^{E_{12}})_{jk} := \left(\int_{\Omega} E_{12}(x) \partial_x w_k \partial_x w_j dx \right)_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, n,$$

$$(3.28) \quad (\mathbf{G}^{V_i})_{jk} := \left(\int_{\Omega} V_i(x) \partial_x w_k \partial_x w_j dx \right)_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, n, \quad i = 1, 2$$

lautet die kompakte Darstellung von (3.25)

$$(3.29) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{G}^{E_1} & \mathbf{G}^{E_{12}} \\ \mathbf{G}^{E_{12}} & \mathbf{G}^{E_2} \end{pmatrix} \vec{g} + \begin{pmatrix} \mathbf{G}^{V_1} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{G}^{V_2} \end{pmatrix} \partial_t \vec{g}.$$

Wir setzen

$$(3.30) \quad \mathbf{F} := \begin{pmatrix} \int_{\Omega} f_V w_1 dx \\ \vdots \\ \int_{\Omega} f_V w_n dx \\ \int_{\Omega} f_V w_1 dx \\ \vdots \\ \int_{\Omega} f_V w_n dx \end{pmatrix}.$$

(3.17), (3.17) werden zu

$$(3.31) \quad \vec{g}(0) = \vec{\alpha}, \quad \partial_t \vec{g}(0) = \vec{\beta},$$

mit

$$(3.32) \quad \vec{\alpha} := \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vec{\alpha}_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}^{[n]} \\ \vdots \\ \alpha_{n,1}^{[n]} \\ \alpha_{1,2}^{[n]} \\ \vdots \\ \alpha_{n,2}^{[n]} \end{pmatrix}.$$

Eine analoge Darstellung gilt für $\vec{\beta}$. Somit ist (3.19) äquivalent zur Aufgabe:

Gesucht sind Funktionen $g_{k,i}^{[n]}$, $i = 1, 2$, $k = 1, \dots, n$, so dass das gewöhnliche Differentialgleichungssystem

$$(3.33a) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{G}^\rho & \mathbf{G}^\rho - \frac{1}{n}\mathbf{G}^\rho \\ \mathbf{G}^\rho - \frac{1}{n}\mathbf{G}^\rho & \mathbf{G}^\rho \end{pmatrix} \partial_{tt}\vec{g} + \begin{pmatrix} \mathbf{G}^{E_1} & \mathbf{G}^{E_{12}} \\ \mathbf{G}^{E_{12}} & \mathbf{G}^{E_2} \end{pmatrix} \vec{g} + \begin{pmatrix} \mathbf{G}^{V_1} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{G}^{V_2} \end{pmatrix} \partial_t \vec{g} = \mathbf{F}$$

mit den Anfangswerten

$$(3.33b) \quad \vec{g}(0) = \vec{\alpha}, \quad \partial_t \vec{g}(0) = \vec{\beta}$$

erfüllt ist.

Mit der Substitution $\vec{h} := \partial_t \vec{g}$ erhalten wir das äquivalente System erster Ordnung

$$(3.34a) \quad \partial_t \vec{g} = \vec{h}$$

$$(3.34b) \quad \partial_t \vec{h} = -(\mathbf{G}^{reg})^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{G}^{E_1} & \mathbf{G}^{E_{12}} \\ \mathbf{G}^{E_{12}} & \mathbf{G}^{E_2} \end{pmatrix} \vec{g} - (\mathbf{G}^{reg})^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{G}^{V_1} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{G}^{V_2} \end{pmatrix} \vec{h} + (\mathbf{G}^{reg})^{-1} \mathbf{F}$$

mit den Anfangswerten

$$(3.34c) \quad \vec{g}(0) = \vec{\alpha}, \quad \vec{h}(0) = \vec{\beta}.$$

Da die Koeffizienten und die rechte Seite nicht stetig sind, wenden wir eine Folgerung des Satzes von Carathéodory ((Roubíček, 2005, Theorem 1.45, S. 25)) an.

Dazu sei $\mathcal{C}_n : [0, T] \times \mathbb{R}^{4n} \rightarrow \mathbb{R}^{4n}$ definiert durch

$$(3.35) \quad \mathcal{C}_n(t, y) := \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2n} & \mathbf{I}_{2n} \\ -(\mathbf{G}^{reg})^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{G}^{E_1} & \mathbf{G}^{E_{12}} \\ \mathbf{G}^{E_{12}} & \mathbf{G}^{E_2} \end{pmatrix} & -(\mathbf{G}^{reg})^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{G}^{V_1} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{G}^{V_2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{A}} y(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 2n} \\ (\mathbf{G}^{reg})^{-1} \mathbf{F} \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{B}}.$$

Zu zeigen ist: \mathcal{C}_n ist eine Carathéodory-Funktion der Art, dass $t \rightarrow \mathcal{C}_n(t, y)$ Lebesgue-messbar für alle y ist, $y \rightarrow \mathcal{C}_n(t, y)$ Lipschitz-stetig für fast alle t ist und es eine nichtnegative Funktion

$\varphi \in L^1(0, T)$ und $C > 0$ gibt mit $|\mathcal{C}_n(t, y)| \leq \varphi(t) + C|y|$.

Zur Messbarkeit bezüglich t :

f_V ist als Abbildung $S \rightarrow H$ Bochner-messbar. Daher gilt aufgrund des Satzes von Pettis, dass die Abbildung $t \rightarrow \int_{\Omega} f_V \varphi dx$ für alle $\varphi \in H^*$ Lebesgue-messbar ist. Weiter liegt H^* dicht in V^* , da H dicht in V liegt und V reflexiv ist (vgl. (Wloka, 1982, §3 und §17)). Damit ist $t \rightarrow \mathbf{F}(t)$ Lebesgue-messbar und somit auch Ξ . Insgesamt also ist $t \rightarrow \mathcal{C}_n(t, y)$ auf $[0, T]$ für alle $y \in \mathbb{R}^{4n}$ Lebesgue-messbar.

Zur (Lipschitz-)Stetigkeit von $y \rightarrow \mathcal{C}_n(t, y)$ für fast alle t :

Für festes $t \in [0, T]$ folgt die Stetigkeit aus der Stetigkeit von \mathcal{A} und der Linearität von $(\mathbf{G}^{reg})^{-1}$.

$$\begin{aligned}
|\mathcal{C}(t, y) - \mathcal{C}(t, \bar{y})| &= |\mathcal{A}y + \Xi(t) - \mathcal{A}\bar{y} - \Xi(t)| \\
&= |\mathcal{A}y - \mathcal{A}\bar{y}| \\
&= |\mathcal{A}(y - \bar{y})| \\
(3.36) \quad &\leq \underbrace{\|\mathcal{A}\|}_{=:C} |y - \bar{y}| \\
&\leq C|y - \bar{y}|
\end{aligned}$$

Zur Majorantenbedingung:

Es gilt

$$\begin{aligned}
|\mathcal{C}(t, y)| &= |\mathcal{A}y + \Xi(t)| \\
&\leq \underbrace{\|\mathcal{A}\|}_{=:C} |y| + |\Xi(t)| \\
(3.37) \quad &=: C|y| =: s(y) \\
&\leq s(y) + \|(\mathbf{G}^{reg})^{-1}\| \max_i \|\mathbf{w}_i\|_{H_n} 2n \|f_V(t, \cdot)\|_H \\
&=: s(y) + \varphi(t)
\end{aligned}$$

mit $s \in C(\mathbb{R}^{4n}, \mathbb{R}^{4n})$ und $\varphi \in L^1(]0, T[)$, da $f_V \in L^2(\Omega)$ und aufgrund der Eigenschaft des Bochner-Integrals $t \rightarrow \|f_V(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \in L^2(]0, T[) \subset L^1(]0, T[)$.

Eine Folgerung aus dem Satz von Carathéodory ((Roubíček, 2005, Theorem 1.45, S. 25)) sichert, dass das DGL-System (3.34) eine absolut stetige, fast überall differenzierbare Lösung $y_n : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{4n}$ besitzt und $\mathbf{u}^{[n]} \in AC^1([0, T]; V_n)$ gilt.⁵

2. Schritt A-Priori-Abschätzung:

Wir betrachten eine *regularisierte Form der Galerkin-Gleichung* (3.19)

$$\begin{aligned}
(3.38) \quad &\int_{\Omega} \rho(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 - \frac{1}{n} \\ 1 - \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix} \partial_{tt} \mathbf{u}^{[n]} \cdot \begin{pmatrix} w_j \\ w_j \end{pmatrix} dx + \int_{\Omega} \mathbf{P} \mathbf{u}^{[n]} \cdot \partial_x \begin{pmatrix} w_j \\ w_j \end{pmatrix} dx \\
&= \int_{\Omega} \rho(x) \begin{pmatrix} f_V \\ f_V \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_j \\ w_j \end{pmatrix} dx, \quad j = 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

⁵Dabei bezeichnet $AC^1([0, T]; V_n)$ den Raum der absolut stetigen, fast überall einmal differenzierbaren Funktionen auf $[0, T]$ mit Werten in V_n .

Komponentenweise Multiplikation mit $(\partial_t g_{j,1}^{[n]}, \partial_t g_{j,2}^{[n]})^T$ und Summation über $j = 1, \dots, n$ liefern

$$(3.39) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 - \frac{1}{n} \\ 1 - \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix} \partial_{tt} \mathbf{u}^{[n]} \cdot \partial_t \mathbf{u}^{[n]} dx + \int_{\Omega} \mathbf{P} \mathbf{u}^{[n]} \cdot \partial_t \partial_x \mathbf{u}^{[n]} dx \\ &= \int_{\Omega} \rho(x) \begin{pmatrix} f_V \\ f_V \end{pmatrix} \cdot \partial_t \mathbf{u}^{[n]} dx. \end{aligned}$$

Integration über $S_{\tau} := (0, \tau) \subseteq S$ mit $0 < \tau \leq T$ und Addition beider Gleichungen ergeben

$$(3.40) \quad \begin{aligned} & \int_{S_{\tau}} \int_{\Omega} \rho(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 - \frac{1}{n} \\ 1 - \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix} \partial_{tt} \mathbf{u}^{[n]} \cdot \partial_t \mathbf{u}^{[n]} dx dt + \int_{S_{\tau}} \int_{\Omega} \mathbf{P} \mathbf{u}^{[n]} \cdot \partial_t \partial_x \mathbf{u}^{[n]} dx dt \\ &= \int_{S_{\tau}} \int_{\Omega} \rho(x) \begin{pmatrix} f_V \\ f_V \end{pmatrix} \cdot \partial_t \mathbf{u}^{[n]} dx dt. \end{aligned}$$

Um eine für das Weitere geeignete A-Priori-Abschätzung zu erhalten, betrachten wir jeden Term für sich. Für den ersten Term der linken Seite gilt

$$(3.41) \quad \begin{aligned} & \int_{S_{\tau}} \int_{\Omega} \rho(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 - \frac{1}{n} \\ 1 - \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix} \partial_{tt} \mathbf{u}^{[n]} \cdot \partial_t \mathbf{u}^{[n]} dx dt \\ &= \int_{S_{\tau}} \int_{\Omega} \rho(x) \left[\partial_{tt} u_1^{[n]} \partial_t u_1^{[n]} + \partial_{tt} u_2^{[n]} \partial_t u_2^{[n]} \right] dx dt \\ &\quad + \int_{S_{\tau}} \int_{\Omega} \rho(x) \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left[\partial_{tt} u_1^{[n]} \partial_t u_2^{[n]} + \partial_{tt} u_2^{[n]} \partial_t u_1^{[n]} \right] dx dt \\ &= \int_{S_{\tau}} \int_{\Omega} \frac{\rho(x)}{2} \partial_t \left[\left(\partial_t u_1^{[n]} \right)^2 + \left(\partial_t u_2^{[n]} \right)^2 \right] dx dt \\ &\quad + \int_{S_{\tau}} \int_{\Omega} \rho(x) \left(1 - \frac{1}{n} \right) \partial_{tt} u_1^{[n]} \partial_t u_2^{[n]} dx dt \\ &\quad + \int_{\Omega} \rho(x) \left(1 - \frac{1}{n} \right) \partial_{\tau} u_1^{[n]} \partial_{\tau} u_2^{[n]} dx \Big|_{t=0}^{t=\tau} \\ &\quad - \int_{S_{\tau}} \int_{\Omega} \rho(x) \left(1 - \frac{1}{n} \right) \partial_{tt} u_1^{[n]} \partial_t u_2^{[n]} dx dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\|\partial_{\tau} u_1^{[n]}\|_{\rho, L^2}^2 + \|\partial_{\tau} u_2^{[n]}\|_{\rho, L^2}^2 - \|\partial_{\tau} u_1^{[n]}(0, x)\|_{\rho, L^2}^2 - \|\partial_{\tau} u_2^{[n]}(0, x)\|_{\rho, L^2}^2 \right) \\ &\quad + \int_{\Omega} \rho(x) \left(1 - \frac{1}{n} \right) \partial_{\tau} u_1^{[n]}(\tau, x) \partial_{\tau} u_2^{[n]}(\tau, x) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \rho(x) \left(1 - \frac{1}{n} \right) \partial_{\tau} u_1^{[n]}(0, x) \partial_{\tau} u_2^{[n]}(0, x) dx. \end{aligned}$$

Für den zweiten Term der linken Seite erhält man

$$\begin{aligned}
(3.42) \quad & \int_{\tilde{S}_\tau} \int_{\Omega} \mathbf{P} \mathbf{u}^{[n]} : \partial_{tx} \mathbf{u}^{[n]} \, dx dt \\
&= \int_{\tilde{S}_\tau} \int_{\Omega} \mathbf{E} \partial_x \mathbf{u}^{[n]} : \partial_{tx} \mathbf{u}^{[n]} + \mathbf{V} \partial_{tx} \mathbf{u}^{[n]} : \partial_{tx} \mathbf{u}^{[n]} \, dx dt \\
&= \int_{\tilde{S}_\tau} \int_{\Omega} E_1(x) \partial_x u_1^{[n]} \partial_{tx} u_1^{[n]} + E_2(x) \partial_x u_2^{[n]} \partial_{tx} u_2^{[n]} \, dx dt \\
&\quad + \int_{\tilde{S}_\tau} \int_{\Omega} E_{12}(x) \left(\partial_x u_1^{[n]} \partial_{tx} u_2^{[n]} + \partial_x u_2^{[n]} \partial_{tx} u_1^{[n]} \right) \, dx dt \\
&\quad + \int_{\tilde{S}_\tau} \int_{\Omega} V_1(x) \left(\partial_{tx} u_1^{[n]} \right)^2 + V_2(x) \left(\partial_{tx} u_2^{[n]} \right)^2 \, dx dt \\
&= \frac{1}{2} \left(\|\partial_x u_1^{[n]}\|_{E_1, L^2}^2 + \|\partial_x u_2^{[n]}\|_{E_2, L^2}^2 - \|\partial_x u_1^{[n]}(0, x)\|_{E_1, L^2}^2 - \|\partial_x u_2^{[n]}(0, x)\|_{E_2, L^2}^2 \right) \\
&\quad + \int_{\tilde{S}_\tau} \int_{\Omega} E_{12}(x) \left(\partial_x u_1^{[n]} \partial_{tx} u_2^{[n]} + \partial_x u_2^{[n]} \partial_{tx} u_1^{[n]} \right) \, dx dt \\
&\quad + \int_{\tilde{S}_\tau} \int_{\Omega} V_1(x) \left(\partial_{tx} u_1^{[n]} \right)^2 + V_2(x) \left(\partial_{tx} u_2^{[n]} \right)^2 \, dx dt.
\end{aligned}$$

Die Addition von (3.41) und (3.42) ergibt

$$\begin{aligned}
(3.43) \quad & \frac{1}{2} \left(\|\partial_\tau u_1^{[n]}\|_{\rho, L^2}^2 + \|\partial_\tau u_2^{[n]}\|_{\rho, L^2}^2 \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\|\partial_x u_1^{[n]}\|_{E_1, L^2}^2 + \|\partial_x u_2^{[n]}\|_{E_2, L^2}^2 \right) \\
&\quad + \int_{\tilde{S}_\tau} \int_{\Omega} V_1(x) \left(\partial_{tx} u_1^{[n]} \right)^2 + V_2(x) \left(\partial_{tx} u_2^{[n]} \right)^2 \, dx dt \\
&= \int_{\tilde{S}_\tau} \int_{\Omega} \rho(x) \begin{pmatrix} f_V \\ f_V \end{pmatrix} : \partial_t \mathbf{u}^{[n]} \, dx dt \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\|\partial_\tau u_1^{[n]}(0, x)\|_{\rho, L^2}^2 + \|\partial_\tau u_2^{[n]}(0, x)\|_{\rho, L^2}^2 \right) \\
&\quad + \int_{\Omega} \rho(x) \left(1 - \frac{1}{n} \right) \partial_\tau u_1^{[n]}(0, x) \partial_\tau u_2^{[n]}(0, x) \, dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\|\partial_x u_1^{[n]}(0, x)\|_{E_1, L^2}^2 + \|\partial_x u_2^{[n]}(0, x)\|_{E_2, L^2}^2 \right) \\
&\quad - \int_{\Omega} \rho(x) \left(1 - \frac{1}{n} \right) \partial_\tau u_1^{[n]}(\tau, x) \partial_\tau u_2^{[n]}(\tau, x) \, dx \\
&\quad - \int_{\tilde{S}_\tau} \int_{\Omega} E_{12}(x) \left(\partial_x u_1^{[n]} \partial_{tx} u_2^{[n]} + \partial_x u_2^{[n]} \partial_{tx} u_1^{[n]} \right) \, dx dt.
\end{aligned}$$

Um A-Priori-Abschätzungen zu erhalten, betrachten wir beide Seiten der Gleichung zunächst separat. Dabei sind

$$(3.44) \quad k_{E_1, E_2}^*, k_{E_1, E_2}, k_{V_1, V_2}, K_f, K_{\tilde{S}_\tau}^*, K_{12,1}, K_{12,2}, K_{\tilde{S}_\tau, E_{12}}^*, \hat{C}, \tilde{K}_0 > 0$$

festen positive, von n unabhängige Konstanten und

$$(3.45) \quad \varepsilon_f, \varepsilon_{E_1}, \varepsilon_{E_2}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$$

beliebige positive, von n unabhängige Konstanten. Für die linke Seite folgt für die Elastizitätsterme mit der Poincaréschen Ungleichung

$$(3.46) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\|\partial_x u_1^{[n]}\|_{E_1, L^2}^2 + \|\partial_x u_2^{[n]}\|_{E_2, L^2}^2 \right) &\geq k_{E_1, E_2}^* \left(\|\partial_x u_1^{[n]}\|_{L^2}^2 + \|\partial_x u_2^{[n]}\|_{L^2}^2 \right) \\ &\geq k_{E_1, E_2} \|\mathbf{u}^{[n]}\|_{[W^{1,2}]^2}^2 \end{aligned}$$

und für die Viskositätsterme

$$(3.47) \quad \int_{S_\tau} \int_{\Omega} V_1(x) \left(\partial_{tx} u_1^{[n]} \right)^2 + V_2(x) \left(\partial_{tx} u_2^{[n]} \right)^2 dx dt \geq k_{V_1, V_2} \int_{S_\tau} \|\partial_t \mathbf{u}^{[n]}\|_{[W^{1,2}]^2}^2 dt.$$

Auf der rechten Seite lassen sich die Terme mit der Youngschen Ungleichung und Poincaréschen Ungleichung abschätzen

$$(3.48) \quad \begin{aligned} \int_{S_\tau} \int_{\Omega} \rho(x) \begin{pmatrix} f_V \\ f_V \end{pmatrix} : \partial_t \mathbf{u}^{[n]} dx dt \\ \leq \int_{S_\tau} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{4\varepsilon_{f_1}} + \frac{1}{4\varepsilon_{f_2}} \right) |\rho(x) f_V(t, x)|^2 dx dt + \int_{S_\tau} \int_{\Omega} \varepsilon_{f_1} |\partial_t u_1^{[n]}|^2 + \varepsilon_{f_2} |\partial_t u_2^{[n]}|^2 dx dt \\ \leq \frac{1}{2\varepsilon_f} \int_{S_\tau} \|f_V\|_{\rho, L^2}^2 dt + \varepsilon_f \int_{S_\tau} \|\partial_t \mathbf{u}\|_{[L^2]^2}^2 dt \\ \leq \frac{1}{2\varepsilon_f} \int_{S_\tau} \|f_V\|_{\rho, L^2}^2 dt + \varepsilon_f K_f \int_{S_\tau} \|\partial_t \mathbf{u}\|_{[W^{1,2}]^2}^2 dt. \end{aligned}$$

Für die Anfangsdaten gilt nach Voraussetzung wegen (3.8)

$$(3.49) \quad \begin{aligned} K_0 := \sup_n \left| \frac{1}{2} \left(\|\partial_\tau u_1^{[n]}(0, x)\|_{\rho, L^2}^2 + \|\partial_\tau u_2^{[n]}(0, x)\|_{\rho, L^2}^2 \right) \right. \\ \left. + \int_{\Omega} \rho(x) \left(1 - \frac{1}{n} \right) \partial_\tau u_1^{[n]}(0, x) \partial_\tau u_2^{[n]}(0, x) dx \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\|\partial_x u_1^{[n]}(0, x)\|_{E_1, L^2}^2 + \|\partial_x u_2^{[n]}(0, x)\|_{E_2, L^2}^2 \right) \right| \\ \leq \infty. \end{aligned}$$

Die Terme aus der Regularisierung können mit der Youngschen Ungleichung abgeschätzt werden

$$(3.50) \quad \left| - \int_{\Omega} \rho(x) \left(1 - \frac{1}{n} \right) \partial_\tau u_1^{[n]}(\tau, x) \partial_\tau u_2^{[n]}(\tau, x) dx \right| \leq \frac{1}{2} \left(\|\partial_\tau u_1^{[n]}\|_{\rho, L^2}^2 + \|\partial_\tau u_2^{[n]}\|_{\rho, L^2}^2 \right).$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und der Youngschen Ungleichung erhält man für die

aus der Kopplung stammenden Terme

$$\begin{aligned}
(3.51) \quad & \left| - \int_{S_\tau} \int_{\Omega} E_{12}(x) \left(\partial_x u_1^{[n]} \partial_{tx} u_2^{[n]} + \partial_x u_2^{[n]} \partial_{tx} u_1^{[n]} \right) dx dt \right| \\
& \leq K_{S_\tau}^* \|E_{12}(x)\|_{L^\infty} \int_{S_\tau} \int_{\Omega} \left| \partial_x u_1^{[n]} \partial_{tx} u_2^{[n]} \right| + \left| \partial_x u_2^{[n]} \partial_{tx} u_1^{[n]} \right| dx dt \\
& \leq K_{S_\tau, E_{12}}^* \int_{S_\tau} \int_{\Omega} \frac{1}{4\varepsilon_1} \left| \partial_x u_1^{[n]} \right|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_2} \left| \partial_x u_2^{[n]} \right|^2 + \varepsilon_2 \left| \partial_{tx} u_1^{[n]} \right|^2 + \varepsilon_1 \left| \partial_{tx} u_2^{[n]} \right|^2 dx dt \\
& \leq K_{S_\tau, E_{12}}^* \frac{1}{4\varepsilon_{12}} \int_{S_\tau} \|\mathbf{u}^{[n]}\|_{[W^{1,2}]^2}^2 dt + K_{S_\tau, E_{12}}^* \varepsilon_{12} \int_{S_\tau} \|\partial_t \mathbf{u}^{[n]}\|_{[W^{1,2}]^2}^2 dt \\
& \leq \frac{K_{12,1}}{\varepsilon_{12}} \int_{S_\tau} \|\mathbf{u}^{[n]}\|_{[W^{1,2}]^2}^2 dt + K_{12,2} \varepsilon_{12} \int_{S_\tau} \|\partial_t \mathbf{u}^{[n]}\|_{[W^{1,2}]^2}^2 dt.
\end{aligned}$$

Zusammen folgt aus (3.43) bis (3.51) die Ungleichung

$$\begin{aligned}
(3.52) \quad & \frac{1}{2} \left(\|\partial_\tau u_1^{[n]}\|_{\rho, L^2}^2 + \|\partial_\tau u_2^{[n]}\|_{\rho, L^2}^2 \right) \\
& + k_{E_1, E_2} \|\mathbf{u}^{[n]}\|_{[W^{1,2}]^2}^2 + k_{V_1, V_2} \int_{S_\tau} \|\partial_t \mathbf{u}^{[n]}\|_{[W^{1,2}]^2}^2 dt \\
& \leq \frac{1}{2} \left(\|\partial_\tau u_1^{[n]}\|_{\rho, L^2}^2 + \|\partial_\tau u_2^{[n]}\|_{\rho, L^2}^2 \right) \\
& + \frac{1}{2\varepsilon_f} \int_{S_\tau} \|f_V\|_{\rho, L^2}^2 dt + K_0 \\
& + \varepsilon_f K_f \int_{S_\tau} \|\partial_t \mathbf{u}^{[n]}\|_{[W^{1,2}]^2}^2 dt \\
& + \frac{K_{12,1}}{\varepsilon_{12}} \int_{S_\tau} \|\mathbf{u}^{[n]}\|_{[W^{1,2}]^2}^2 dt + K_{12,2} \varepsilon_{12} \int_{S_\tau} \|\partial_t \mathbf{u}^{[n]}\|_{[W^{1,2}]^2}^2 dt.
\end{aligned}$$

Wähle ε_f und ε_{12} so, dass $k := k_{V_1, V_2} - (\varepsilon_f K_f + K_{12,2} \varepsilon_{12}) > 0$ und erhalte

$$\begin{aligned}
(3.53) \quad & k_{E_1, E_2} \|\mathbf{u}^{[n]}\|_{[W^{1,2}]^2}^2 + k \int_{S_\tau} \|\partial_t \mathbf{u}^{[n]}\|_{[W^{1,2}]^2}^2 dt \\
& \leq \frac{K_{12,1}}{\varepsilon_{12}} \int_{S_\tau} \|\mathbf{u}^{[n]}\|_{[W^{1,2}]^2}^2 dt + \frac{1}{2\varepsilon_f} \int_{S_\tau} \|f_V\|_{\rho, L^2}^2 dt + K_0.
\end{aligned}$$

Hier kann nun die Gronwallsche Ungleichung angewandt werden, so dass mit

$$C := \frac{K_{12,1}}{\varepsilon_{12} k_{E_1, E_2}}$$

die Abschätzung

$$(3.54) \quad \|\mathbf{u}^{[n]}\|_{[W^{1,2}]^2}^2 \leq \left(\frac{1}{2\varepsilon_f} \int_{S_\tau} \|f_V\|_{\rho, L^2}^2 dt + K_0 \right) \exp(\tau \cdot C) =: \tilde{C}(\tau)$$

folgt. Dies liefert

$$(3.55) \quad \|\mathbf{u}^{[n]}\|_{[L^\infty(S,V)]^2}^2 \leq \hat{C} \left(\frac{1}{2\varepsilon_f} \|f_V\|_{\rho, \mathcal{H}}^2 + \tilde{K}_0 \right) \exp(T \cdot C)$$

und damit $\mathbf{u}^{[n]} \in [L^\infty(S, V)]^2$ sowie

$$(3.56) \quad C_1 := \sup_n \|\mathbf{u}^{[n]}\|_{[L^\infty(S,V)]^2} < \infty.$$

Weiter gilt mit (3.53) und (3.54)

$$(3.57) \quad \int_{S_\tau} \|\partial_t \mathbf{u}^{[n]}\|_{[W^{1,2}]^2}^2 dt \leq \frac{K_{12,1}}{\varepsilon_{12}} \int_{S_\tau} \tilde{C}(t) dt + \frac{1}{2\varepsilon_f} \int_{S_\tau} \|f_V\|_{\rho, L^2} dt + K_0 < \tilde{C}^* < \infty$$

und somit $\partial_t \mathbf{u}^{[n]} \in [L^2(S, V)]^2$ sowie

$$(3.58) \quad C_2 := \sup_n \|\partial_t \mathbf{u}^{[n]}\|_{[L^2(S,V)]^2} < \infty.$$

3. Schritt Grenzübergang $n \rightarrow \infty$:

Die Abschätzung (3.56) für $\mathbf{u}^{[n]}$ sowie (3.58) für $\partial_t \mathbf{u}^{[n]}$ liefern die Existenz schwach* (schwach konvergenter Teilfolgen $\mathbf{u}^{[n_k]}$ und $\partial_t \mathbf{u}^{[n_k]}$ mit

$$(3.59) \quad \mathbf{u}^{[n_k]} \xrightarrow{w^*} \mathbf{u} \quad \text{in } [L^\infty(S, V_0)]^2$$

$$(3.60) \quad \partial_t \mathbf{u}^{[n_k]} \xrightarrow{w} \partial_t \mathbf{u} \quad \text{in } [L^2(S, V_0)]^2$$

für $n_k \rightarrow \infty$. Wir multiplizieren (3.20) mit beliebiger Funktion $\varphi \in [C^1(S)]^2$ mit $\varphi(T) = \mathbf{0}$ und erhalten

$$(3.61) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\rho(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 - \frac{1}{n_k} \\ 1 - \frac{1}{n_k} & 1 \end{pmatrix} \partial_{tt} \mathbf{u}^{[n_k]}(t, x) \right) \cdot \varphi \cdot \begin{pmatrix} w_j \\ w_j \end{pmatrix} dx + \int_{\Omega} \mathbf{P} \mathbf{u}^{[n_k]}(t, x) \cdot \varphi \cdot \partial_x \begin{pmatrix} w_j \\ w_j \end{pmatrix} dx \\ & = \int_{\Omega} \rho(x) \mathbf{f} \cdot \varphi \cdot \begin{pmatrix} w_j \\ w_j \end{pmatrix} dx. \end{aligned}$$

Man integriert über S und anschließend partiell im ersten Integral, so dass

$$(3.62) \quad \begin{aligned} & - \int_S \int_{\Omega} \left(\rho(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 - \frac{1}{n_k} \\ 1 - \frac{1}{n_k} & 1 \end{pmatrix} \partial_t \mathbf{u}^{[n_k]}(t, x) \right) \cdot \partial_t \varphi(t) \cdot \begin{pmatrix} w_j \\ w_j \end{pmatrix} dx dt \\ & + \int_S \int_{\Omega} \mathbf{P} \mathbf{u}^{[n_k]}(t, x) \cdot \varphi(t) \cdot \partial_x \begin{pmatrix} w_j \\ w_j \end{pmatrix} dx dt \\ & = \int_S \int_{\Omega} \rho(x) \mathbf{f}(t, x) \cdot \varphi(t) \cdot \begin{pmatrix} w_j \\ w_j \end{pmatrix} dx dt + \int_{\Omega} \rho(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 - \frac{1}{n_k} \\ 1 - \frac{1}{n_k} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}^{[n_k],(1)}(x) \cdot \varphi(0) \cdot \begin{pmatrix} w_j \\ w_j \end{pmatrix} dx. \end{aligned}$$

Der Grenzübergang für $n_k \rightarrow \infty$ in (3.62) ist erlaubt und liefert

$$(3.63) \quad \begin{aligned} & - \int_S \int_{\Omega} \left(\rho(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \partial_t \mathbf{u}(t, x) \right) \cdot \partial_t \varphi(t) \cdot \begin{pmatrix} w_j \\ w_j \end{pmatrix} dx dt + \int_S \int_{\Omega} \mathbf{P} \mathbf{u}(t, x) \cdot \varphi(t) \cdot \partial_x \begin{pmatrix} w_j \\ w_j \end{pmatrix} dx dt \\ & = \int_S \int_{\Omega} \rho(x) \mathbf{f}(t, x) \cdot \varphi(t) \cdot \begin{pmatrix} w_j \\ w_j \end{pmatrix} dx dt + \int_{\Omega} \rho(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}^{(1)}(x) \cdot \varphi(0) \cdot \begin{pmatrix} w_j \\ w_j \end{pmatrix} dx. \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$(3.64) \quad \mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}^{(0)}(x).$$

Hierfür betrachte für alle $j \in \{1, \dots, n\}$

$$(3.65) \quad \begin{aligned} & \int_S \int_{\Omega} \rho(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 - \frac{1}{n_k} \\ 1 - \frac{1}{n_k} & 1 \end{pmatrix} \partial_t \mathbf{u}^{[n_k]}(t, x) \cdot \boldsymbol{\varphi}(t) \cdot \begin{pmatrix} w_j \\ w_j \end{pmatrix} dx dt \\ &= - \int_S \int_{\Omega} \rho(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 - \frac{1}{n_k} \\ 1 - \frac{1}{n_k} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}^{[n_k]}(t, x) \cdot \partial_t \boldsymbol{\varphi}(t) \cdot \begin{pmatrix} w_j \\ w_j \end{pmatrix} dx dt \\ &+ \int_{\Omega} \rho(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 - \frac{1}{n_k} \\ 1 - \frac{1}{n_k} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}^{[n_k]}(\tau, x) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\tau) \cdot \begin{pmatrix} w_j \\ w_j \end{pmatrix} dx \Bigg|_{\tau=0}^{\tau=T} \\ &= - \int_S \int_{\Omega} \rho(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 - \frac{1}{n_k} \\ 1 - \frac{1}{n_k} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}^{[n_k]}(t, x) \cdot \partial_t \boldsymbol{\varphi}(t) \cdot \begin{pmatrix} w_j \\ w_j \end{pmatrix} dx dt \\ &- \int_{\Omega} \rho(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 - \frac{1}{n_k} \\ 1 - \frac{1}{n_k} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}^{[n_k],(0)}(x) \cdot \boldsymbol{\varphi}(0) \cdot \begin{pmatrix} w_j \\ w_j \end{pmatrix} dx. \end{aligned}$$

Analog ist

$$(3.66) \quad \begin{aligned} & \int_S \int_{\Omega} \rho(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \partial_t \mathbf{u}(t, x) \cdot \boldsymbol{\varphi}(t) \cdot \begin{pmatrix} w_j \\ w_j \end{pmatrix} dx dt \\ &= - \int_S \int_{\Omega} \rho(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}(t, x) \cdot \partial_t \boldsymbol{\varphi}(t) \cdot \begin{pmatrix} w_j \\ w_j \end{pmatrix} dx dt \\ &- \int_{\Omega} \rho(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}^{(0)}(x) \cdot \boldsymbol{\varphi}(0) \cdot \begin{pmatrix} w_j \\ w_j \end{pmatrix} dx. \end{aligned}$$

In (3.65) ist der schwach*-Grenzübergang für $n_k \rightarrow \infty$ zulässig, so dass folgt

$$(3.67) \quad \int_{\Omega} \begin{pmatrix} 1 & 1 - \frac{1}{n_k} \\ 1 - \frac{1}{n_k} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}^{[n_k],(0)}(x) \cdot \boldsymbol{\varphi}(0) \cdot \begin{pmatrix} w_j \\ w_j \end{pmatrix} dx \rightarrow \int_{\Omega} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}^{(0)}(x) \cdot \boldsymbol{\varphi}(0) \cdot \begin{pmatrix} w_j \\ w_j \end{pmatrix} dx.$$

Mit Dichtheitsargumenten kann nun gefolgert werden, dass

$$(3.68) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 - \frac{1}{n_k} \\ 1 - \frac{1}{n_k} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}^{[n_k],(0)}(x) \xrightarrow{w^*} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}^{(0)}(x)$$

gilt. Da zusätzlich $\mathbf{u}^{[n_k]}(0, x) \xrightarrow{w^*} \mathbf{u}(0, x)$, sowie nach Voraussetzung $\mathbf{u}^{[n_k],(0)}(x) \xrightarrow{w^*} \mathbf{u}^{(0)}(x)$ für n_k gegen ∞ gelten, folgt insgesamt

$$(3.69) \quad \mathbf{u}^{[n_k],(0)}(x) \xrightarrow{w^*} \mathbf{u}(0, x) \quad \text{für } n_k \rightarrow \infty.$$

4. Schritt Eindeutigkeit der Lösung:

Seien \mathbf{v}^1 und \mathbf{v}^2 Lösungen. Sei $\mathbf{v} := \mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^2$. Dann gelten

$$(3.70) \quad \mathbf{v}(0, x) = \mathbf{0}, \quad \partial_t \mathbf{v}(0, x) = 0.$$

Aufgrund der Linearität von \mathbf{P} gilt für alle $\varphi \in \mathcal{V}_0$

$$(3.71) \quad - \int_S \int_{\Omega} \rho(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \partial_t \mathbf{v} : \partial_t \varphi \, dx dt + \int_S \int_{\Omega} (\mathbf{E} \partial_x \mathbf{v} + \mathbf{V} \partial_{tx} \mathbf{v}) : \partial_x \varphi \, dx dt = 0.$$

Sei χ_s die charakteristische Funktion des Intervalls $[0, s]$ mit $0 \leq s \leq T$. Wir setzen

$$(3.72) \quad w_i(t, x) := \int_0^t \chi_s(\tau) v_i(\tau, x) \, d\tau + c_i, \quad i = 1, 2.$$

Die Konstanten c_i seien dabei so gewählt, dass $w_i(T, x) = 0$. Dann gelten

$$(3.73a) \quad w_i(t, x) = 0 \quad \text{für } , s \leq t \leq T,$$

$$(3.73b) \quad w_i \in AC([0, T], V),$$

$$(3.73c) \quad \partial_t w_i(t, x) = \chi_s(t) v_i(t, x), \quad \text{fast überall.}$$

Man testet nun (3.71) mit \mathbf{w} . Dann erhält man mit positiven Konstanten $K_{\mathbf{E}}, c_{\mathbf{V}}$

$$(3.74a) \quad \begin{aligned} & - \int_S \int_{\Omega} \rho(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \partial_t \mathbf{v} : \partial_t \mathbf{w} \, dx dt \\ & = - \int_S \int_{\Omega} \rho(x) (\partial_t v_1 \partial_t w_1 + \partial_t v_2 \partial_t w_1 + \partial_t v_1 \partial_t w_2 + \partial_t v_2 \partial_t w_2) \, dx dt \\ & = - \int_0^s \int_{\Omega} \rho(x) (\partial_t v_1 v_1 + \partial_t v_2 v_1 + \partial_t v_1 v_2 + \partial_t v_2 v_2) \, dx dt \\ & = - \int_0^s \int_{\Omega} \rho(x) (\partial_t v_1 + \partial_t v_2)^2 \, dx dt \\ & \leq 0, \end{aligned}$$

$$(3.74b) \quad \begin{aligned} & \int_S \int_{\Omega} \mathbf{E} \partial_x \mathbf{v} : \partial_x \mathbf{w} \, dx dt \\ & = \int_S \int_{\Omega} E_1 \partial_x v_1 \partial_x w_1 + E_{12} \partial_x v_1 \partial_x w_2 + E_{12} \partial_x v_2 \partial_x w_1 + E_2 \partial_x v_2 \partial_x w_2 \, dx dt \\ & = \int_0^s \int_{\Omega} E_1 \partial_{tx} w_1 \partial_x w_1 + E_{12} \partial_{tx} w_1 \partial_x w_2 + E_{12} \partial_{tx} w_2 \partial_x w_1 + E_2 \partial_{tx} w_2 \partial_x w_2 \, dx dt \\ & = \int_0^s \int_{\Omega} E_1 \partial_t (\partial_x w_1)^2 + E_{12} \partial_t (\partial_x w_1 \partial_x w_2) + E_2 \partial_t (\partial_x w_2)^2 \, dx dt \\ & = \int_{\Omega} E_1 (\partial_x w_1(s, x))^2 + E_{12} (\partial_x w_1(s, x) \partial_x w_2(s, x)) + E_2 (\partial_x w_2(s, x))^2 \, dx dt \\ & \leq K_{\mathbf{E}} \int_0^s \|\mathbf{v}(t, x)\|_{[W^{1,2}]^2}^2 \, dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3.74c) \quad & \int_S \int_{\Omega} \mathbf{V} \partial_{tx} \mathbf{v} : \partial_x \mathbf{w} \, dx dt \\
&= \int_S \int_{\Omega} V_1 \partial_{tx} v_1 \partial_x w_1 + V_2 \partial_{tx} v_2 \partial_x w_2 \, dx dt \\
&= - \int_0^s \int_{\Omega} \frac{1}{2} V_1 \partial_t (\partial_x v_1)^2 + \frac{1}{2} V_2 \partial_t (\partial_x v_2)^2 \, dx dt \\
&\leq -c_{\mathbf{V}} \|\mathbf{v}(t, x)\|_{[W^{1,2}]^2}^2.
\end{aligned}$$

Zusammen folgt also

$$(3.75) \quad \int_0^s \int_{\Omega} \rho(x) (\partial_t v_1 + \partial_t v_2)^2 \, dx dt + c_{\mathbf{V}} \|\mathbf{v}(t, x)\|_{[W^{1,2}]^2}^2 \leq K_{\mathbf{E}} \int_0^s \|\mathbf{v}(t, x)\|_{[W^{1,2}]^2}^2 \, dt$$

und mit der Gronwallschen Ungleichung folgt $\mathbf{v} = 0$ und damit die Eindeutigkeit der Lösung.

Da $\mathbf{u} \in [L^\infty(S, V_0)]^2$ und $\partial_t \mathbf{u} \in [L^2(S, V_0)]^2$ gelten, folgt mit (Showalter, 1991, S.106, Proposition 1.2) $\mathbf{u} \in [C(S, V_0)]^2$.

Zusatz:

Erhalte aus (3.42)

$$\begin{aligned}
(3.76) \quad & \int_{S_\tau} \int_{\Omega} \mathbf{E} \partial_x \mathbf{u}^{[n]} : \partial_{tx} \mathbf{u}^{[n]} + \mathbf{V} \partial_{tx} \mathbf{u}^{[n]} : \partial_{tx} \mathbf{u}^{[n]} \, dx dt \\
&= \int_{S_\tau} \int_{\Omega} E_1(x) \partial_x u_1^{[n]} \partial_{tx} u_1^{[n]} + E_2(x) \partial_x u_2^{[n]} \partial_{tx} u_2^{[n]} + E_{12}(x) \left(\partial_x u_1^{[n]} \partial_{tx} u_2^{[n]} + \partial_x u_2^{[n]} \partial_{tx} u_1^{[n]} \right) \, dx dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega} E_1 (\partial_x u_1^{[n]}(\tau))^2 + E_2 (\partial_x u_2^{[n]}(\tau))^2 + 2E_{12} \partial_x u_1^{[n]}(\tau) \partial_x u_2^{[n]}(\tau) \, dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} E_1 (\partial_x u_1^{[n]}(0))^2 + E_2 (\partial_x u_2^{[n]}(0))^2 + 2E_{12} \partial_x u_1^{[n]}(0) \partial_x u_2^{[n]}(0) \, dx.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Zusatzbedingung (3.14) gilt

$$(3.77) \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega} E_1 (\partial_x u_1^{[n]}(\tau))^2 + E_2 (\partial_x u_2^{[n]}(\tau))^2 + 2E_{12} \partial_x u_1^{[n]}(\tau) \partial_x u_2^{[n]}(\tau) \, dx \geq c_{\mathbf{E}} \|\mathbf{u}^{[n]}\|_{[W^{1,2}]^2}^2.$$

Für $\varepsilon_f > 0$ ergibt sich mit positiven von n unabhängigen Konstanten k_{V_1, V_2}, K_f

$$\begin{aligned}
(3.78) \quad & \frac{1}{2} \left(\|\partial_\tau u_1^{[n]}\|_{\rho, L^2}^2 + \|\partial_\tau u_2^{[n]}\|_{\rho, L^2}^2 \right) \\
&+ c_{\mathbf{E}} \|\mathbf{u}^{[n]}\|_{[W^{1,2}]^2}^2 + k_{V_1, V_2} \int_{S_\tau} \|\partial_t \mathbf{u}^{[n]}\|_{[W^{1,2}]^2}^2 \, dt \\
&\leq \frac{1}{2} \left(\|\partial_\tau u_1^{[n]}\|_{\rho, L^2}^2 + \|\partial_\tau u_2^{[n]}\|_{\rho, L^2}^2 \right) \\
&+ \frac{1}{2\varepsilon_f} \int_{S_\tau} \|f_V\|_{\rho, L^2}^2 \, dt + K_0 \\
&+ \varepsilon_f K_f \int_{S_\tau} \|\partial_t \mathbf{u}^{[n]}\|_{[W^{1,2}]^2}^2 \, dt.
\end{aligned}$$

Analog dem Vorgehen in Schritt 2 und 3 erhalte so die Abschätzung

$$(3.79) \quad \|\mathbf{u}\|_{[L^\infty(S;V_0)]^2} + \|\partial_t \mathbf{u}\|_{[L^2(S;V_0)]^2} \leq C \left(\|\mathbf{u}^{(0)}\|_{V_0^2} + \|\mathbf{u}^{(1)}\|_{H^2} + \|\mathbf{f}\|_{\mathcal{H}^2} \right),$$

wobei die Konstante C nicht von der Länge des Zeitintervalls abhängig ist. \square

Für die Praxis sind in der Regel allgemeinere als inhomogene Dirichlet-Randbedingungen von Interesse. Im Folgenden soll auf zwei spezielle Modelle eingegangen werden, welche dehnungs- und spannungsgetriebene Zug-/Druckversuche beschreiben können.

3.2. Inhomogene Dirichlet-Randwertaufgabe

Für dehnungsgeregelte Deformationsversuche am Stab (vgl. Abb. 6(b)) erhält man die folgende inhomogene Dirichlet-Randwertaufgabe:

Finde $\mathbf{u} : S \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, so dass die instationäre Gleichung

$$(3.80a) \quad \rho(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \partial_{tt} \mathbf{u}(t, x) - \partial_x \mathbf{P} \mathbf{u}(t, x) = \rho(x) \mathbf{f} \quad \text{in } S \times \Omega,$$

mit den Anfangsbedingungen

$$(3.80b) \quad \mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}^{(0)}(x), \quad \partial_t \mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}^{(1)}(x) \quad \text{in } \Omega,$$

und den gemischten Randbedingungen, homogene Dirichletbedingungen am linken Rand,

$$(3.80c) \quad \mathbf{u}(t, 0) = \mathbf{0},$$

sowie inhomogene Dirichlet-Randbedingungen am rechten Rand,

$$(3.80d) \quad u(t, l) = u_1(t, l) + u_2(t, l) = u^R(t),$$

erfüllt ist. Hierbei bezeichnet u^R eine am rechten Rand, $x = l$, aufgelegte Dehnung. Die Aufteilung der vorgegebenen Randverschiebungen auf die beiden Teilverschiebungen bereitet Schwierigkeiten. Für den nachfolgenden Satz zur Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung des Problems geben wir für jede der Teilverschiebungen eine Randverschiebung vor - im Allgemeinen ist dann jedoch die Bedingung $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_1 = \boldsymbol{\sigma}_2$, vgl. (1.7), verletzt. Mit u_i^R als vorgegebene Dehnungen für die jeweilige Teilverschiebung am rechten Rand setzen wir

$$(3.80e) \quad u_i(t, l) = u_i^R(t), \quad i = 1, 2.$$

Für die Behandlung der Aufgabe unter Berücksichtigung von (3.80d) verweisen wir auf Anhang A.

Wir formulieren das folgende

Setting 3.5.

Raum & Zeit:

$$(3.81a) \quad \Omega :=]0, l[\subset \mathbb{R} \quad \text{Raum, } l > 0,$$

$$(3.81b) \quad S :=]0, T[\subset \mathbb{R} \quad \text{Zeit, } T > 0,$$

Parameter(-funktionen):

$$\begin{aligned}
(3.82a) \quad & \rho \in L^\infty(\Omega) && \text{Dichte,} \\
(3.82b) \quad & E_i \in L^\infty(\Omega), \quad i = 1, 2 && \text{Elastizitätskoeffizienten,} \\
(3.82c) \quad & V_i \in L^\infty(\Omega), \quad i = 1, 2 && \text{Viskositäten,} \\
(3.82d) \quad & E_{12} \in L^\infty(\Omega) && \text{Kopplungskoeffizient,}
\end{aligned}$$

Funktionsräume:

$$\begin{aligned}
(3.83a) \quad & V := W^{1,2}(\Omega), \\
(3.83b) \quad & V_0 := W_0^{1,2}(\Omega), \\
(3.83c) \quad & V_{0,L} := \{v \in W^{1,2}(\Omega) \mid v(0) = 0\}, \\
(3.83d) \quad & H := L^2(\Omega), \\
(3.83e) \quad & \mathcal{V} := L^2(S; V), \\
(3.83f) \quad & \mathcal{V}_0 := L^2(S; V_0), \\
(3.83g) \quad & \mathcal{V}_{0,L} := L^2(S; V_{0,L}), \\
(3.83h) \quad & \mathcal{H} := L^2(S; H),
\end{aligned}$$

Daten:

$$(3.84) \quad \mathbf{f} \in \mathcal{H}^2, \mathbf{u}^{(0)} \in V_{0,L}^2, \mathbf{u}^{(1)} \in H^2, u_1^R, u_2^R \in C^2(S).$$

Satz 3.6. Es gelte das Setting 3.5 und mögen positive Konstanten $E_{0,i}$, $V_{0,i}$, ρ_0 , $i = 1, 2$, existieren, so dass

$$(3.85) \quad E_i(x) \geq E_{0,i}, \quad V_i(x) \geq V_{0,i}, \quad \rho(x) \geq \rho_0$$

für fast alle $x \in \Omega$. Dann existiert eine eindeutige schwache Lösung \mathbf{u} der Aufgabe (3.80) mit $\mathbf{u} \in [C(S, V_{0,L})]^2$.

Beweis: Für den rechten Rand ist

$$(3.86) \quad u_i(t, l) = u_i^R(t), \quad i = 1, 2$$

vorausgesetzt. Wir wenden das Superpositionsprinzip an. Setze hierfür

$$(3.87) \quad u_i(t, x) = v_i(t, x) + w_i(t, x), \quad i = 1, 2,$$

wobei $\mathbf{w} := (w_1, w_2)^T$ mittels Homogenisierung die Randbedingungen der Aufgabe berücksichtigt

$$(3.88) \quad w_i = \frac{x}{l} u_i^R(t), \quad i = 1, 2$$

und $\mathbf{v} := (v_1, v_2)^T$ mit

$$(3.89) \quad \mathbf{v} = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

Lösung der homogenen Dirichlet-Randwertaufgabe

$$(3.90a) \quad \rho(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \partial_{tt} \mathbf{v}(t, x) - \partial_x \mathbf{P} \mathbf{v}(t, x) = \tilde{\mathbf{f}}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$(3.90b) \quad \mathbf{v}(0, x) = \mathbf{v}^{(0)}(x) := \mathbf{u}^{(0)}(x) - \begin{pmatrix} \frac{x}{l} u_1^R(0) \\ \frac{x}{l} u_2^R(0) \end{pmatrix},$$

$$(3.90c) \quad \partial_t \mathbf{v}(0, x) = \mathbf{v}^{(1)}(x) := \mathbf{u}^{(1)}(x) - \partial_t \begin{pmatrix} \frac{x}{l} u_1^R(0) \\ \frac{x}{l} u_2^R(0) \end{pmatrix}$$

und

$$(3.91) \quad \tilde{\mathbf{f}} := \rho(x) \mathbf{f} - \rho(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \partial_{tt} \mathbf{w}(t, x) + \partial_x \mathbf{P} \mathbf{w}(t, x)$$

sei. Da $u^R \in C^2(S)$ gilt, ist $\tilde{\mathbf{f}} \in [L^2(S; H)]^2$ und nach Satz 3.4 existiert für die Aufgabe (3.90) eine eindeutige, schwache Lösung \mathbf{v} . $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ ist nun offensichtlich eine schwache Lösung der Aufgabe (3.80), da formal gilt

$$(3.92) \quad \begin{aligned} \rho(x) \partial_{tt} \mathbf{u} - \partial_x \mathbf{P} \mathbf{u} &= \rho(x) \partial_{tt} \mathbf{v} - \partial_x \mathbf{P} \mathbf{v} + \rho(x) \partial_{tt} \mathbf{w} - \partial_x \mathbf{P} \mathbf{w} \\ &= \mathbf{f} - \rho(x) \partial_{tt} \mathbf{w} + \partial_x \mathbf{P} \mathbf{w} + \rho(x) \partial_{tt} \mathbf{w} - \partial_x \mathbf{P} \mathbf{w} = \mathbf{f}. \end{aligned}$$

□

3.3. Gemischte Randwertbedingungen

Spannungsgeregelte Deformationsversuche am Stab (vgl. Abb. 8) modelliert man mit gemischten Randbedingungen:

Finde $\mathbf{u} : S \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, so dass die instationäre Gleichung

$$(3.93a) \quad \rho(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \partial_{tt} \mathbf{u}(t, x) - \partial_x \mathbf{P} \mathbf{u}(t, x) = \rho(x) \mathbf{f} \quad \text{in } S \times \Omega,$$

mit den Anfangsbedingungen

$$(3.93b) \quad \mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}^{(0)}(x), \quad \partial_t \mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}^{(1)}(x) \quad \text{in } \Omega,$$

und den gemischten Randbedingungen - homogene Dirichletbedingung am linken Rand,

$$(3.93c) \quad \mathbf{u}(t, 0) = \mathbf{0}$$

sowie inhomogene Robin-Randbedingungen am rechten Rand,

$$(3.93d) \quad \mathbf{P} \mathbf{u}(t, l) = -\mathbf{E}^R \mathbf{u}(t, l) - \mathbf{V}^R \partial_t \mathbf{u}(t, l) + \boldsymbol{\sigma}^R(t)$$

- erfüllt ist. Hierbei ist $\boldsymbol{\sigma}^R(t)$ eine am rechten Rand aufgelegte Spannung. \mathbf{E}^R und \mathbf{V}^R beschreiben wie in Abschnitt 2.2 einen angekoppelten viskoelastischen Körper am rechten Rand. Für $\mathbf{E}^R = \mathbf{V}^R = \mathbf{0}$ erhalte inhomogene Neumann-Randbedingungen.

Wir definieren folgendes

Setting 3.7.

Raum & Zeit:

$$(3.94a) \quad \Omega :=]0, l[\subset \mathbb{R} \quad \text{Raum, } l > 0,$$

$$(3.94b) \quad S :=]0, T[\subset \mathbb{R} \quad \text{Zeit, } T > 0,$$

Parameter(-funktionen):

$$\begin{aligned}
(3.95a) \quad & \rho \in L^\infty(\Omega) && \text{Dichte,} \\
(3.95b) \quad & E_i \in L^\infty(\Omega), \quad i = 1, 2 && \text{Elastizitätskoeffizienten,} \\
(3.95c) \quad & V_i \in L^\infty(\Omega), \quad i = 1, 2 && \text{Viskositäten,} \\
(3.95d) \quad & E_{12} \in L^\infty(\Omega) && \text{Kopplungskoeffizient,}
\end{aligned}$$

Funktionsräume:

$$\begin{aligned}
(3.96a) \quad & V := W^{1,2}(\Omega), \\
(3.96b) \quad & V_0 := \{v \in W^{1,2}(\Omega) \mid v(0) = 0\}, \\
(3.96c) \quad & H := L^2(\Omega), \\
(3.96d) \quad & \mathcal{V} := L^2(S; V), \\
(3.96e) \quad & \mathcal{V}_0 := L^2(S; V_0), \\
(3.96f) \quad & \mathcal{H} := L^2(S; H),
\end{aligned}$$

Daten:

$$(3.97) \quad \mathbf{f} \in \mathcal{H}^2, \quad \mathbf{u}^{(0)} \in V_0^2, \quad \mathbf{u}^{(1)} \in H^2, \quad \boldsymbol{\sigma}^R \in [L^2(S)]^2.$$

Definition 3.8. Es gelte das Setting 3.7. $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_0^2$ heißt schwache Lösung der Aufgabe (3.93), wenn $\partial_t \mathbf{u} \in \mathcal{V}_0^2$ und für alle $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{V}_0^2$ mit $\partial_t \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{H}^2$ und $\boldsymbol{\varphi}(T) = \mathbf{0}$,

$$\begin{aligned}
(3.98) \quad & - \int_S \int_\Omega \left(\rho(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \partial_t \mathbf{u}(t, x) \right) \cdot \partial_t \boldsymbol{\varphi}(t, x) \, dx \, dt + \int_S \int_\Omega \mathbf{P} \mathbf{u}(t, x) \cdot \partial_x \boldsymbol{\varphi}(t, x) \, dx \, dt \\
& - \int_S \mathbf{P} \mathbf{u}(t, l) \cdot \boldsymbol{\varphi}(t, l) \, dt \\
& = \int_S \int_\Omega \rho(x) \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\varphi}(t, x) \, dx \, dt + \int_\Omega \left(\rho(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}^{(1)}(x) \right) \cdot \boldsymbol{\varphi}(0, x) \, dx.
\end{aligned}$$

sowie $\mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}^{(0)}(x)$ gelten.

Satz 3.9. Seien die Voraussetzungen der Definition 3.8 erfüllt und mögen positive Konstanten $E_{0,i}, V_{0,i}, \rho_0, i = 1, 2$ existieren mit

$$(3.99) \quad E_i(x) \geq E_{0,i}, \quad V_i(x) \geq V_{0,i}, \quad \rho(x) \geq \rho_0$$

für fast alle $x \in \Omega$. Dann existiert eine eindeutige schwache Lösung $\mathbf{u} \in \mathcal{V}^2$ mit $\mathbf{u} \in [C(S, V_0)]^2$ und $\partial_t \mathbf{u} \in [L^2(S, V_0)]^2$ der Aufgabe (3.93). Zudem ist die Abbildung

$$(3.100) \quad \mathcal{S} : \left(\mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{f} \right) \rightarrow (\mathbf{u}, \partial_t \mathbf{u})$$

mit

$$(3.101) \quad \mathcal{S} : V^2 \times H^2 \times \mathcal{H}^2 \rightarrow [L^\infty(S, V_0)]^2 \times [L^2(S, V_0)]^2$$

linear und stetig. Insbesondere existiert eine von $\mathbf{u}, \mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{u}^{(1)}$ und \mathbf{f} unabhängige Konstante C mit

$$(3.102) \quad \|\mathbf{u}\|_{[L^\infty(S, V_0)]^2} + \|\partial_t \mathbf{u}\|_{[L^2(S, V_0)]^2} \leq C \left(\|\mathbf{u}^{(0)}\|_{V_0^2} + \|\mathbf{u}^{(1)}\|_{H^2} + \|\mathbf{f}\|_{\mathcal{H}^2} \right).$$

Beweis: Der Beweis des Satzes 3.4 muss an einigen Stellen den geänderten Voraussetzungen angepasst werden.

Im **1. Schritt** (Existenz der Galerkin-Lösung) sind in (3.19) die zusätzlichen Terme aus (2.37) zu berücksichtigen, so dass

$$(3.103) \quad -\mathbf{P}\mathbf{u}^{[n]}(t, l) = \mathbf{E}^R \mathbf{u}^{[n]}(t, l) + \mathbf{V}^R \partial_t \mathbf{u}^{[n]}(t, l) - \boldsymbol{\sigma}^R(t)$$

in (3.20) zu folgender Galerkin-Gleichung führt

$$(3.104) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\rho(x) \partial_{tt} \begin{pmatrix} 1 & 1 - \frac{1}{n} \\ 1 - \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}^{[n]}(t, x) \right) \cdot \begin{pmatrix} w_j \\ w_j \end{pmatrix} dx + \int_{\Omega} \mathbf{P}\mathbf{u}^{[n]}(t, x) \cdot \partial_x \begin{pmatrix} w_j \\ w_j \end{pmatrix} dx \\ & + \mathbf{E}^R \mathbf{u}^{[n]}(t, l) \cdot \begin{pmatrix} w_j(l) \\ w_j(l) \end{pmatrix} + \mathbf{V}^R \partial_t \mathbf{u}^{[n]}(t, l) \cdot \begin{pmatrix} w_j(l) \\ w_j(l) \end{pmatrix} - \boldsymbol{\sigma}^R(t) \cdot \begin{pmatrix} w_j(l) \\ w_j(l) \end{pmatrix} \\ & = \int_{\Omega} \rho(x) \mathbf{f} \cdot \begin{pmatrix} w_j \\ w_j \end{pmatrix} dx. \end{aligned}$$

Entsprechend erweitert sich das zu lösende lineare gewöhnliche Differentialgleichungssystem (3.33)

$$(3.105) \quad \begin{aligned} & \begin{pmatrix} \mathbf{G}^{\rho} & \mathbf{G}^{\rho} - \frac{1}{n} \mathbf{G}^{\rho} \\ \mathbf{G}^{\rho} - \frac{1}{n} \mathbf{G}^{\rho} & \mathbf{G}^{\rho} \end{pmatrix} \partial_{tt} \vec{\mathbf{g}} + \begin{pmatrix} \mathbf{G}^{E_1} & \mathbf{G}^{E_{12}} \\ \mathbf{G}^{E_{12}} & \mathbf{G}^{E_2} \end{pmatrix} \vec{\mathbf{g}} + \begin{pmatrix} \mathbf{G}^{V_1} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{G}^{V_2} \end{pmatrix} \partial_t \vec{\mathbf{g}} \\ & + \mathbf{R}^E \vec{\mathbf{g}} + \mathbf{R}^V \partial_t \vec{\mathbf{g}} \\ & = \mathbf{F} + \boldsymbol{\sigma}^R(t) \cdot \begin{pmatrix} w_j(l) \\ w_j(l) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

mit den Koeffizientenmatrizen $\mathbf{R}^E, \mathbf{R}^V$, die durch die Randterme eindeutig bestimmt sind. Für den **2. Schritt** (A-Priori-Abschätzungen) ist das Folgende zu beachten: Auf der linken Seite von (3.38) sind die Terme

$$-\mathbf{P}\mathbf{u}^{[n]}(t, l) \cdot \begin{pmatrix} w_j(l) \\ w_j(l) \end{pmatrix} = \mathbf{E}^R \mathbf{u}^{[n]}(t, l) \cdot \begin{pmatrix} w_j(l) \\ w_j(l) \end{pmatrix} + \mathbf{V}^R \partial_t \mathbf{u}^{[n]}(t, l) \cdot \begin{pmatrix} w_j(l) \\ w_j(l) \end{pmatrix} - \boldsymbol{\sigma}^R \cdot \begin{pmatrix} w_j(l) \\ w_j(l) \end{pmatrix}$$

zu addieren. In (3.40) müssen die Terme auf der linken Seite

$$(3.106) \quad \begin{aligned} & \int_{S_{\tau}} \mathbf{E}^R \mathbf{u}^{[n]}(t, l) : \partial_t \mathbf{u}^{[n]}(t, l) + \mathbf{V}^R \partial_t \mathbf{u}^{[n]}(t, l) : \partial_t \mathbf{u}^{[n]}(t, l) dt \\ & = \int_{S_{\tau}} E^R \left(u_1^{[n]}(t, l) + u_2^{[n]}(t, l) \right) \partial_t u_1^{[n]}(t, l) dt \\ & \quad + \int_{S_{\tau}} E^R \left(u_1^{[n]}(t, l) + u_2^{[n]}(t, l) \right) \partial_t u_2^{[n]}(t, l) dt \\ & \quad + \int_{S_{\tau}} V^R \left(\partial_t u_1^{[n]}(t, l) + \partial_t u_2^{[n]}(t, l) \right) \partial_t u_1^{[n]}(t, l) dt \\ & \quad + \int_{S_{\tau}} V^R \left(\partial_t u_1^{[n]}(t, l) \partial_t + u_2^{[n]}(t, l) \right) \partial_t u_2^{[n]}(t, l) dt \\ & = \int_{S_{\tau}} \frac{E^R}{2} \partial_t \left(u_1^{[n]}(t, l) + u_2^{[n]}(t, l) \right)^2 dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{S_\tau} V^R \left(\partial_t u_1^{[n]}(t, l) + \partial_t u_2^{[n]}(t, l) \right)^2 dt \\
& = \frac{E^R}{2} \left[\underbrace{\left(u_1^{[n]}(\tau, l) + u_2^{[n]}(\tau, l) \right)^2}_{\geq 0} - \underbrace{\left(u_1^{[n]}(0, l) + u_2^{[n]}(0, l) \right)^2}_{\text{auf rechte Seite}} \right] \\
& + \underbrace{\int_{S_\tau} V^R \left(\partial_t u_1^{[n]}(t, l) + \partial_t u_2^{[n]}(t, l) \right)^2 dt}_{\geq 0}
\end{aligned}$$

addiert werden. Entsprechend werden diese Terme in der Abschätzung (3.52) berücksichtigt. Die aus der Inhomogenität stammenden Terme, also

$$(3.107) \quad \int_{S_\tau} \boldsymbol{\sigma}^R(t) : \partial_t \mathbf{u}^{[n]}(t, l) dt,$$

werden auf der rechten Seite wie folgt behandelt: Es gilt

$$(3.108) \quad \int_{S_\tau} \boldsymbol{\sigma}^R(t) : \partial_t \mathbf{u}^{[n]}(t, l) dt - \underbrace{\int_{S_\tau} \boldsymbol{\sigma}^R(t) : \partial_t \mathbf{u}^{[n]}(t, 0) dt}_{=0} = \int_{S_\tau} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^R(t) : \partial_{tx} \mathbf{u}^{[n]}(t, x) dx dt$$

Mit der speziellen Youngschen Ungleichung kann (3.107) nach oben abgeschätzt werden, so dass

$$(3.109) \quad \int_{S_\tau} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^R(t) : \partial_{tx} \mathbf{u}^{[n]}(t, x) dx dt \leq \frac{C}{4\varepsilon} \|\boldsymbol{\sigma}^R\|_{[L^2(S)]^2}^2 + c\varepsilon \int_{S_\tau} \|\partial_t \mathbf{u}\|_{[W^{1,2}(\Omega)]^2}^2 dt$$

$\boldsymbol{\sigma}^R(t)$ ist als beschränkt vorausgesetzt worden. Der andere Term läßt sich nach entsprechender Wahl von ε mit der linken Seite verrechnen.

Im **3. Schritt**, dem Grenzübergang, gibt es keine zusätzlichen Schwierigkeiten; die Terme müssen lediglich ergänzt werden.

Für den **4. Schritt** (Eindeutigkeit der Lösung) ist das Vorgehen ebenfalls analog zum Beweis des Satzes 3.4. Die zusätzlichen Terme

$$(3.110) \quad \int_S \mathbf{E}^R \mathbf{v}(t, l) : \boldsymbol{\varphi}(t, l) + \mathbf{V}^R \partial_t \mathbf{v}(t, l) : \boldsymbol{\varphi}(t, l) dt$$

werden ebenfalls mit \mathbf{w} getestet. Man erhält

$$\begin{aligned}
(3.111) \quad \int_S \mathbf{E}^R \mathbf{v}(t, l) : \mathbf{w}(t, l) dt &= \int_0^s \mathbf{E}^R \partial_t \mathbf{w}(t, l) : \mathbf{w}(t, l) dt \\
&= \int_0^s \mathbf{E}^R \partial_t (\mathbf{w}(t, l))^2 dt = \mathbf{E}^R (\mathbf{w}(s, l))^2 - \mathbf{E}^R (\mathbf{w}(0, l))^2 = -\mathbf{E}^R (\mathbf{w}(0, l))^2
\end{aligned}$$

und

$$(3.112) \quad \int_S \mathbf{V}^R \partial_t \mathbf{v}(t, l) : \mathbf{w}(t, l) dt = - \int_0^s \mathbf{V}^R \mathbf{v}(t, l) : \mathbf{v}(t, l) dt,$$

so dass sich in (3.75) die folgende Abschätzung ergibt:

$$\begin{aligned}
 (3.113) \quad & \int_0^s \int_{\Omega} \rho(x) (\partial_t v_1 + \partial_t v_2)^2 dx dt + c_{\mathbf{V}} \|\mathbf{v}(t, x)\|_{[W^{1,2}]^2}^2 + \mathbf{E}^R(\mathbf{w}(0, l))^2 + \int_0^s \mathbf{V}^R \mathbf{v}(t, l) : \mathbf{v}(t, l) dt \\
 & \leq K_{\mathbf{E}} \int_0^s \|\mathbf{v}(t, x)\|_{[W^{1,2}]^2}^2 dt.
 \end{aligned}$$

Die Inhomogenität kommt hier nicht zum Tragen, da diese Terme aufgrund der Setzung $\mathbf{v} := \mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^2$ verschwinden. Mit der Gronwallschen Ungleichung gilt analog zum Dirichlet-Fall die Eindeutigkeit der Lösung. \square

Bemerkung 3.10. Auch weitere Kombinationen von Randbedingungen sind sinnvoll und daraus folgende Aufgabenstellungen werden - im Prinzip - analog behandelt. Für reine Neumann-Randbedingungen ist jedoch zur Vorsicht geraten, da dann die Poincaré-Ungleichung nicht mehr gilt.

Bemerkung 3.11. Sind die schwachen Lösungen der jeweiligen Aufgaben hinreichend glatt, so sind sie auch klassische Lösungen.

4. Numerische Simulationen

In den beiden folgenden Abschnitten stellen wir Implementierungsmöglichkeiten in COMSOL Multiphysics[®]4.2 und Maple[™] 11 vor. Des Weiteren präsentieren wir exemplarisch Simulationsergebnisse für einen spannungsgetriebenen Zug-/Druckversuch.

4.1. Numerische Simulation mit COMSOL Multiphysics[®]4.2

Die Implementierung des Systems in COMSOL Multiphysics[®]4.2 erfolgt über die „General Form for PDE“ mit zwei abhängigen Variablen $u1$ und $u2$. Die Berücksichtigung der gemischten Ableitungen geschieht über die Modifikation im „Conservative Flux Γ “

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -(E1 * u1x + E12 * u2x + V1 * u1xt) \\ -(E12 * u1x + E2 * u2x + V2 * u2xt) \end{pmatrix}.$$

Die „Mass Coefficient“-Matrix ist entsprechend der Modellierung singulär

$$e_a = \begin{pmatrix} \rho_0 & \rho_0 \\ \rho_0 & \rho_0 \end{pmatrix}.$$

An der linken Seite des normierten Stabes werden homogene Dirichlet-Randbedingungen vorgegeben. Je nach numerischem Experiment werden auf der rechten Seite inhomogene Dirichlet-Randbedingungen (verschiebungsgeregelt) oder inhomogene Neumann-Randbedingungen über einen „Flux/Source“-Term (spannungsgetrieben) vorgegeben.

Gelöst wird mit einem zeitbasierten Löser exemplarisch für einen spannungsgetriebenen Versuch zu den nachfolgenden Parametern:

$$\begin{array}{lll} E_1(x) := 1, & E_2(x) := 2, & E_{12}(x) := p \cdot \sqrt{E_1(x)E_2(x)}, \\ V_1(x) := 0.1, & V_2(x) := 1, & p := [0, 0.25, 0.99, 1], \\ \rho(x) := 60, & & f(t, x) := 0, \\ \alpha := 0.2, & \omega := 1, & c := 0.05, \end{array}$$

wobei die vorgegebene Spannung am rechten Rand, σ^R , durch

$$\sigma^R := \alpha \sin(\omega t - \arcsin(c\alpha^{-1})) + c$$

gegeben ist.

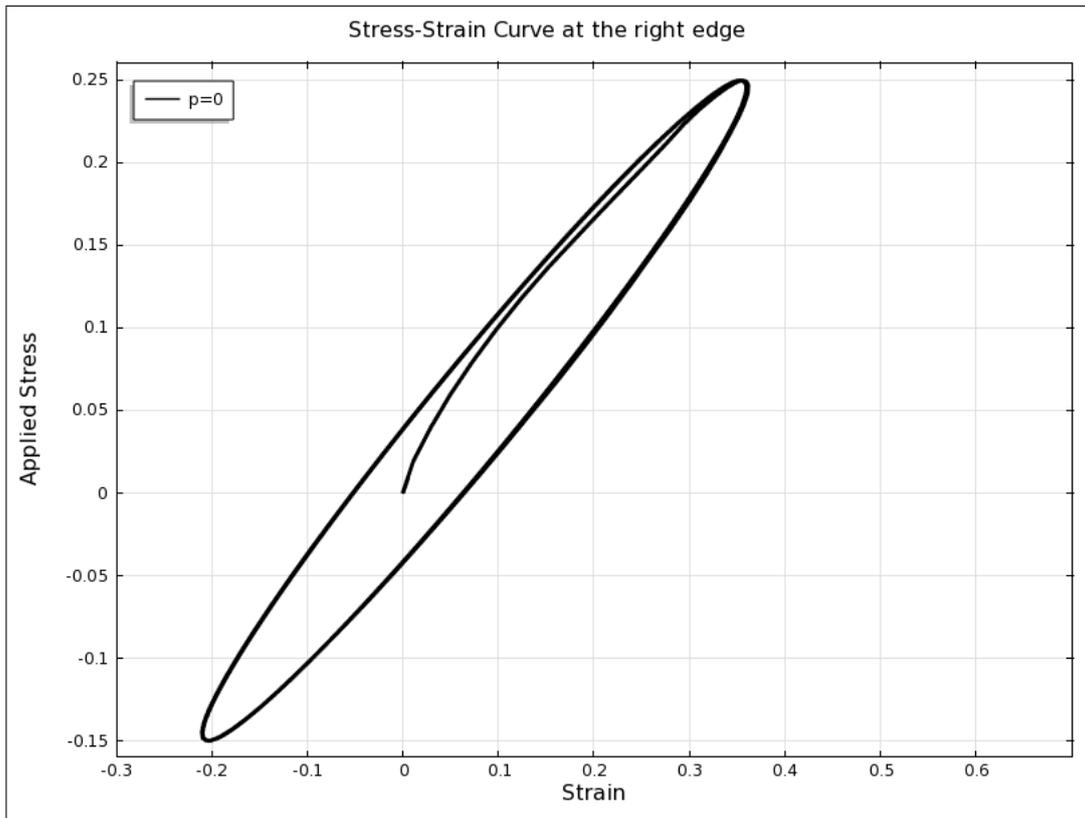


Abbildung 9: Spannungs-Verzerrungskurve am rechten Rand ($x = l$, vgl. Abb. 5) für $p = 0$

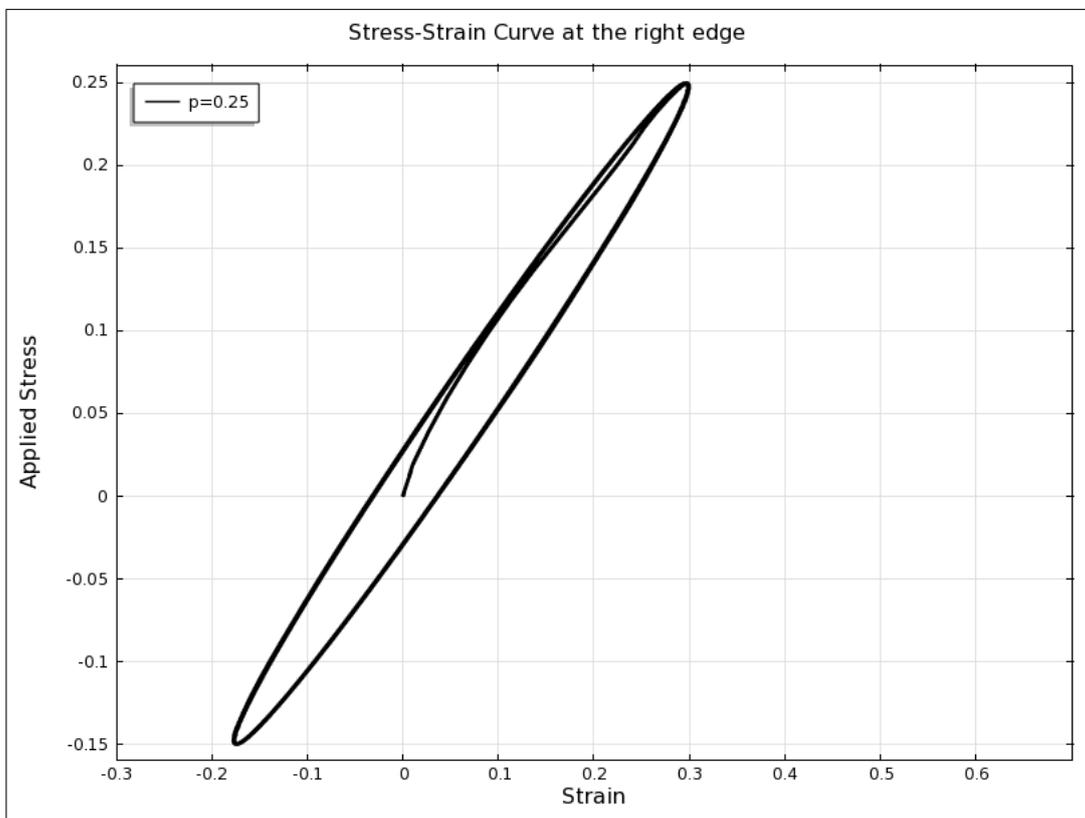


Abbildung 10: Spannungs-Verzerrungskurve am rechten Rand ($x = l$, vgl. Abb. 5) für $p = 0.25$

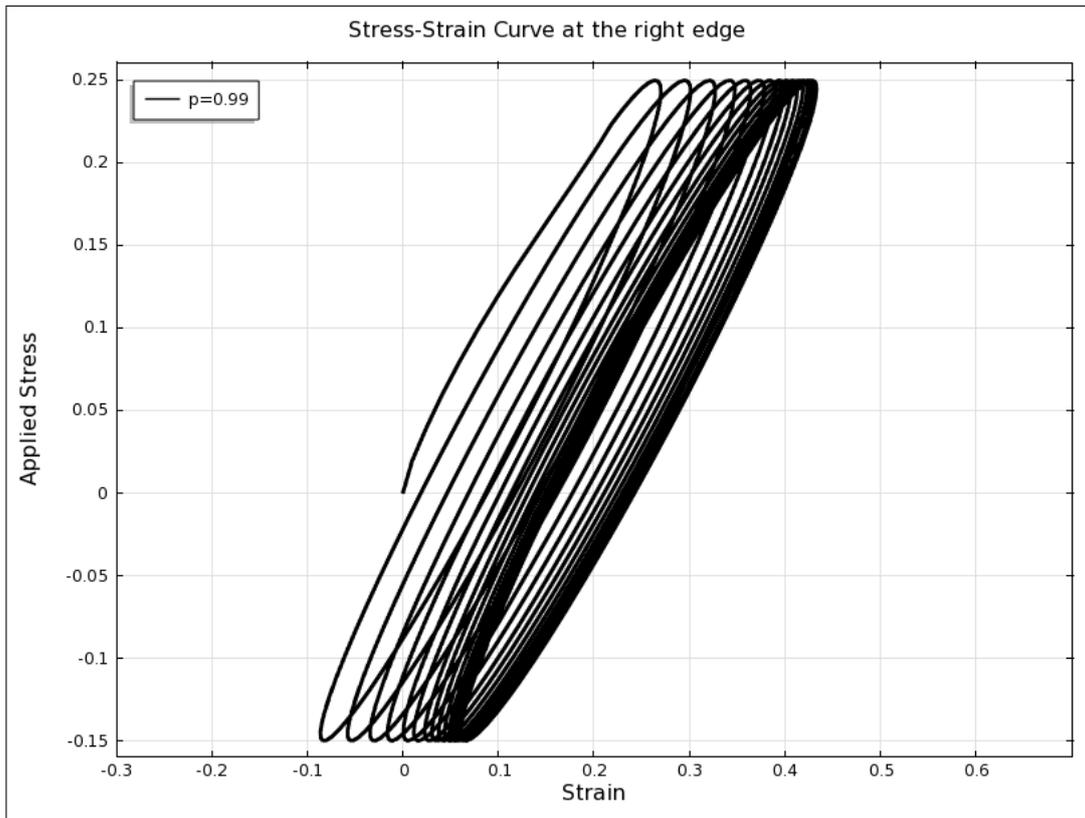


Abbildung 11: Spannungs-Verzerrungskurve am rechten Rand ($x = l$, vgl. Abb. 5) für $p = 0.99$

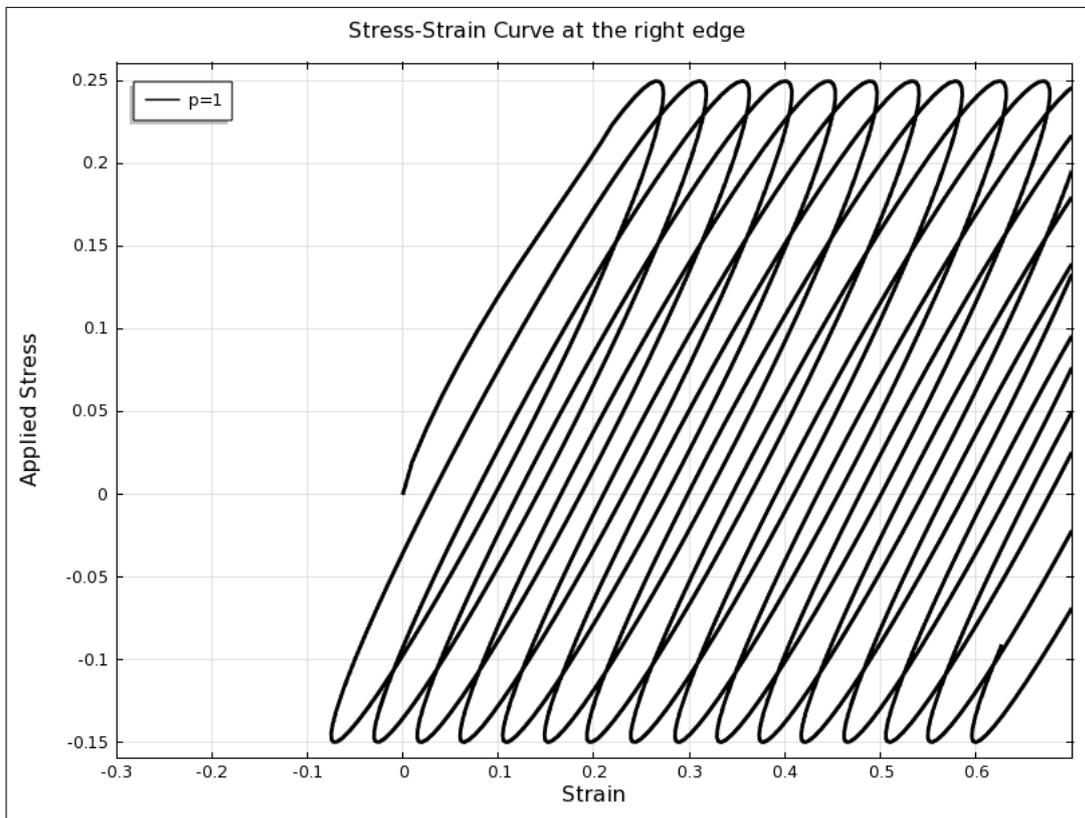


Abbildung 12: Spannungs-Verzerrungskurve am rechten Rand ($x = l$, vgl. Abb. 5) für $p = 1$

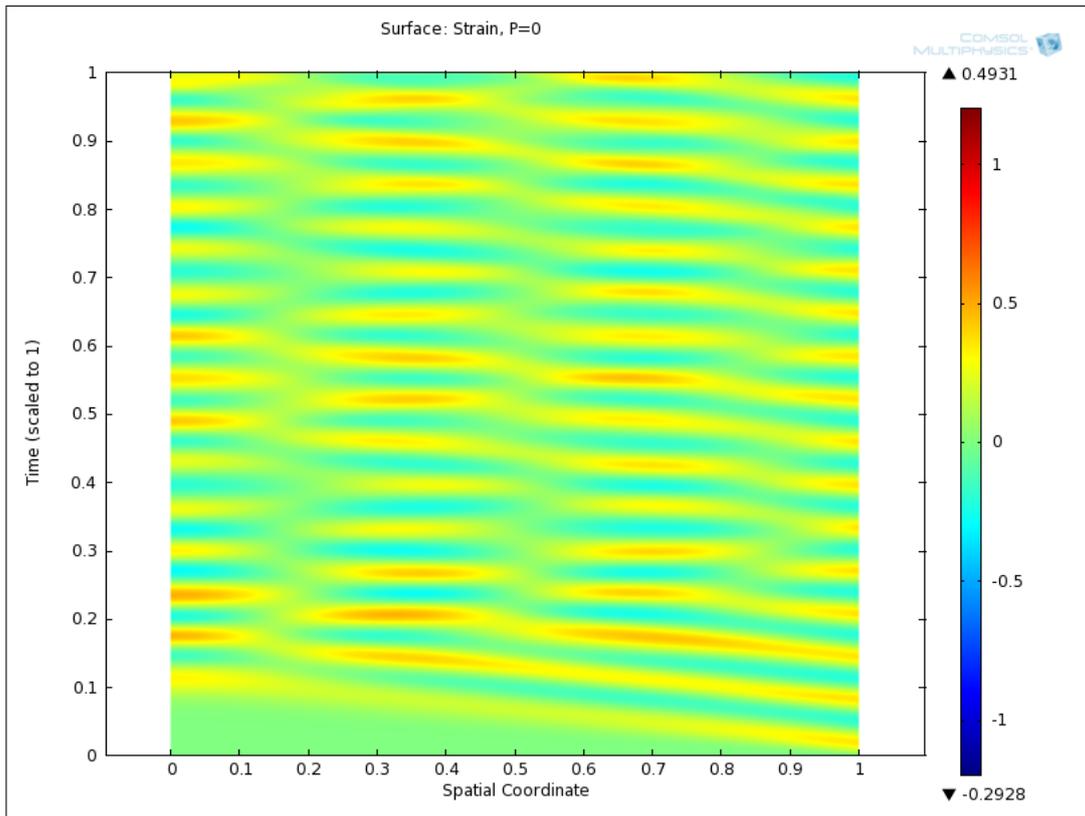


Abbildung 13: Verzerrung über Ort und Zeit für $p = 0$

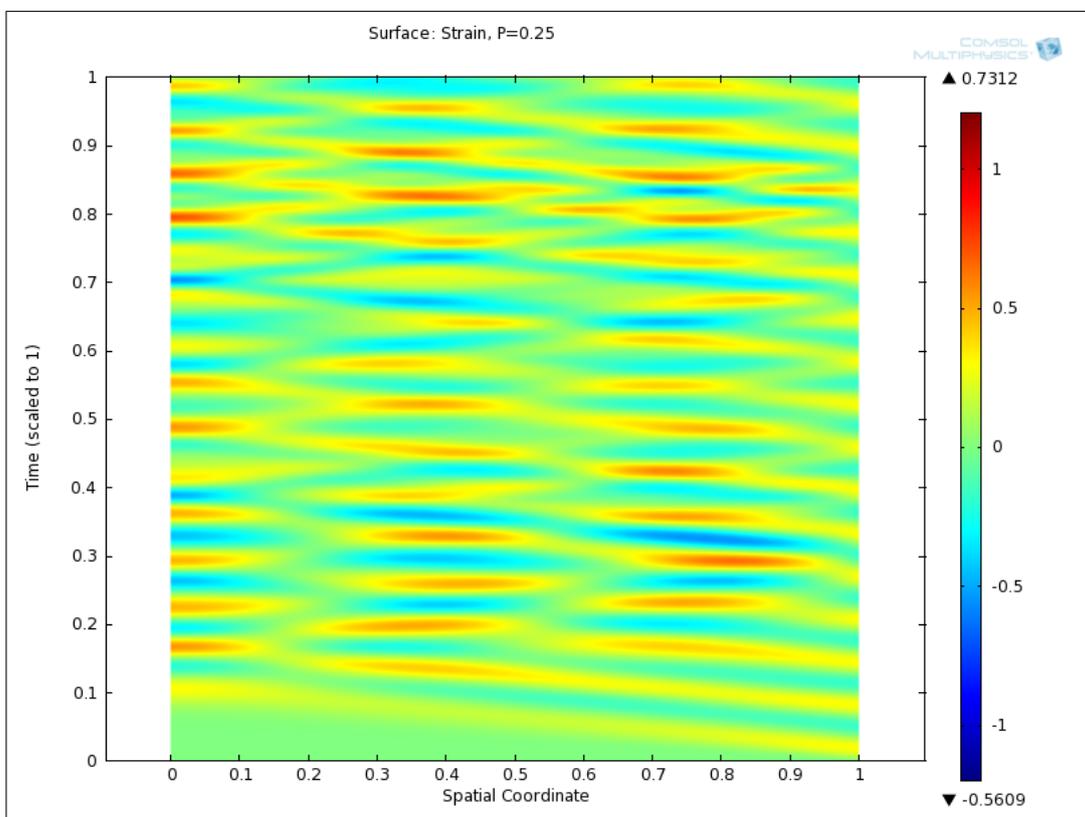


Abbildung 14: Verzerrung über Ort und Zeit für $p = 0.25$

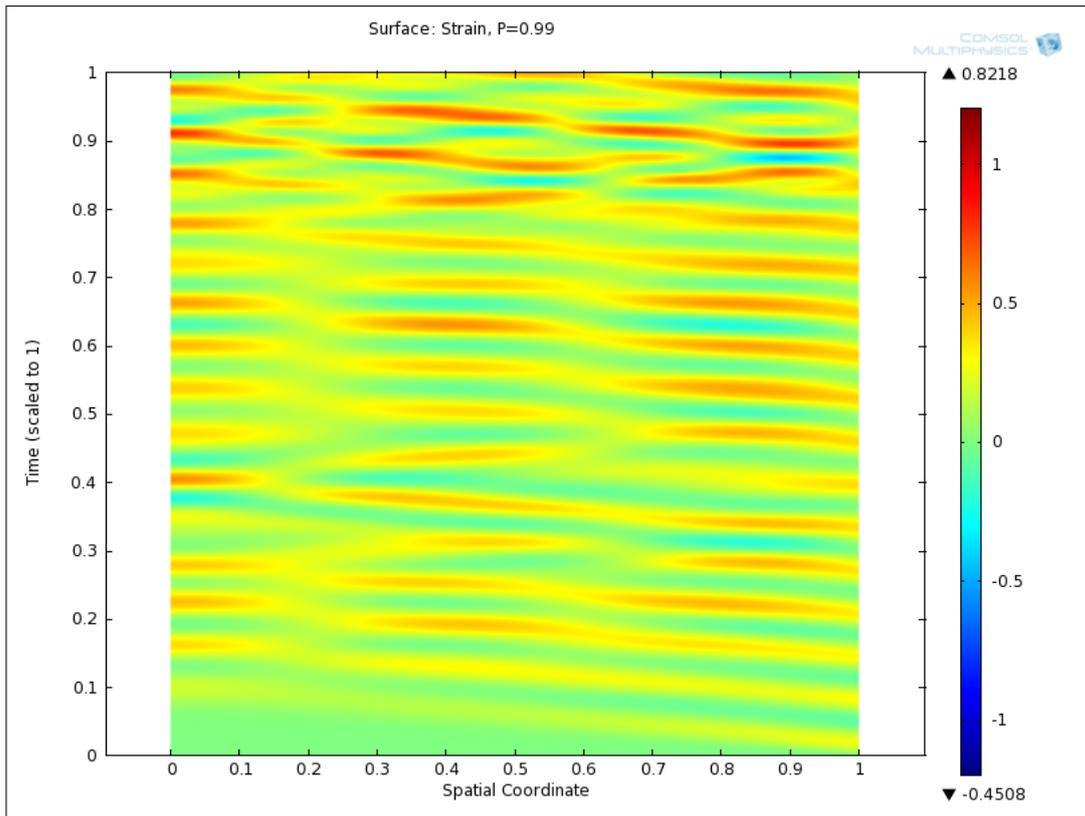


Abbildung 15: Verzerrung über Ort und Zeit für $p = 0.99$

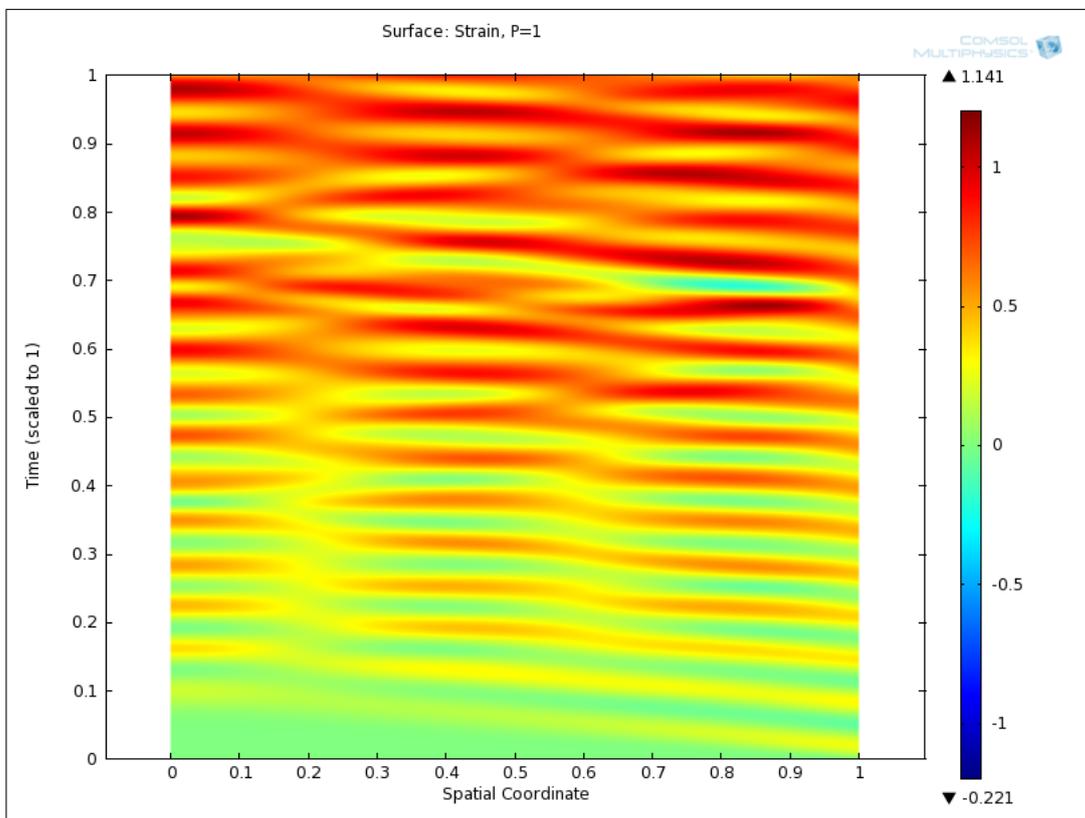


Abbildung 16: Verzerrung über Ort und Zeit für $p = 1$

Erwartungsgemäß zeigt die Simulation für den Fall keiner Kopplung ($p = 0$, Abb. 9) das klassische Verhalten von zwei in Reihe geschalteten Kelvin-Voigt-Körpern (vgl. Mathiak (2010)). Nach einigen Spannungszyklen stellt sich ein konstanter Orbit der Spannungs-Verzerrungskurve ein. Mit Hinzunahme einer kleinen Kopplung ($p = 0.25$, Abb. 10) verändert sich die Struktur der Spannungs-Verzerrungskurven nur leicht. Hier führt eine kleine positive Kopplung zu einem elastischeren Verhalten (der Orbit wird schmaler) als im ungekoppelten Fall. Für starke Kopplung nahe des singulären Falles ($p = 0.99$, Abb. 11) pendelt sich die Spannungs-Verzerrungskurve erst nach mehreren Zyklen in einen festen Orbit ein. In der Plastizität spricht man hier von einem Shakedown. Ein weiterer interessanter Fall tritt für den singulären Fall ein ($p = 1$, Abb. 12). Hier löst sich die übliche Struktur der Spannungs-Verzerrungskurve auf und es kommt zu keinem Einpendeln auf einen Orbit, stattdessen nimmt die Verzerrung mit zunehmender Zyklenzahl zu. Es kommt zu einem Ratcheting-Effekt. Die Abbildungen 13 bis 16 zeigen, dass die beschriebenen Effekte nicht nur am rechten Endpunkt des Stabes auftreten, sondern an jeden Ortspunkt. Zudem ist zu erkennen, dass sich, obwohl keine Inhomogenität in den Materialparametern vorliegt, auf Grund der Zeitabhängigkeit des Problems, ein inhomogenes Muster über den Stab ausbildet.

4.2. Numerische Simulation mit Maple™11

Für 1d1d-PDEs bietet Maple™ die Routine „pdsolve / numeric“. Aus der Maple™(11)-Hilfe:
 „Time-based Solver:

The solver has two modes of operation.

- The first mode of operation uses the default method, which is a centered implicit scheme, and is capable of finding solutions for higher order PDE or PDE systems. The PDE systems must be sufficiently close to a standard form for the method to find the numerical solution.“

Ein Lösen mit der singulären Matrix vor den zweiten Ableitungen ist nicht möglich, gewählt wurde daher eine regularisierte Form, wie im Beweis des Existenzsatzes 3.4. Gelöst wird also das Hilfsproblem (vgl. das regularisierte Galerkinsystem 3.19)

$$\begin{aligned}
 \rho(x)\partial_{tt}u_1(t, x) = \partial_x & \left(\left(\frac{n^2 E_1(x)}{2n-1} - \frac{(n-1)n E_{12}(x)}{2n-1} \right) \partial_x u_1(t, x) \right. \\
 & + \left(\frac{n^2 E_{12}(x)}{2n-1} - \frac{(n-1)n E_2(x)}{2n-1} \right) \partial_x u_2(t, x) \\
 & + \frac{n^2 V_1(x)}{2n-1} \partial_{xt} u_1(t, x) - \frac{(n-1)n V_2(x)}{2n-1} \partial_{xt} u_2(t, x) \Big) \\
 & + \frac{n}{2n-1} \rho(x) f(t, x)
 \end{aligned}
 \tag{4.1a}$$

$$\begin{aligned}
 \rho(x)\partial_{tt}u_2(t, x) = \partial_x & \left(\left(\frac{n^2 E_{12}(x)}{2n-1} - \frac{(n-1)n E_1(x)}{2n-1} \right) \partial_x u_1(t, x) \right. \\
 & + \left(\frac{n^2 E_2(x)}{2n-1} - \frac{(n-1)n E_{12}(x)}{2n-1} \right) \partial_x u_2(t, x) \\
 & + \frac{n^2 V_2(x)}{2n-1} \partial_{xt} u_2(t, x) - \frac{(n-1)n V_1(x)}{2n-1} \partial_{xt} u_1(t, x) \Big) \\
 & + \frac{n}{2n-1} \rho(x) f(t, x)
 \end{aligned}
 \tag{4.1b}$$

Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert die gefundene Lösung gegen die Lösung des Ursprungsproblems. In der Implementierung ist jedoch zu testen, wie hoch n zu setzen ist, da große n zu numerischen Schwierigkeiten führen (Rechengenauigkeit).

Bei inhomogenen Neumann-Randbedingungen (vgl. Abschnitte 2.2 und 3.3) müssen weitere Modifikationen gemacht werden, da diese Art der Randbedingungen - mit der Zeitableitung - sich nicht in Maple 11 implementieren lässt. Am rechten Stabende ($x = 1$) kann diese Randbedingung

jedoch als gewöhnliches Differentialgleichungssystem von $\partial_x u_1$ und $\partial_x u_2$ aufgefasst und zu den zusätzlichen, natürlichen Anfangsbedingungen $\partial_x u_i(0, x) = 0$ gelöst werden, so dass

$$\partial_x u_i(t, 1) = L_i(t).$$

L_i bezeichnet die jeweilige passende Lösungskomponente aus dem obigen DGL-System 4.1. Um eine explizite Lösung am Rand zu erhalten, sollte die vorgegebene Spannung möglichst eine glatte Funktion sein.

5. Zusammenfassung und Ausblick

Im ersten Abschnitt wurde ein neues Materialmodell zur Viskoelastizität mit Wechselwirkung zwischen zwei in Reihe geschalteten Kelvin-Voigt-Elementen im Rahmen der Mehr-Mechanismen-Modelle eingeführt. Der Hauptabschnitt behandelte die Modellierung des Modells für einen eindimensionalen Stab und beantwortete die Fragestellung nach Existenz und Eindeutigkeit von schwachen Lösungen für die zugehörigen mathematischen Probleme zu unterschiedlichen Randbedingungen. Besondere Aufmerksamkeit wurde den Randbedingungen geschenkt, die für Zug- und/oder Druck-Versuche vorkommen könnten. Exemplarisch wurde die Implementierung für einen spannungsgetriebenen Versuch an einen Stab in COMSOL[®]4.2. und Maple[™]11 diskutiert und die numerischen Ergebnisse kurz vorgestellt. Hierbei wurde ersichtlich, dass sich Effekte des ortunabhängigen Materialmodells direkt in den eindimensionalen Fall übertragen. Auf eine vorgegebene asymmetrische, zyklische Randspannung reagiert das Modell, je nach Parameterwahl, qualitativ, mit einem schnellen Einstellen auf eine feste Spannungs-Verzerrungskurve (vgl. klassisches Kelvin-Voigt-Modell), einem Shakedown (langsamen Einstellen auf eine feste Spannungs-Verzerrungskurve) oder aber mit zunehmender Verzerrung. Für den letzten Fall bietet das Modell so die Möglichkeit Effekte wie Ratcheting zu beschreiben. Das ist über die üblichen rheologischen Modelle zur linearen Viskoelastizität nicht möglich.

Weitere interessante Fragestellungen sind die Erweiterung auf Thermoviskoelastizität und in diesem Zusammenhang auch die dreidimensionale Betrachtung im Rahmen der Mehr-Mechanismen-Modelle. Außerdem sind weitere Verallgemeinerungen des Modells denkbar, um plastisches Materialverhalten, Phasentransformationen, etc. berücksichtigen zu können.

A. Problem der konsistenten inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen

Für Aufgaben zum viskoelastischen Stab mit inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen ergibt sich das Problem, die gewählte Randverschiebung u^R auf $u_1(t, l)$ und $u_2(t, l)$ geeignet aufzuteilen. Wir betrachten die Situation des Abschnittes 3.6, so dass homogene Dirichlet-Randbedingungen am linken Rand ($x = 0$) gelten,

$$(A.1) \quad u(t, 0) = 0.$$

Wir setzen hier

$$(A.2) \quad u_1(t, 0) = 0 \text{ und } u_2(t, 0) = 0,$$

da die homogenen Randbedingungen auch für die Teilverschiebungen gelten sollen. Prinzipiell wäre auch

$$(A.3) \quad u_1(t, 0) = -u_2(t, 0)$$

denkbar. Für die rechte Seite ($x = l$) wählen wir inhomogene Dirichlet-Randbedingungen,

$$(A.4) \quad u(t, l) = u^R(t),$$

für ein vorgegebenes u^R . Für die Teilverschiebungen gilt aufgrund der additiven Aufteilung der Verschiebung

$$(A.5) \quad u^R(t) = u_1(t, l) + u_2(t, l).$$

Das Problem ist nun Funktionen u_1^R und u_2^R zu finden, so dass

$$(A.6) \quad u^R(t) = u_1^R(t) + u_2^R(t)$$

mit

$$(A.7) \quad u_1(t, l) = u_1^R(t) \text{ und } u_2(t, l) = u_2^R(t)$$

gilt. Um die Aufteilung zu realisieren, wählen wir den Ansatz

$$(A.8) \quad u_1(t, l) = q(t)u^R(t) \text{ und } u_2(t, l) = (1 - q(t))u^R(t),$$

so dass die Funktion q zu bestimmen ist. Man betrachtet nun das Materialgesetz

$$(A.9) \quad V_1(x)\partial_{tx}u_1(t, x) + E_1(x)\partial_xu_1(t, x) + E_{12}(x)\partial_xu_2(t, x) = \sigma(t, x)$$

$$(A.10) \quad V_2(x)\partial_{tx}u_2(t, x) + E_{12}(x)\partial_xu_1(t, x) + E_2(x)\partial_xu_2(t, x) = \sigma(t, x)$$

und subtrahiere (A.9) von (A.10), so dass

$$(A.11) \quad V_1(x)\partial_{tx}u_1(t, x) - V_2(x)\partial_{tx}u_2(t, x) + (E_1(x) - E_{12}(x))\partial_xu_1(t, x) + (E_{12}(x) - E_2(x))\partial_xu_2(t, x) = 0$$

folgt. Sind die Materialparameter $E_1, E_2, E_{12}, V_1, V_2$ ortsunabhängig⁶, dann kann man über $[0, y], 0 \leq y \leq l$ integrieren und erhält aufgrund der gesetzten homogenen Dirichlet-Randbedingungen bei $x = 0$ mit $u_i(t, 0) = 0$

$$(A.12) \quad V_1\partial_tu_1(t, y) - V_2\partial_tu_2(t, y) + (E_1 - E_{12})u_1(t, y) + (E_{12} - E_2)u_2(t, y) = 0.$$

⁶Für ortsabhängige Materialparameter bleibt das Problem offen.

Wir betrachten (A.12) für $y = l$, benutzen den Ansatz (A.8) und bemerken, dass in unserem Setting $u^R \in C^2(S)$ (siehe (3.84)) gewählt ist. Durch Einsetzen erhält man

$$(A.13) \quad (V_1 + V_2)\partial_t(q(t)u^R(t)) - V_2\partial_t u^R(t) + (E_1 + E_2 + 2E_{12})q(t)u^R(t) - (E_2 - E_{12})u^R(t) = 0.$$

Definiere $g(t) := q(t)u^R(t)$ und löse die Differentialgleichung mit $g(0) = q(0)u^R(0)$, dass heißt

$$(A.14) \quad (V_1 + V_2)\partial_t g(t) - V_2\partial_t u^R(t) + (E_1 + E_2 + 2E_{12})g(t) - (E_2 - E_{12})u^R(t) = 0.$$

Die Gleichung (A.14) kann nun gelöst werden (vgl. (Bronstein et al., 2001, S. 507)). Wir definieren

$$(A.15) \quad \lambda := \frac{E_1 + E_2 - 2E_{12}}{V_1 + V_2},$$

$$(A.16) \quad c := \frac{V_1(E_2 - E_{12}) + V_2(E_{12} - E_1)}{(V_1 + V_2)^2}.$$

Dann ist

$$(A.17) \quad g(t) = e^{-\lambda t} \left(g(0) - \frac{V_2}{V_1 + V_2} u^R(0) \right) + \frac{V_2}{V_1 + V_2} u^R(t) + c \int_0^t e^{\lambda(s-t)} u^R(s) ds$$

Lösung von (A.14). Der ursprüngliche Ansatz war $g(t) = q(t)u^R(t)$ und gesucht ist $q(t)$, dass heißt

$$(A.18) \quad q(t) = \frac{g(t)}{u^R(t)}.$$

Hier ergibt sich das Problem, dass $q(t)$ für die Nullstellen $t_i \in [0, T]$ von u^R nicht definiert ist. Wir wählen den Ausweg über den Satz von l'Hospital. Ist t_i eine Nullstelle von u^R , dann gilt, falls $\partial_t u^R(t_i) \neq 0$,

$$(A.19) \quad q(t_i) = \lim_{t \rightarrow t_i} \frac{g(t)}{u^R(t)} = \lim_{t \rightarrow t_i} \frac{\partial_t g(t)}{\partial_t u^R(t)}.$$

Es gilt

$$(A.20) \quad \partial_t g(t) = \frac{V_2}{V_1 + V_2} \partial_t u^R(t) - c\lambda \int_0^t e^{\lambda(s-t)} \partial_s u^R(s) ds$$

und somit

$$(A.21) \quad q(t_i) = \frac{V_2}{V_1 + V_2} - c\lambda \frac{1}{\partial_t u^R(t_i)} \int_0^{t_i} e^{\lambda(s-t)} \partial_s u^R(s) ds.$$

Speziell für $t_i = 0$ gilt

$$(A.22) \quad q(0) = \frac{V_2}{V_1 + V_2}.$$

(A.22) ist insbesondere für die Implementation in COMSOL wichtig, wenn q über (A.13) bestimmt wird.

Literatur

- J. Altenbach und H. Altenbach. *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Teubner, Stuttgart, 1994.
- G.A Arzoumandis und K.M. Liechti. Linear viscoelastic property measurement and its significance for some nonlinear viscoelasticity models. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 7: 209–250, 2003.
- F. Bloom. *Ill-posed problems for integrodifferential equations in mechanics and electromagnetic theory*. SIAM, Philadelphia, Pa., 1981.
- E. Bonetti und G. Bonfanti. Existence and Uniqueness of the solution to a 3d thermoviscoelastic system. *Electronic Journal of Differential Equations*, 50:1–5, 2003.
- Bronstein, Semendjajew, Musiol, und Mühlig. *Taschenbuch der Mathematik, 5. Auflage*. Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2001.
- J. M. Carcione, H. B. Helle, G. Seriani, und M. P. Plasencia Linares. Simulation of seismograms in a 2-d viscoelastic earth by pseudospectral methods. *Geofísica Internacional*, 44(2):123–142, 2005.
- J. M. Caruthers, D. B. Adolf, . S. Chambers, und P. Shrikhande. A thermodynamically consistent, nonlinear viscoelastic approach for modeling glassy polymers. *Polymer*, 45:4577–4597, 2004.
- Y.-C. Fung. *Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues, 2. edition*. Springer-Verlag, Tokyo - Berlin - Heidelberg, 1993.
- H. Gajewski, K. Gröger, und K. Zacharias. *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*. Akademie-Verlag, Berlin, 1974.
- P. Haupt. *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Springer-Verlag, 2002.
- N. M. Hosali. On Seismic Waves in a Visco-Elastic Earth. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 104, No. 725: 271–278, 1923.
- R. Lakes. *Viscoelastic Materials*. Cambridge University Press, 2009.
- F. Mathiak. *Strukturdynamik diskreter Systeme*. Oldenbourg, München, 2010.
- T. Roubicek. *Nonlinear Partial Differential Equations with Applications*. Birkhäuser, 2005.
- K. Saï. Multi-mechanism models: Present state and future trends. *International Journal of Plasticity*, 27(2):250 – 281, 2011.
- R. J. Scavuzzo. Oscillating stress on viscoelastic behavior of thermoplastic polymers. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 122 (3):386 – 389, 2000.
- R. E. Showalter. *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations*. Mathematical Surveys and Monographs Volume 49. American Mathematical Society, 1991.
- G. Tao und Z. Xia. Ratcheting behavior of an epoxy polymer and its effect on fatigue life. *Polymer Testing*, 26:451–460, 2007.
- J. Tromp und J. Mitrovica. Surface loading of a viscoelastic earth: I. general theory. *Geophysical Journal International*, 137(3):847–855, 1999.

- J. Wloka. *Partielle Differentialgleichungen - Sobolevräume und Randwertaufgaben*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1982.
- M. Wolff. *Lineare Partielle Differentialgleichungen, Vorlesung im Sommersemester 2011*. Bremen, 2011.
- M. Wolff und L. Taleb. Consistency for two multi-mechanism models in plasticity. *International Journal of Plasticity*, 28:2059–2083, 2008.
- M. Wolff, M. Böhm, und L. Taleb. Two-mechanism models with plastic mechanism - modelling in continuum-mechanical framework. *Berichte aus der Technomathematik*, 10-05:1–29, 2010.
- M. Wolff, M. Böhm, und L. Taleb. Thermodynamic consistency of two-mechanism models in the non-isothermal case. *Technische Mechanik*, 31(1):58–80, 2011.
- M. Wolff, M. Böhm, S. Bökenheide, und N. Kröger. Two-mechanism approach in thermo-viscoelasticity with internal variables. *Technische Mechanik*, accepted:xxx – yyy, 2012.
- Z. Xia, X. Shen, und F. Ellyin. An assessment of nonlinearly viscoelastic constitutive models for cyclic loading: The effect of a general loading/unloading rule. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 9:281–300, 2006.
- E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/B - Nonlinear Monotone Operators*. Springer, New York, 1990a.
- E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/A - Linear Monotone Operators*. Springer, New York, 1990b.
- S. Zhong, A. Paulson, und J. Wahr. Three-dimensional finite-element modelling of earth's viscoelastic deformation: effects of lateral variations in lithospheric thickness. *Geophysical Journal International*, 155(2):679–695, 2003.