Zentrum für Technomathematik
Fachbereich 3 – Mathematik und Informatik

Über die Grundlagen der klassischen Kriechmechanik und ausgewählte Anwendungsbeispiele

Holm Altenbach

Report 10–01

Berichte aus der Technomathematik

Report 10–01 **April 2010**

Über die Grundlagen der klassischen Kriechmechanik und ausgewählte Anwendungsbeispiele

Holm Altenbach

Lehrstuhl für Technische Mechanik,
Zentrum für Ingenieurwissenschaften,
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg,
D-06099 Halle (Saale), Germany

19. April 2010

Diese Arbeit entstand nach einem Vortrag von Herrn Prof. Dr. Altenbach am ZeTeM im Herbst 2007. Aus hier nicht näher darzulegenden Gründen wurde sie damals nicht veröffentlicht. Da der Inhalt – wie ich meine – auch heute noch von großem Interesse sein dürfte, bat ich den Autor um sein Einverständnis, diesen Beitrag als Bericht aus der Technomathematik zu veröffentlichen. Somit erscheint nun die Arbeit mit nur sehr leichten, vom Autor vorgenommenen Änderungen gegenber der ursprünglichen Version.
(Michael Wolff)

Inhaltsverzeichnis

1 EINLEITUNG **3**
1.1 MOTIVATION 3
1.2 GESCHICHTE, QUELLEN 5

2 GRUNDMODELL **7**
2.1 BESCHREIBUNGSMÖGLICHKEITEN 7
2.2 DREI KRIECHSTADIEN 8

3 ERWEITERUNGEN **9**
3.1 DREIDIMENSIONALES VERHALTEN 9
3.2 ANISOTROPIE 14

4 BEISPIELE **17**
4.1 BALKEN 18
4.2 ROHRKRÜMMER 19

5 AUSBLICK **21**
5.1 EIGENE ARBEITEN 21
5.2 OFFENE FRAGEN 22

1 EINLEITUNG

Die Kriechmechanik ist ein Teilgebiet der Technischen Mechanik mit einer mehr als 100jährigen Geschichte sowie zahlreichen technischen Anwendungen. Im ersten Teil des Beitrags wird daher zunächst auf die Motivation eingegangen sowie ein kurzer Abriss zur Geschichte gegeben.

1.1 MOTIVATION

Die Mechanik ist seit dem Altertum ein etabliertes Wissenschaftsgebiet, obgleich die für uns vertraute Beschreibung von Aufgaben der Mechanik erst mit den entsprechenden Entwicklungen in der Mathematik einsetzte. Die Mechanik selbst wird oftmals nur in einem Zusammenhang mit der Physik gesehen (Teilgebiet der Physik). Parallel dazu trifft man bis heute auf die Auffassung, dass die Mechanik als Anwendungsfall für mathematische Theorien betrachtet werden kann [1]. Beides trifft spätestens seit der Entwicklung der Technischen Mechanik nicht mehr zu. Heute kann man dieses Gebiet als eine eigenständige Wissenschaftsdisziplin ansehen, die auf besondere Weise, basierend auf einem theoretischen Fundament, welches zunehmend axiomatisch formuliert wird, angewandte Probleme der Ingenieurpraxis einer Lösung zuführt.
Will man Kriechprobleme untersuchen, steht man vor drei Fragen. Zunächst ist eine geeignete Materialbeschreibung zu finden. Diese Aufgabe ist nicht trivial, da die unterschiedlichen Konzepte u.a. ausgehend von Überlegungen der Werkstoffphysik, der Werkstoffwissenschaft sowie der Kontinuumsmechanik mit Vor- und Nachteilen verbunden sind. Besonders muss darauf geachtet werden, dass Aufwand und Nutzen in einem geeigneten Verhältnis stehen und dass die Identifikation der Parameter in den das Werkstoffverhalten beschreibenden Gleichungen in befriedigender Weise gelöst werden kann. Dabei darf man auch nicht unbeachtet lassen, dass nicht jedes denkbare Experiment zur Ermittlung von Werkstoffparametern tatsächlich im Labor realisiert werden kann. Ein weiteres Problem ist damit verbunden, dass eine geeignete strukturmechanische Beschreibung vorgenommen werden muss. Bauteile sind geometrisch komplexe Gebilde. Die geometrische Beschreibung und ihre strukturmechanische Umsetzung sind daher in der Regel mit der Einführung von Modellen verbunden. Diese vereinfachen die Realität und ermöglichen dadurch eine Analyse des Praxisproblems mit vermindertem Aufwand. Damit

muss jedoch geklärt werden, im Rahmen welcher Vereinfachungen welches Modell eingesetzt werden kann. So ist beispielsweise bekannt, dass dünnwandige Bauteile (diese sind typisch für Anwendungen der Kriechmechanik) oftmals mit zweidimensionalen Gleichungen analysiert werden können. Welche Theorie z.B. im Fall von Platten zu verwenden ist (Kirchhoff, Mindlin, Reissner, von Kármán, ...), ist Gegenstand zahlreicher Untersuchungen. Die dritte Problemstellung Auswahl eines geeigneten numerischen Analyseverfahrens (Finite-Elemente-Methode, Randintegralmethode u.a.m.) ist gleichfalls bedeutsam, jedoch nicht Gegenstand dieses Beitrags.
In dieser Arbeit liegt der Schwerpunkt beim Kriechen in Bauteilen, wobei typische dünn- und dickwandige Bauteile, die sich als Balken, Platten, Rohre, Rohrkrümmer usw. modellieren lassen, betrachtet werden sollen. Diese Bauteile finden ihre Verwendung u.a. in Anlagen zur Energieerzeugung und in chemischen Apparaten, wobei moderate mechanische Belastungen, jedoch erhöhte Betriebstemperaturen typisch sind. Das Materialverhalten von Metallen und entsprechenden Legierungen (dies sind die hauptsächlich eingesetzten Konstruktionswerkstoffe) ist dann durch irreversible zeitabhängige Kriechvorgänge und Materialdegradation gekennzeichnet. Das Langzeitverhalten wird durch Mechanismen der zeitabhängigen Spannungsumlagerungen und der Schädigungszunahme beeinflusst, besonders in den Bereichen von Anschlüssen, Verbindungselementen und Schweißnähten. Die Kontinuumsschädigungsmechanik, die die Konstitutivgleichungen für den Tensor der Kriechverzerrungsgeschwindigkeiten und die Evolutionsgleichungen für die phänomenologischen Schädigungsvariablen begründet, führt dabei auf ein nichtlineares Anfangs-Randwertproblem für strukturmechanische Analysen [2].
Kriechmechanische Analysen sind besonders wichtig an den Stellen in einem Bauteil, an denen mehrere Komponenten miteinander verbunden werden müssen. Schweißverbindungen werden bevorzugt, jedoch ist das unterschiedliche Kriechverhalten im Grundmaterial, im Schweißgut und in der Wärmeeinflusszone zu berücksichtigen. Über die Lebensdauererhöhung in einer petrochemischen Anlage unter Einbeziehung des Kriechverhaltens wird beispielsweise in [3] berichtet. Das betrachtete Rohrleitungssystem wurde mit Methoden der klassischen Strukturmechanik analysiert jedoch brachte erst die Berücksichtigung von Dickenänderung und Ovalität in den Rohrbögen die zusätzlichen Effekte, so dass sich die Analyse von Werten für die Spannungen und Verformungen den Werten nähert, die im Experiment bzw. in der Praxis beobachtet werden. Zu einer möglichen Klassifikation der Kriechschädigung

und den korrespondierenden Maßnahmen beim Betrieb von Anlagen werden in [4] Aussagen gemacht. Ausgangspunkt der Betrachtungen bildet die aus der Werkstoffkunde bekannte Kriechdehnungs-Zeit-Kurve. Zu bestimmten Zeitpunkten werden Schliffbilder des Werkstoffs erzeugt und bewertet. Man kann folgende Etappen beobachten: (A) isolierte Hohlräume, (B) orientierte Hohlräume, (C) Mikrorisse, (D) Makrorisse, (E) Bruch. Diesen werden folgende Maßnahmen zugeordnet: (A) reine Beobachtung, (B) Beobachtung mit fixierten Inspektionsintervallen, (C) begrenzte Betriebsdauer bis zu Reparatur, (D) Reparatur. Das letzte Stadium (E) ist grundsätzlich zu vermeiden.

1.2 GESCHICHTE, QUELLEN

Einen geschichtlichen überblick zur Kriechmechanik enthält man u.a. in [5], [6]. Arbeiten zur Kriechmechanik gab es bereits in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts. Systematische Untersuchungen wurden in [7] erstmals zusammengefasst. Das bis heute wichtigste Kriechgesetz ist das Norton-Bailey-Gesetz (1929), welches im Sinne der Mathematik ein Potenzgesetz ist. Bereits an diesem Gesetz kann gezeigt werden, dass für Materialbeschreibung im Kriechbereich ein höherer Aufwand nötig ist. Während das einachsige Hookesche Gesetz nur eine Werkstoffkenngröße enthält (Elastizitätsmodul), benötigt man für das Norton-Bailey-Gesetz bereits zwei Kennwerte (einen Vorfaktor und den Kriechexponenten). Zahlreiche praktische Anwendungen aus dem Energiemaschinenbau standen zunächst für die Kriechmechanik. Zu den Anwendungen im Bereich des Gasturbinenbaus wurde bereits 1933 von Stodola ausführlich berichtet. Da mechanische Beanspruchungen im Allgemeinen mehrdimensional sind, müssen auch die Spannungs- und die Verzerrungszustände mehrdimensional sein. Folglich benötigt man eine entsprechende Theorie, die im Wesentlichen von Odqvist (1933-1936) und Bailey (1929, 1935) unter Verwendung von Invarianten des Spannungszustandes für isotropes Werkstoffverhalten entwickelt wurde. Eine konsequente tensorielle Beschreibung erfolgte durch Prager (1945) und Reiner (1945), wobei auf diese Weise auch Anisotropie einbezogen werden kann. Fehlende übereinstimmungen mit experimentellen Befunden führten zur Entwicklung von weiteren Modifikationen der Kriechgleichungen, z.B. die Dehnverfestigungstheorie, die auf Nadai (1938) und Soderberg (1938) zurückgeht. Mit Anwendungen auf Stabilitätsprobleme, z.B. Hoff (1954, 1958), mussten Elemente der geo-

metrisch nichtlinearen Theorie entwickelt werden. Eine neue Aufgabenklasse entstand mit dem massenhaften Einsatz von Polymerwerkstoffen, wobei Analogien zwischen Viskoelastizität und Kriechen gezeigt werden können. Die Beschreibung des viskoelastischen Verhaltens erfolgt mathematisch gesehen oftmals mit Hilfe von Integralgleichungen, die auf Rabotnov (1948) zurückgehen.
Zur Kriechmechanik gibt es zahlreiche Lehrbücher und Monografien. Diese enthalten hauptsächlich die gesicherten Lehrmeinungen und Forschungsergebnisse. Dabei bevorzugen die Autoren die ingenieurmäßig-induktive Vorgehensweise, d.h. ausgehend von experimentellen Beobachtungen wird schrittweise verallgemeinert. Es gibt damit bis heute keine Buch, welches in vergleichbarer Weise die Kriechmechanik kontinuumsmechanisch darstellt, wie es in der Elastizitätstheorie oder der Plastizitätstheorie üblich ist. Für das Studium bzw. das Einlesen in die Kriechmechanik können u.a. [5],[8]-[18] empfohlen werden. Dabei stellt man fest, dass statische (bzw. quasistatische) Anwendungen im Falle monotoner Belastungen und unter isothermen Bedingungen relativ sicher (einschließlich der Anwendung in der Ingenieurpraxis) beherrscht werden. Dynamische Belastungen und ihre Konsequenzen für kriechmechanische Strukturanalyse sind jedoch Gegenstand weiterer Grundlagenuntersuchungen.
Kriechmechanische Forschungsarbeiten sind höchst aktuell, was u.a. ausgewählte Konferenzen zeigen. Die Internationale Union für Theoretische und Angewandte Mechanik (IUTAM) führt alle 10 Jahre ein IUTAM-Symposium Creep in Structures durch (1960 Stanford/U.S.A. [19], 1970 Göteborg/ Schweden [20], 1980 Leicester/U.K. [21], 1990 Krakw/Polen [22], 2000 Nagoya/Japan [23]). Der Grund für die großen Zeitabstände zwischen zwei Symposia ist relativ einfach zu erklären der Forschungsgegenstand ist mit zeitabhängigen Prozessen verbunden. Für deren Verifizierung im Bereich metallischer Werkstoffe sind Langzeitversuche über mehrere Jahre notwendig. Erst in letzter Zeit, mit dem Aufkommen von Fragestellen zum Kriechverhalten von Kunststoffen und Kompositwerkstoffen, sind kürzere Zeiträume für Experimente möglich. Trotzdem ist das nächste Symposium erst für 2010 (30.08. 3-09-2010, Paris) angedacht. Daneben gab es spezielle Konferenzen und Weiterbildungsveranstaltungen, die ausgewählten Problemen gewidmet waren. Hierzu gehören u.a. [24]-[26]. Auch die Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik hat in den letzten Jahren einen Hauptvortrag der Kriechmechanik gewidmet [27]. In den nächsten Jahren sind weitere Impulse für die Forschung hauptsächlich aus folgenden Bereichen zu erwarten: Kraft-

werksanlagenbau, Flugzeugbau und Mikrosystemtechnik. Die beiden erstgenannten Gebiete stellen traditionelle Anwendungsbereiche dar. Leistungs- und Effizienzsteigerung sind mit weiterer Temperaturerhöhung verbunden, so dass die Neigung zu Kriechen und Schädigung zunimmt. In der Mikrosystemtechnik ist der Einfluss der Temperatur gleichfalls nicht zu negieren, wobei verschiedene Werkstoffe unterschiedlich reagieren. Da in der Mikrosystemtechnik alle Elemente auf engstem Raum angeordnet sind, sind auch Wechselwirkungen zunehmend von Interesse.

2 GRUNDMODELL

Das Kriechverhalten wird immer von verschiedenen Seiten analysiert: aus der Sicht des Werkstoffs und aus der Sicht des Bauteils. Werkstoffkriechen beinhaltet stets die Kriech- und die Erholungsvorgänge. Beides wird von zeitabhängigen mikrostrukturellen Veränderungen im Werkstoff als Ergebnis moderater mechanischer Beanspruchungen (unterhalb der Fließgrenze) bei erhöhten Temperaturen (>0.3 der Schmelztemperatur) begleitet. Das Kriechen in Bauteilen ist gleichfalls ein zeitabhängiger Prozess, der zu Veränderungen des Verzerrungs- und des Spannungszustandes führt. Man unterscheidet dabei u.a. das Kriechen, die Erholung und die Spannungsumlagerungen. Hierfür sind mehrachsige, inhomogene Spannungszustände typisch.

2.1 BESCHREIBUNGSMÖGLICHKEITEN

Es gibt unterschiedliche Beschreibungsmöglichkeiten des Kriechverhaltens. Ausgangspunkt sind dabei überlegungen der Werkstoffwissenschaft bzw. -physik, makroskopische Beobachtungen oder kontinuumsmechanische Ansätze. Bis heute sind besonders phänomenologische Ansätze basierend auf makroskopischen experimentellen Befunden Ausgangspunkt für die Modelle. Dieses Konzept wurde bereits in [7] beschrieben und dominieren heute in der Literatur zu strukturmechanischen Analysen. Daneben sind die bekannten Vor- und Nachteile unterschiedlicher Beschreibungen sorgfältig abzuwägen. Beispielsweise sind werkstoffwissenschaftliche Ansätze und die auf ihnen basierenden Kriechgleichungen meisten sehr gut geeignet, die unterschiedlichen Prozesse auf der Mikroebene zu charakterisieren. Gleichzeitig ist die dreidimensionale Verallgemeinerung oftmals mit Schwierigkeiten verbunden, weil die dafür notwendigen Vergleichsspannungskonzepte nur ingenieurmäßig begründet werden können, d.h. ein übergeordnetes Prinzip in Analogie zu den Bilanzgleichungen oder ähnlichem existiert nicht. Die phänomenologische Beschreibung innerhalb der Ingenieurmechanik ist nicht immer streng genug, um alle Aspekte der Modellierungsanforderungen zu erfüllen. Dagegen lassen sich die entsprechenden dreidimensionalen Kriechgleichungen leicht in existierende kommerzielle Finite-Elemente-Software implementieren. Die streng kontinuumsmechanische Formulierung ist sicher zu bevorzugen, jedoch ist eine Implementierung in Berechnungssoftware meist nicht trivial.

2.2 DREI KRIECHSTADIEN

Kriechkurven sind Dehnungen über der Zeit abgetragen, wobei man nach einem kleinen elastischen Bereich, der oftmals vernachlässigt wird, drei Bereiche des Kriechverhaltens unterscheidet. Der erste Bereich (Primärkriechen oder verzögertes Kriechen) ist durch eine Abnahme der Neigung der Kriechkurve gekennzeichnet, d.h., die Kriechgeschwindigkeit nimmt ab. Dies korreliert mit mikrostrukturellen Befunden. Es tritt Verfestigung auf, d.h. Behinderung der Dislokationsbewegungen. Daneben kann man Relaxation beobachten, d.h. Umlagerung der Gitterdefekte. Der sich anschließende Sekundärkriechbereich (stationäres Kriechen) ist durch ein Gleichgewicht von Verfestigung und Entfestigung gegenzeichnet. Dabei nimmt die Kriechgeschwindigkeit einen stationären Wert an, der gleichzeitig der Minimalwert ist. Der Tertiärkriechbereich (beschleunigtes Kriechen) ist insbesondere durch Schädigung (Bildung, Wachstum und Koaleszenz von Hohlräumen an den Korngrenzen, Mikrostrukturalterung etc.) gekennzeichnet. Diese Einteilung, die u.a. in [28]-[30] begründet wird, ist eine geeignete Basis für die Formulierung von phänomenologischen Modellen der Kriechmechanik. Dabei ist jedoch zu beachten, dass zunächst Temperatureinflüsse vernachlässigt werden bzw. die Temperatur als konstant angesehen wird. Dies ist notwendig, da die Temperaturabhängigkeit oft sehr komplex ist. Außerdem ist die Ausprägung der drei Kriechbereiche für verschiedene Werkstoffe unterschiedlich. Im Regelfall ist jedoch der Sekundärkriechbereich deutlich länger im Vergleich zum Bereich des Primär- und Tertiärkriechens. Unabhängig von den angeführten Argumenten zur Einteilung und Vereinfachung sind Kriechkurven in der Regel ingenieurmäßig akzeptable Aussagen zu einachsigen Experimenten, wobei man geht zunächst von Werkstoffisotropie ausgeht.

3 ERWEITERUNGEN

Bei den Erweiterungen sind grundsätzlich zunächst zwei Aspekte zu sehen. Da die Belastung im allgemeinen Fall dreidimensional ist, wird eine geeignete dreidimensionale Beschreibung des Werkstoffverhaltens gesucht. Daneben spielen bei Kriechvorgängen auch die Anisotropien im Materialverhalten eine Rolle, wobei auch ursprünglich isotrope Werkstoffe im Tertiärbereich anisotrop werden können (schädigungsinduzierte Anisotropie), aber es gibt auch priori anisotrope Werkstoffe (Anfangsisotropie).

3.1 DREIDIMENSIONALES VERHALTEN

Der einfachste Kriechversuch ist eine Analogie zum Zugversuch, bei dem in der Zugprobe lediglich eine Normalspannungentsteht, wobei diese voraussetzungsgemäßaus einer konstanten Belastung (Kraft) resultiert. Ein weiterer einfacher Kriechversuch ist der Torsionsversuch, in dessen Ergebnis man eine Schubspannungregistriert, die das Ergebnis eines konstant wirkenden Torsionsmoments ist. Beide Versuche lassen sich überlagern. In diesen Fall erhält man einen komplexen Spannungszustand, der durch den nachfolgenden Spannungstensor gekennzeichnet ist

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma \boldsymbol{k} \otimes \boldsymbol{k} + \tau \left(\boldsymbol{e}_\varphi \otimes \boldsymbol{k} + \boldsymbol{k} \otimes \boldsymbol{e}_\varphi \right) \tag{3.1}$$

$\boldsymbol{k}$ ist der Einheitsvektor der Kriechrichtung, mit $\boldsymbol{e}_\varphi$ wird der Einheitsvektor der Umfangsrichtung bezeichnet. Da inelastisches Materialverhalten meist als unbeeinflusst vom hydrostatischen Spannungszustand angesehen wird, muss neben dem Spannungstensor noch der Spannungsdeviator eingeführt werden

$$\boldsymbol{s} = \sigma \left(\boldsymbol{k} \otimes \boldsymbol{k} - \frac{1}{3} \boldsymbol{E} \right) + \tau \left(\boldsymbol{e}_\varphi \otimes \boldsymbol{k} + \boldsymbol{k} \otimes \boldsymbol{e}_\varphi \right) \tag{3.2}$$

Zusätzlich ist dann noch die Vergleichbarkeit von einachsigen und mehrachsigen Befunden zu sichern. Dafür wird eine Vergleichsspannung eingeführt -

im einfachsten Fall die von Mises-Spannung

$$\sigma_{vM} = \sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{s} \bullet \bullet \boldsymbol{s}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \tag{3.3}$$

Entsprechend dem Konzept der drei Kriechbereiche erfolgt jetzt zunächst die einachsige Beschreibung ausgehend vom Sekundärbereich mit folgendem Ansatz

$$\dot{\varepsilon}^{kr}_{min} = f(\sigma, T) \tag{3.4}$$

$\dot{\varepsilon}^{kr}_{min}$ ist die minimale Kriechdehnungsgeschwindigkeit, σ ist die vorhandene Spannung, die das Kriechen hervorruft, und T ist die Temperatur. Letztere wird als konstant angesehen, um das Modell nicht zu kompliziert zu machen. Man erkennt, dass die experimentelle Verifizierung relativ einfach. Aus der Literatur sind als Approximation der eingeführten Funktion für die minimale Kriechdehnungsgeschwindigkeit unterschiedliche analytische Ansätze bekannt. Der wichtigste Ansatz ist das Potenzgesetz. Es gibt jedoch auch Argumente, die für eine Exponentialfunktion oder eine hyperbolische Sinusfunktion sprechen.

Der Ansatz für das Sekundärkriechen wird erweitert um einen Verfestigungsterm (ist eine Verfestigungsvariable)

$$\dot{\varepsilon}^{kr} = f(\sigma, H, T) \tag{3.5}$$

und mit einer Evolutionsgleichung ergänzt

$$\dot{H} = \dot{H}(\sigma, H, T) \tag{3.6}$$

Für den Tertiärbereich wird noch eine Schädigungsvariable ω eingeführt

$$\dot{\varepsilon}^{kr} = f(\sigma, H, \omega, T) \tag{3.7}$$

sowie eine Schädigungsevolution postuliert

$$\dot{\omega} = \dot{\omega}(\sigma, H, \omega, T) \tag{3.8}$$

alten beschränkt. Durch Einführung geeigneter Tensoren für die Spannungen und die Verzerrungsgeschwindigkeiten sowie mit Hilfe entsprechender Vergleichsgrößen lässt sich dies elementar realisieren. Dabei ist lediglich zu beachten, dass Vergleichskonzepte für die Spannungen und die Verzerrungen stets nur Ingenieurannahmen sind. Jedes Konzept und eventuelle Modifikationen sind daher stets erneut dahingehend zu untersuchen, ob die getroffenen Annahmen auch zulässig sind. Daneben ist die Vorgehensweise nicht beschränkt auf eine Verfestigungsvariable und eine Schädigungsvariable, die jeweils nur einem Mechanismus zugeordnet werden können. Grundsätzlich muss das Konzept geändert werden, wenn die Anisotropie einbezogen werden soll. Dabei sind Anisotropietensoren zu begründen und zu beschreiben. Für die schädigungsinduzierte Anisotropie kommt noch eine mögliche Evolution hinzu. Letztere ist gleichfalls mathematisch zu beschreiben.

Für die Herleitung der Grundgleichungen für isotropes Kriechen kann man auch wie folgt vorgehen. Unter der Voraussetzung konstanter Temperatur und konstanter oder schwach veränderlicher Belastungen werden zunächst die infinitesimalen Kriechgeschwindigkeiten als tensorielle Größen eingeführt

$$\dot{\boldsymbol{D}}^{kr} = \dot{\varepsilon}^{kr} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma}) \tag{3.9}$$

Die Potentialhypothese mit Fließregel [31]

$$\dot{\boldsymbol{D}}^{kr} = \frac{\partial W(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{3.10}$$

führt dann unter Einbeziehung der Dissipationsleistung $P = \dot{\boldsymbol{D}}^{kr} \bullet\bullet \boldsymbol{\sigma} \geq \boldsymbol{0}$ auf eine allgemeine isotrope Kriechgleichung. Dazu müssen noch die Isotropiebedingungen

$$f(\boldsymbol{Q} \bullet \boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{Q}^T) = \boldsymbol{Q} \bullet f(\boldsymbol{\sigma}) \bullet \boldsymbol{Q}^T, \tag{3.11}$$

$$W(\boldsymbol{Q} \bullet \boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{Q}^T) = W(\boldsymbol{\sigma}), \tag{3.12}$$

$$\forall \boldsymbol{Q} : \boldsymbol{Q} \bullet \boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{E},\ \det \boldsymbol{Q} = \pm 1$$

eingebaut werden, und somit erhält man

$$\dot{\boldsymbol{D}}^{kr} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma}) = \dot{\alpha}_0 \boldsymbol{E} + \dot{\alpha}_1 \boldsymbol{\sigma} + \dot{\alpha}_2 \boldsymbol{\sigma}^2,\ \dot{\alpha}_i = dot\alpha_i(I_1, I_2, I_3), \tag{3.13}$$

$$I_1 = tr\boldsymbol{\sigma},\ I_2 = tr\boldsymbol{\sigma}^2,\ I_3 = tr\boldsymbol{\sigma}^3, \tag{3.14}$$

$$\dot{\boldsymbol{D}}^{kr} = \frac{\partial W}{\partial I_1}\boldsymbol{E} + 2\frac{\partial W}{\partial I_2}\boldsymbol{\sigma} + 3\frac{\partial W}{\partial I_3}\boldsymbol{\sigma}^2,\ W = W(I_1, I_2, I_3), \tag{3.15}$$

Die Integrabilitätsbedingung für die $\dot{\alpha}_i$ ist in [17] angegeben.

Der gewählte Invariantensatz ist nicht der einzig mögliche. Man kann zeigen, dass für Tensoren 2. Stufe stets drei linear unabhängige Invarianten existieren. Die verschiedenen Sätze von Invarianten wurden in der Literatur (z.B. [31],[32]) intensiv diskutiert. Dabei konnte gezeigt werden, dass aus der Sicht der Mathematik bzw. der Materialtheorie eine Bevorzugung bestimmter Invarianten nicht gerechtfertigt ist. Man kann jedoch leicht erkennen, dass die Darstellungsform Konsequenzen für die experimentelle Verifikation der Parameter in den konstitutiven Gleichungen hat. Damit taucht die Frage auf, ob bestimmte Invarianten für das Experiment sinnvolle Interpretationen zulassen. Offensichtlich ist, dass die erste Invariante des Spannungstensors, da sie mit dem hydrostatischen Spannungszustand verbunden ist, eine derartige Interpretation gestattet. Gleiches gilt für die Vergleichsspannung nach von Mises, die eine zweite Invariante des Spannungsdeviators ist. Leider ist die Interpretierbarkeit der dritten Invarianten nicht so einfach, wobei Überlegungen z.B. zu den experimentell deutbaren Lode-Parameter existieren. Die Überlegungen zu den Invarianten sind im gegebenen Fall bei Beschränkung auf Isotropie teilweise trivial. Bei anderen Konstitutivgesetzen mit transversaler Isotropie oder Orthotropie können derartige Überlegungen die notewendigen experimentellen Arbeiten besser strukturieren bzw. planbar machen. Die allgemeine Form des hier angeführten isotropen Gesetzes wird u.a. auch in [9],[17] angegeben.

Einige elementare Sonderfälle lassen sich problemfrei ableiten. Greift man die Möglichkeit der Aufteilung des Spannungstensors in einen deviatorischen Anteil und einen hydrostatischen Anteil auf

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_m \boldsymbol{E} + \boldsymbol{s},\ tr\boldsymbol{s} = 0 \ \Rightarrow\ \sigma_m = \frac{1}{3} tr\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3} I_1, \tag{3.16}$$

erhält man zunächst eine andere Darstellung für das Potential

$$W = W(I_1, J_{2D}, J_{3D}),\ J_{2D} = -\frac{1}{2} tr\boldsymbol{s}^2,\ J_{3D} = -\frac{1}{3} tr\boldsymbol{s}^3, \tag{3.17}$$

da die möglichen Invariantensätze austauschbar sind und statt der Invarianten des Spannungstensors auch Invarianten des Spannungsdeviators eingesetzt werden können. Der Tensor der Kriechverzerrungsgeschwindigkeiten lässt sich dann wie folgt angeben

$$\dot{\boldsymbol{D}}^{kr} = \frac{\partial W}{\partial I_1}\boldsymbol{E} - \frac{\partial W}{\partial J_{2D}}\boldsymbol{s} + \frac{\partial W}{\partial J_{3D}}\left(\boldsymbol{s}^2 - \frac{1}{3} tr \boldsymbol{s}^2 \boldsymbol{E}\right) \tag{3.18}$$

Man erkennt, dass die Annahme über klassisches Materialverhalten (Inelastizität wird nicht vom hydrostatischen Spannungszustand beeinflusst [33],[34]) unmittelbar eingebaut werden kann. Dazu muss lediglich die Abhängigkeit von der ersten Invarianten aufgehoben werden

$$tr\dot{\boldsymbol{D}}^{kr} = 3\frac{\partial W}{\partial I_1} = 0 \tag{3.19}$$

Die klassischen Kriechgleichungen ergeben sich, wenn weiterhin folgende Annahme Gültigkeit hat

$$\frac{\partial W}{\partial J_{3D}} = 0 \tag{3.20}$$

Die Darstellung der klassischen Kriechgleichungen soll hier in absoluter Tensornotation gegeben werden

$$\dot{\boldsymbol{D}}^{kr} = \frac{3}{2}\frac{\dot{\varepsilon}_{vM}}{\sigma_{vM}}\boldsymbol{s},\ \sigma_{vM}^2 = -3J_{2D},\ \dot{\varepsilon}_{vM} \equiv \frac{\partial W(\sigma_{vM})}{\partial \sigma_{vM}} \tag{3.21}$$

Sie unterscheidet sich inhaltlich aber nicht von [6], [9],[15]. Für die Anwendung ist es wichtig, dass das letztgenannte Gesetz nicht die einzige Möglichkeit ist. Für poröse Materialien und Werkstoffe mit ähnlicher Mikrostruktur kann über die Mitnahme der ersten Invarianten eine bessere Anpassung an das Experiment realisiert werden. Für Werkstoffe, die tensoriell nichtlineares Verhalten zeigen und für die im Experiment sogenannte second-order-effects beobachtet werden (wobei diese nicht klein sein müssen), ist die Mitnahme der dritten Invarianten möglicherweise sinnvoll. Außerdem kann man erkennen, dass das hier diskutierte Gesetz auch auf große Deformationen bei geeigneter Wahl eines Verzerrungstensors, eines Spannungstensors und der Zeitableitung anwendbar ist.

3.2 ANISOTROPIE

Für anisotropes Kriechverhalten gibt es zahlreiche Anwendungsbeispiele. Dazu gehören die faserverstärkten Werkstoffe (s. z.B. [35],[36]) und die Einkristalllegierungen [37],[38]. Die Beschreibung ist jedoch mit zahlreichen Problemen verbunden. So sind die vermuteten Symmetrien schwer zu verifizieren, da die Streuung der Messdaten bis zu 20% betragen kann. Die beim Kriechen auftretenden Symmetrien hängen zusätzlich von der Belastungsgeschichte und den Schädigungen ab [39], dazu kommt eine deutliche Temperaturabhängigkeit (Aluminiumlegierung D16AT - Proben aus gewalzten Blechen: bei 275 °C anisotropes Kriechen, bei 300 °C isotropes Kriechen [40]).

Symmetriebetrachtungen im Zusammenhang mit der direkten Tensornotation gestatten eine effektive Strukturierung der anisotropen Kriechgleichungen. Dabei sind Materialsymmetrien und physikalische Symmetrien zu unterscheiden. Materialsymmetrien sind Symmetrien auf der Mikroebene (Kristallsymmetrien in Metallen und Legierungen, Symmetrien als Folge der Anordnung von Fasern und Partikeln usw.). Die physikalischen Symmetrien sind die Symmetrien der Konstitutivgleichungen. Sie folgen aus den experimentellen Beobachtungen. Die orthogonalen Tensoren $\boldsymbol{Q}$ dienen im Weiteren der Beschreibung der Symmetrien. Besonders häufig treten folgende Symmetrien auf: die transversal-isotrope Symmetrie und die Orthotropie. In diesen Fällen kann man die orthogonalen Tensoren wie folgt spezifizieren. Im Falle einer Spiegelung gilt

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{E} - 2\boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n} \tag{3.22}$$

Dabei ist $\boldsymbol{n}$ die Normale zur Spiegelfläche. Für die Rotation gilt

$$\boldsymbol{Q}(\varphi \boldsymbol{m}) = \boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m} + \cos\varphi(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m}) + \sin\varphi \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{E} \tag{3.23}$$

mit der Rotationsachse. Beide Tensoren genügen zur Charakterisierung der entsprechenden Symmetrien.

Nachfolgend sollen kurz transversal-isotrope Kriechgleichungen diskutiert werden. Ausgangspunkt ist die Bedingung

$$W\left(\boldsymbol{Q} \bullet \boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{Q}^T\right) = W(\boldsymbol{\sigma}), \tag{3.24}$$

die für

$$(3.25)\quad \boldsymbol{Q}(\varphi\boldsymbol{m}) = \boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m} + \cos\varphi(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}) + \sin\varphi\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{E}$$

mit $-\pi < \varphi < \pi$, $\boldsymbol{m} = const.$, $\boldsymbol{m}\bullet\boldsymbol{m} = 1$ zu überprüfen ist. Es folgt zunächst

$$(3.26)\qquad (\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{m})\bullet\bullet\frac{\partial W}{\partial\sigma} = 0$$

Diese Differentialgleichung hat als charakteristisches System [41]

$$(3.27)\qquad \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds} = \boldsymbol{m}\times\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{m}$$

Die Lösungen lauten allgemein

$$(3.28)\qquad \sigma^k(s) = \boldsymbol{Q}(s\boldsymbol{m})\bullet\boldsymbol{\sigma}_0^k\bullet\boldsymbol{Q}^T(s\boldsymbol{m}),\ k = 1,2,3$$

und die entsprechenden Integrale erhält man zu

$$(3.29)\ tr(\boldsymbol{\sigma}),\ tr(\boldsymbol{\sigma}^2),\ tr(\boldsymbol{\sigma}^3),\ \boldsymbol{m}\bullet\boldsymbol{\sigma}\bullet\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{m}\bullet\boldsymbol{\sigma}^2\bullet\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{m}\bullet\boldsymbol{\sigma}^2\bullet(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{\sigma}\bullet\boldsymbol{m})$$

Derartige Sätze transversal-isotroper Invarianten wurden u.a. auch in [42] abgeleitet. Mathematisch gesehen hat das charakteristische System jedoch nur maximal 5 unabhängige Integrale [41]. In [43],[44] konnte nachgewiesen werden, dass die eingeführten sechs Integrale nicht völlig unabhängig sind.

Die Kriechgleichungen lassen sich wie folgt angeben. Spaltet man zunächst den Spannungstensor auf

$$(3.30)\qquad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{m}\bullet\boldsymbol{\sigma}\bullet\boldsymbol{m}\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m} + \boldsymbol{\sigma}_p + \tau_m\otimes\boldsymbol{m} + \boldsymbol{m}\otimes\tau_m,$$

wobei $\boldsymbol{m}$ die Richtung der transversalen Isotropie ist, $\boldsymbol{\sigma}_p$ ist der ebene Teil des Tensors in der Ebenen, die orthogonal zu der Richtung der transversalen Isotropie liegt, und τ_m ist ein Schubspannungsvektor, lassen sich mit der Aufspaltung von $\boldsymbol{\sigma}_p$ entsprechend

$$(3.31)\qquad \boldsymbol{\sigma}_p = \boldsymbol{s}_p + \frac{1}{2}tr\boldsymbol{\sigma}_p\left(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m}\right),\ tr\boldsymbol{s}_p = 0$$

die nachfolgenden Invarianten einführen

(3.32)
$$I_{1m} = \boldsymbol{m} \bullet \boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{m}, \quad I_{2m} = \frac{1}{2} tr \boldsymbol{\sigma}_p, \qquad I_{3m} = tr \boldsymbol{s}_p^2,$$

(3.33)
$$I_{4m} = \boldsymbol{\tau}_m \bullet \boldsymbol{\tau}_m, \qquad I_{5m} = \boldsymbol{\tau}_m \bullet \boldsymbol{s}_p \bullet \boldsymbol{\tau}_m, \quad I_{6m} = \boldsymbol{m} \bullet (\boldsymbol{\tau}_m \bullet \boldsymbol{s}_p \times \boldsymbol{\tau}_m),$$

Die Zwangsbedingung für die Invarianten ergibt sich dann zu

(3.34)
$$I_{6m}^2 = I_{3m} I_{4m} - I_{5m}^2$$

Der Ansatz für das Potenzial lautet somit

(3.35)
$$W = W(I_{1m}, I_{2m}, I_{3m}, I_{4m}, I_{5m})$$

Nimmt man weiterhin an, dass das Material sich inkompressibel verhalten soll, gilt

(3.36)
$$\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \bullet \bullet \boldsymbol{E} = 0 \;\Rightarrow\; W = W(2I_{1m} - I_{2m}, I_{3m}, I_{4m}, I_{5m})$$

mit $2I_{1m} - I_{2m} = 3\boldsymbol{m} \bullet \boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{m} - tr\boldsymbol{\sigma} = 3\boldsymbol{m} \bullet \boldsymbol{s} \bullet m$. Für den Fall, dass das Material eine Analogie zum klassischen von Mises-Material bildet, muss eine Vergleichsspannung $\boldsymbol{\sigma}_V$ eingeführt werden, die quadratisch bezüglich der folgenden Argumente sein sollte: $2I_{1m} - I_{2m}, I_{3m}, I_{4m}, I_{5m}$. Diese lässt sich wie folgt definieren

(3.37)
$$\boldsymbol{\sigma}_V^2 = J_0^2 + 3\alpha_1 J_1 + 3\alpha_2 J_2, \qquad \alpha_1 > 0, \qquad \alpha_2 > 0$$

Hierbei wurden folgende Abkürzungen verwendet

(3.38)
$$J_0 = \boldsymbol{m} \bullet \boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{m} - \frac{1}{2} tr\boldsymbol{\sigma}_p, \quad tr\boldsymbol{\sigma}_p = tr\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{m} \bullet \boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{m},$$

(3.39)
$$2J_1 = tr\boldsymbol{s}_p^2 = tr\boldsymbol{\sigma}^2 - 2\boldsymbol{m} \bullet \boldsymbol{\sigma}^2 \bullet \boldsymbol{m} + (\boldsymbol{m} \bullet \boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{m})^2 - \frac{1}{2} (tr\boldsymbol{\sigma}_p)^2,$$

(3.40)
$$J_2 = \boldsymbol{\tau}_m \bullet \boldsymbol{\tau}_m = \boldsymbol{m} \bullet \boldsymbol{\sigma}^2 \bullet \boldsymbol{m} - (\boldsymbol{m} \bullet \boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{m})^2$$

Mit dem Norton-Bailey-Odqvist-Potenzial

(3.41)
$$W = \frac{a}{n+1} \boldsymbol{\sigma}_V^{n+1}$$

folgt die Kriechgleichung

(3.42)

$$\boldsymbol{D}^{kr} = \frac{3}{2} a \boldsymbol{\sigma}_V^{n-1} \left[J_0 \left(\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m} - \frac{1}{3} \boldsymbol{E} \right) + \alpha_1 \boldsymbol{s}_p + \alpha_2 \left(\boldsymbol{\tau}_m \otimes \boldsymbol{m} + \boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{\tau}_m \right) \right]$$

Der klassische Fall ergibt sich aus $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Ein Beispiel zur Kennwertbestimmung ist in [18],[43] gegeben.

Das anisotrope Kriechgesetz, welches hier für transversale Isotropie (Anfangsisotropie) abgeleitet wurde, kann auch auf den Fall des Tertiärkriechens erweitert werden. Ausgangspunkt ist das bereits diskutierte Kriechgesetz und eine postulierte Schädigung, die durch ihre Evolution beschrieben wird. Dabei wird das Effektivspannungsgesetz wie im isotropen Fall eingesetzt. Mit dem Kriechgesetz

(3.43)

$$\boldsymbol{D}^{kr} = \frac{3}{2} a \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}_V^{n-1} \left[\widetilde{J}_0 \left(\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m} - \frac{1}{3} \boldsymbol{E} \right) + \alpha_1 \widetilde{\boldsymbol{s}}_p + \alpha_2 \left(\widetilde{\boldsymbol{\tau}}_m \otimes \boldsymbol{m} + \boldsymbol{m} \otimes \widetilde{\boldsymbol{\tau}}_m \right) \right]$$

wobei die mit Tilde gekennzeichneten Variablen effektive Größen sind. Dabei ist jedoch zu beachten, dass es bisher kaum übereinstimmende Ansichten zur Formulierung dieser effektiven Größen gibt (vgl. z.B. [45]-[47]). Daneben müssen Evolutionsgleichungen für die anisotrope Schädigung postuliert werden, wobei auch hier die Vielfalt der Angebote davon zeugt, dass noch weiterer Forschungsbedarf besteht. Zum Stand der Forschung wird u.a. in [18],[25] berichtet.

4 BEISPIELE

Die nachfolgende Beispiele dienen einerseits dem Nachweis, dass bei Anwendung der Kriechmechanik auf strukturmechanische Probleme, die mit einer Dimensionsreduzierung um 1 oder 2 (Schalen, Platten, Balken im Sinne von zwei- bzw. eindimensionalen Problemen der Strukturmechanik) verbunden sind, unerwartete Schwierigkeiten beim Einsatz ursprünglich dreidimensionaler Kriechschädigungsgesetze auftreten können. Andererseits können die nachfolgenden akademischen Beispiele als benchmarks zum Testen kommerzieller Finite-Elemente-Software dienen.

4.1 BALKEN

Die klassische Balkentheorie nach Euler-Bernoulli basiert auf einer vereinfachten Kinematik. Es wird davon ausgegangen, dass Querschnitte, die vor der Deformation orthogonal zur Balkenachse und eben sind, auch nach der Deformation diese Eigenschaften besitzen. Die Gültigkeit dieser Annahmen lässt sich für klassische Konstruktionswerkstoffe und linear-elastisches Materialverhalten bei kleinen Verformungen auch im Experiment nachweisen. Im Zusammenhang mit Kriechschädigungen muss man jedoch davon ausgehen, dass die o.g. Eigenschaften nicht mehr gegeben sind. Ursache dafür ist u.a., dass die Kriechprozesse nicht mehr gleichmäßig über den Querschnitt anzutreffen sind und dass die Deformationen nichtlinear in Richtung der Querschnittskoordinaten ablaufen. Daher muss die Theorie nach Euler-Bernoulli verbessert werden. Die einfachste Form ist die Timoshenko-Theorie.

Vernachlässigt man die elastische Lösung, lässt sich das Kriechproblem im einfachsten Fall analytisch lösen. Für das stationäre Kriechen eines beidseitig einfach gelagerten Balkens unter konstant verteilter Querbelastung erhält man nach der Euler-Bernoulli-Theorie für die Durchbiegungen ein Polynom der Ordnung $2n+2$, wobei n der Kriechexponent ist. Aus der Festigkeitslehre ist bekannt, dass die elastische Lösung ein Polynom 4. Ordnung ist. Für klassische Kriechwerkstoffe liegt der Wertebereich des Kriechexponenten bei $3 \leq n \leq 7$ (es gibt auch Beispiele, wo n bis 12 und höher geht). Daraus kann man schlussfolgern, dass für Aufgaben über das stationäre Kriechen, die mit Variationsmethoden behandelt werden sollen, Testfunktionen mindestens vom Grad $2n + 2$ verwendet werden müssen. Weiterhin ist hervorzuheben, dass der Grad materialspezifisch ist, da der Kriechexponent in die Polynomordnung eingeht. Nimmt man als Startlösung (wie oft empfohlen) die elastische Approximation, können die Ergebnisse weit von der Realität entfernt liegen.

Für den Kriechschädigungsfall lassen sich keine analytischen Lösungen auch im einfachsten Fall angeben. Die entsprechenden Aufgaben sind näherungsweise zu behandeln, wobei halbanalytische Methoden zum Einsatz kommen können. Die vom stationären Fall bekannten qualitativen und quantitativen Aussagen sind prinzipiell weiterhin gültig.

In [48] wurde erstmals eine verbesserte Theorie unter Berücksichtigung des

Querschubs vorgeschlagen. Die Grundidee ist analog zum elastischen Fall in Ergänzung zum translatorischen Freiheitsgrad (Verschiebungen in Richtung der Balkenlängsachse) wurde ein rotatorischer Freiheitsgrad (Drehungen des Querschnitts, so dass dieser eben, jedoch nicht mehr orthogonal nach der Deformation bezüglich der Balkenachse bleibt) eingeführt. Eine entsprechende Theorie wurde mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen abgeleitet, wobei die Annahme über die Verteilung der Verschiebungen und/oder Spannungen über die Dicke spezifiziert wurden. Aus der klassischen Theorie zum elastischen Verhalten ist bekannt, dass die Normalspannungen in Längsrichtung linear über die Balkendicke verteilt sind, die Querschubspannungen parabolisch und die Normalspannungen in Querrichtung kubisch. Wählt man jetzt beispielsweise ein zunächst nicht spezifiziertes Verteilungsgesetz über die Balkendicke für die Querschubspannungen, erhält man nach Anwendung eines gemischten Variationsprinzips zunächst die üblichen Gleichgewichtsbedingungen für die Schnittgrößen. Zusätzlich ergibt sich eine Gleichung für die Querschubkraft, die man als konstitutive Beziehung interpretieren kann. Bei Darstellung dieser Gleichung in Analogie zu Darstellungen, die vom elastischen Timoshenko-Balken bekannt sind, kann man erkennen, dass diese konstitutive Gleichung einen Korrekturfaktor beinhaltet (in Analogie zur Schubkorrektur). Dieser hängt von der zuvor eingeführten und bis zu diesem Zeitpunkt nicht spezifizierten Verteilungsfunktion ab. Für den Fall eines postulierten linearen Gesetzes ist der Wert der Korrektur $k = 1$. Mit einem kubischen Ansatz folgt $k = \frac{5}{6}$, d.h. man erhält die Reissnersche Approximation. Die beste Korrektur für stationäres Kriechen folgt zu

$$k = \frac{3n+2}{4n+2} \tag{4.1}$$

Man kann erkennen, dass die Korrektur vom materialspezifischen Kriechexponenten abhängt. Die Korrektur ist umso kleiner, wie der Kriechexponent wächst. Die Zunahme des Kriechexponenten ist auch mit einer Zunahme der Kriechgeschwindigkeit verbunden. Da Schädigung an eine Erhöhung der Kriechgeschwindigkeit gekoppelt ist, kann man davon ausgehen, dass diese eine weitere Abnahme der Korrektur zur Folge hat.

4.2 ROHRKRÜMMER

Ein zweites Beispiel soll kurz Einblick geben, mit welchen Problemen man bei Aufgabenstellungen aus der Praxis rechnen muss. In [49] wurde ausführlich die Kriechschädigungsanalyse für einen Rohrkrümmer diskutiert. Dabei Stand im Mittelpunkt die Frage, ob man dieses dünnwandige Bauteile mit zwei- oder dreidimensionalen finiten Elementen rechnen sollte. Für den Rohrkrümmer wurde der Lastfall Innendruck angenommen, die Temperatur wurde konstant gehalten. Als Randbedingungen wurden rein translatorische (nur Verschiebungen), aber auch die Kombination aus translatorischen und unabhängigen rotatorischen gewählt. Der Werkstoff, aus dem der Rohrkrümmer bestand, war Stahl 316. Das Kriechschädigungsverhalten wurde mit Hilfe des Modells von Kachanov-Rabotnov-Leckie-Hayhurst beschrieben, wobei alle Kennwerte aus der Literatur bekannt waren. Die Schädigungsevolution konnte im betrachteten Fall durch zwei Spannungen beeinflusst werden: durch die maximale Zugspannung und durch die von Mises-Vergleichspannung. Experimentell konnte bestätigt werden, dass die Schädigung für den gegebenen Stahl durch die maximale Zugspannung beeinflusst wird.

Sämtliche Rechnungen erfolgten auf der Basis des kommerziellen Finite-Elemente-Systems ANSYS, wobei die für plastische und Kriechrechnungen empfohlenen Elemente SHELL43 und SOLID45 zum Einsatz kamen. Zunächst wurden die Elemente für elastischen Fall getestet. Hier zeigten die Rechnungen auf der Basis der zweidimensionalen und der dreidimensionalen Elemente eine sehr gute Übereinstimmung. Mit dem Übergang zu Kriechschädigungsrechnungen war eine derartige Übereinstimmung auch nicht näherungsweise vorhanden. Die erste Rechnung wurde für das korrekte Werkstoffmodell (Schädigung durch die maximale Zugspannung gesteuert) und die nahe liegenden Randbedingungen (rein translatorische) vorgenommen. Die Ergebnisse für die Spannungen und für die Schädigungen zeigten keine Übereinstimmung insbesondere bezüglich der kritischen Bereiche (maximale Beanspruchung, maximale Schädigung). Weitere Rechnungen, bei denen die Randbedingungen bzw. das Materialmodell geändert wurden, brachten eine qualitativ und quantitativ befriedigende Übereinstimmung, d.h. das falsche Materialmodell und die „nichtklassischen Randbedingungen“ führten zu dieser Übereinstimmung.

Derartige Effekte sind zunächst schwer zu erklären. Bei dem Materialmodell zeigt jedoch eine kurze Analyse, dass die von Mises-Vergleichspannung nicht sensitiv gegenüber Zug und Druck bzw. generell gegenüber der Art des Spannungszustandes ist. Kriechschädigungsprozesse sind jedoch hochgradig sensitiv bezüglich der Art des Beanspruchungszustandes. So nimmt bei Zug die

Schädigung zu, während es bei Druck nicht zum „Ausheilen“ der Schädigung kommt. Die Effekte, die mit der Änderung der Randbedigungen verbunden sind, zeugen davon, dass die Querschnitte zu steif mit den rein translatorischen Randbedingungen simuliert werden. Mit der Einführung eines Berechnungsmodells im Sinne von Timoshenko (schubweiches Modell) gelang eine wesentlich bessere Anpassung der zweidimensionalen und der dreidimensionalen Rechnung. Zusätzlich konnte nachgewiesen werden, dass die Integration über die Dicke beim Element SHELL43 mit zu wenig Gauß-Punkten (hier 5) vorgesehen war. Testrechnungen mit anderer kommerzieller Softerware zeigten, dass 17 Integrationspunkte zu einer sehr guten Übereinstimmung führten [18].

5 AUSBLICK

Der nachfolgend formulierte Ausblick ist rein subjektiv und erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Es werden nur Ausblicke auf die im Beitrag diskutierten Fragen gegeben. Gleichfalls wichtige Probleme, wie z.B. das Verhalten bei dynamischen Lastwechseln usw., bleiben unberücksichtigt, wobei hier noch sehr viel Forschungsbedarf besteht. Derartige Lastwechsel sind in der Praxis der Normalfall, jedoch ist die experimentelle Absicherung von bestimmten Fakten sowie die theoretisch Basis zur Beschreibung noch nicht ausreichend entwickelt. Das Anpassen von weitgehend statischen Lösungen durch Modifikation der Gleichungen an dynamische Prozesse ist nicht der eleganteste Ausweg.

5.1 EIGENE ARBEITEN

Die Kriechmechanik ist bis heute kein abgeschlossenes Gebiet, da zahlreiche Fragen noch nicht ausreichend bzw. abschließend geklärt sind. Nimmt man als Ausgangspunkt für Formulierung der eigenen Ziele die zu Beginn beschriebenen drei Aufgaben, lassen sich folgende Schwerpunkte formulieren. Im Zusammenhang mit der Beschreibung des Konstitutivverhaltens ist eine offene Frage die Formulierung von einheitlichen Gesetzen für den Bereich niedriger, moderater und höherer Spannungen. Im Bereich niedrigerer Spannungen wirken andere Kriechmechanismen als im Bereich höherer Spannungen. Im Rahmen des phänomenologischen Konzepts ist damit eine analytische Gleichung zu formulieren, die für den gesamten Spannungsbereich gilt.

Sie sollte möglichst einfach sein (bei niedrigen Spannungen werden lineare Gesetze verwendet, bei höheren Spannungen gilt meist das Potenzgesetz). Möglichst einfach bedeutet auch, dass nicht zu viele Werkstoffparameter ermittelt werden müssen und das die Erweiterung auf dreidimensionale Spannungszustände sowie auf nicht-isotherme Prozesse elementar vorgenommen werden kann. Erste Ansätze zur Einbeziehung der Temperaturabhängkeit sind in [50] dargestellt. Da Kriechprozesse sensitiv gegenüber der Art des Spannungszustandes sind, müssen auch hierzu Überlegungen angestellt werden. Abschließend ist zu klären, ob dass in [43] entwickelte Konzept zur Behandlung von Anisotropien auch auf andere Fälle der Anisotropie übertragen werden kann. In der genannten Arbeit wird transversale Isotropie behandelt. Von besonderem Interesse für die Praxis ist zumindest noch die Orthotropie.

5.2 OFFENE FRAGEN

Bei den offenen Fragen gibt es zahlreiche Probleme, die auch vom Standpunkt der Theorie bisher nicht gelöst sind. Hierzu gehört beispielsweise eine konsequente kontinuumsmechanische Darstellung der theoretischen Grundlagen unter Einbeziehung der Thermodynamik und der materialtheoretischen Begründung von Kriechgleichungen. Zahlreiche Probleme der Kriechmechanik beziehen sich auf dünnwandige Strukturen, die im Sinne der Strukturmechanik als eindimensionale bzw. zweidimensionale Modelle behandelt werden. Derartige Modelle werden oftmals aus der dreidimensionalen Theorie mit Hilfe von Hypothesen oder mathematischen Techniken abgeleitet. Daneben gibt es noch die direkte Formulierung von ein- bzw. zweidimensionalen strukturmechanischen Gleichungen, wobei es im Falle von Kriechproblemen noch keine Ansätze gibt, wie eine entsprechende Theorie aussehen könnte. Ursache dafür ist, dass Kriechschädigung zu starken Inhomogenitäten über die Dicke führt. Damit treten neben den bekannten Problemen bei der Ableitung bzw. der Begründung zwei- oder eindimensionaler Aufgaben noch Schwierigkeiten in den Konstitutivgesetzen auf. Abschließend ist auch zu klären, ob Mikro-Makro-Ansätze in Analogie zur Plastizitätstheorie angewendet werden können. Letztere Ansätze, die zunächst das Problem auf eine Lösung innerhalb eines repräsentativen Volumens reduzieren und dann geeignete Homogenisierungen einsetzen, sind auch aus der Kompositmechanik bekannt. Ihre Grenzen und Möglichkeiten werden jedoch noch nicht hinreichend beschrieben, so dass offen bleibt, ob sie in der Kriechmechanik eingesetzt werden können.

Literatur

[1] Altenbach, H. (1990). Zu einigen Aspekten der klassischen Kontinuumsmechanik und ihrer Erweiterungen. - *In: Technische Mechanik* **11** 2. - S. 95 - 105 1.1

[2] Hayhurst, D.R.; Wong, M.T.; Vakili-Tahami, F.: The use of CDM analysis techniques in high temperature creep failure of welded structures. - *In: JSME Int. J. Series A* **45**(2002). - pp. 90 - 97 1.1

[3] Le May, I.; da Silveria, T.L.; Cheung-Mak, S.K.P.: Uncertainties in the evaluations of high temperature damage in power stations and petrochemical plant. - *Int. J. of Pressure Vessels & Piping* **59**(1994). - pp. 335 - 343 1.1

[4] Neubauer, B.; Wedel, U.: Restlife estimation of creeping components by means of replicas. - *In: Advances in Life Prediction Methods (Eds D.A. Woodford & J.R. Whitehead), ASME*, 1983. - pp. 307 - 314 1.1

[5] Odqvist, F.K.G.; Hult, J.: Kriechfestigkeit metallischer Werkstoffe. - *Springer: Berlin u.a.*, 1962 1.2

[6] Odqvist, F.K.G.: Historical survey of the development of creep mechanics from its beginnings in the last century to 1970. - In: Creep in Structures (Eds A.R.S. Ponter & D.R. Hayhurst), *Springer*, 1981. - pp. 1 - 12 1.2, 3.1

[7] da C. Andrade, E.N.: On the viscous flow of metals, and allied phenomena. - *In: Proc. R. Soc. Lond. A* LXXXIV(1910). - pp. 1 - 12 1.2, 2.1

[8] Hult, J.A.: Creep in Engineering Structures. - *Blaisdell Publishing Company: Waltham*, 1966 1.2

[9] Rabotnov, Yu. N.: Creep Problems in Structural Members. - *North-Holland: Amsterdam*, 1969 3.1, 3.1

[10] Penny, R.K.; Mariott D.L.: Design for Creep. - *Chapman & Hall: London*, 1995

[11] Kraus, H.: Creep Analysis. - *Wiley & Sons: New York*, 1980

[12] Malinin, N.N.: Raschet na polzuchest' konstrukcionnykh elementov (Creep calculations of structural elements, in Russ.). - *Mashinostroenie: Moskva*, 1981

[13] Boyle, J.T.; Spence, J.: Stress Analysis for Creep. - *Butterworth: London*, 1983

[14] Lemaitre, J.; Chaboche, J.-L.: Mechanics of Solid Materials. -*Cambridge University Press: Cambridge*, 1990

[15] Skrzypek, J.J.: Plasticity and Creep. - *CRC Press: Boca Raton*, 1993 3.1

[16] Skrzypek, J.J.; Gancarski, A.: Modelling of Material Damage and Failure of Structures. -*Springer: Berlin*, 1998 (Foundation of Engineering Mechanics)

[17] Betten, J.: Creep Mechanics. - *Springer: Berlin*, 2005 3.1

[18] Naumenko, K.; Altenbach, H.: Modeling of Creep for Structural Analysis. - *Springer: Berlin*, 2007 (Foundations of Engineering Mechanics) 1.2, 3.2, 3.2, 4.2

[19] Hoff, N.J. (Ed.): Creep in Structures. - *Springer: Berlin*, 1962 1.2

[20] Hult, J. (Ed.): Creep in Structures. - *Springer: Berlin*, 1972 1.2

[21] Ponter, A.R.S.; Hayhurst, D.R. (Eds): Creep in Structures. - *Springer: Berlin*, 1981 1.2

[22] Zyczkowski, M. (Ed.): Creep in Structures. - *Springer: Berlin u.a.*,1991 1.2

[23] Murakami, S.; Ohno, N. (Eds): IUTAM Symposium on Creep in Structures. - *Kluwer: Dordrecht*, 2001 1.2

[24] Altenbach, H.; Skrzypek, J.J. (Eds): Creep and Damage in Materials and Structures. CISM Courses and Lectures No. 399. - *Springer: Wien, New York*, 1999 1.2

[25] Skrzypek, J.J.; Ganczarski, A. (Eds): Anisotropic Behaviour of Damaged Materials. - *Springer: Berlin*, 2003 3.2

[26] Ohno, N.; Uehara, T. (Eds): Engineering Plasticity and Its Applications from Nanoscale to Macroscale. - *Stafa-Zürich: Trans Tech Publications Ltd.*, 2007 1.2

[27] Altenbach, H. : Creep analysis of thin-walled structures. - In: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* **82**(2002)8. - pp. 507 - 533 1.2

[28] Ashby, M.F.; Gandhi, C.; Taplin, D.M.R.: Fracture-mechanism maps and their construction for f.c.c. metals and alloys. - In: *Acta Metall.* **27**(1979). - pp. 699 - 729 2.2

[29] Nabarro, F.R.N., de Villiers, H.L.: The Physics of Creep. Creep and Creep-resistant Alloys. - *London: Taylor & Francis*, 1995

[30] Rösler, J.; Harders, H.; Bäker, M.: Mechanisches Verhalten der Werkstoffe. - *Stuttgart-Leipzig-Wiesbaden: B.G. Teubner*, 2003 2.2

[31] Zyczkowski, M.: Combined Loadings in the Theory of Plasticity. - *Warszawa: PWN*, 1981 3.1, 3.1

[32] Altenbach, H.; Altenbach, J.; Zolochevsky, A.: Erweiterte Deformationsmodelle und Versagenskriterien der Werkstoffmechanik. - *Stuttgart: Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie*, 1995 3.1

[33] Odqvist, F.K.G.: Mathematical Theory of Creep and Creep Rupture. - *Oxford University Press*, 1974 3.1

[34] Reiner, M.: Deformation and Flow. An Elementary Introduction to Rheology. - *London: H.K. Lewis & Co.*, 1969 3.1

[35] Robinson, D.N., Binienda, W.K., Ruggles, M.B.: Creep of polymer matrix composites. I: Norton/Bailey Creep Law for transverse isotropy. - In: *Trans. ASCE. J. Engng Mech.* **129**(2003) 3. - pp. 310 - 317 3.2

[36] Robinson, D.N., Binienda, W.K., Ruggles, M.B.: Creep of polymer matrix composites. II: Monkman-Grant failure relationship for transverse isotropy. - In: *Trans. ASCE. J. Engng Mech.* **129**(2003) 3. - pp. 318 - 323 3.2

[37] Bertram, A., Olschewski, J.: Anisotropic modelling of the single crystal superalloy SRR99. - *Comp. Mat. Sci.* **5**(1996). - pp. 12 - 16 3.2

[38] Mahnken, R.: Anisotropic creep modeling based on elastic projection operators with applications to CMSX-4 superalloy. - *Int. J. Mech. Sci.* **14** (1998). - pp. 235 - 280 3.2

[39] El-Magd, E., Betten, J., Palmen, P.: Auswirkung der Schädigungsanisotropie auf die Lebensdauer von Stählen bei Zeitstandbeanspruchung. - In: *Mat.-wiss. u. Werkstofftechn.* - **27** (1996). - pp. 239 - 245 3.2

[40] Konkin, V.N., Morachkovskij, O.K.: Polzuchest' i dlitel'naya prochnost' legkikh splavov, proyavlyayushchikh anizotropnye svoistva (Creep and long-term strength of light alloys with anisotropic properties, in Russ.). - *Problemy prochnosti* (1987)5. - pp. 38 - 42 3.2

[41] Courant, R., Hilbert, D.: Methods of Mathematical Physics, Partial Differential Equations, Vol. 2 . - *New York: Wiley Interscience*, 1989 3.2, 3.2

[42] Bruhns, O., Xiao, H., Meyers, A.: On representation of yield functions for crystals, quasicrystals and transversely isotropic solids. - *Eur. J. Mech. A/Solids* **18** (1999). - pp. 47 - 67 3.2

[43] Naumenko, K.; Altenbach, H.: A phenomenological model for anisotropic creep in a multi-pass weld metal. - In: *Arch. Appl. Mech.* **74**(2005). - pp. 808 - 819/DOI 10.1007/s00419-005-0409-2 3.2, 3.2, 5.1

[44] Altenbach, H.; Naumenko, K.; Zhilin, P.A.: A note on transversely-isotropic invariants. - In: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* **86**(2006)2. - pp. 162 - 168/ DOI10.1002/zamm.200510227 3.2

[45] Cordebois, J., Sidoroff, F.: Damage induced elastic anisotropy. - In. Mechanical Behavioors of Anisotropic Solids (Ed. J.P. Boehler). - *Boston: Martinus Nijhoff*, 1983. - pp. 761 - 774 3.2

[46] Betten, J.: Materialgleichungen zur Beschreibung des sekundären und tertiären Kriechverhaltens anisotroper Stoffe. - In: *ZAMM* **64**(1984). - S. 211 - 220

[47] Murakami, S., Sanomura, Y., Hattori, M.: Modelling of the coupled effect of plastic damage and creep damage in Nimonic 80A. - In: *Int. J. Solids Struct.* **22**(1986)4. - pp. 373 - 386 3.2

[48] Naumenko, K.: On the use of the first order shear deformation models of beams, plates and shells in creep lifetime estimations. - In: *Technische Mechanik* **20**(2000)3. - S. 215 - 226 4.1

[49] Altenbach, H., Kushnevsky, V., Naumenko, K.:On the use of solid- and shell-type finite elements in creep-damage predictions of thinwalled structures. - In: *Arch. Appl. Mech.* **71**(2001). - pp. 164 - 181 4.2

[50] Kostenko, Y.; Lvov, G,; Gorash, E.; Altenbach, H.; Naumenko, K.: Power plant component design using creep-damage analysis. - In: *Proc. of 2006 ASME Int. Mech. Engng Congress and Exposition. - ASME*, 2006, IMECE2006-13710. - pp. 1 - 10 5.1