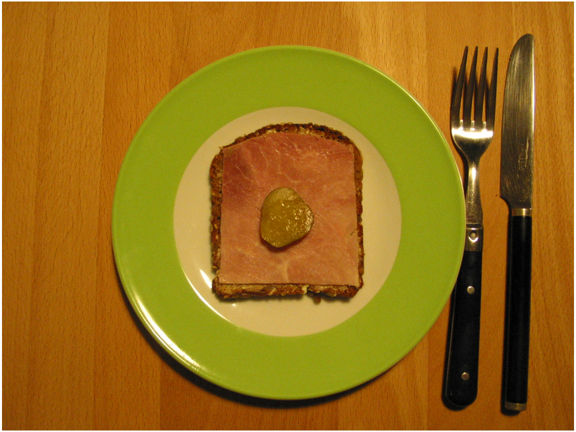
Geometrische Topologie

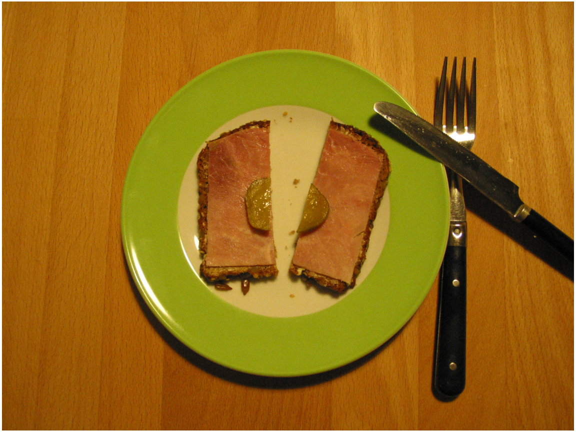
Wer Brötchen gerecht teilen kann, der kann auch Igel kämmen

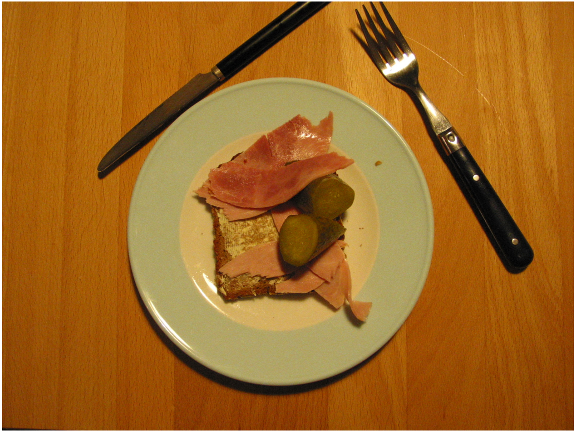
Dirk A. Lorenz

Winterseminar AG Technomathematik, Uttendorf

14. Februar 2007







Der Brötchensatz

Frage

Kann man das Brot mit einem geraden Schnitt so teilen,
dass Brot, Schinken und Gurke
in gleich große Hälften zerlegt werden?

Der Brötchensatz

Frage

Kann man das Brot mit einem geraden Schnitt so teilen,
dass Brot, Schinken und Gurke
in gleich große Hälften zerlegt werden?

Frage

Gegeben seien 3 abgeschlossene Mengen im $\boldsymbol{R}^3$.
Gibt es eine Hyperebene, so dass jede Menge zu gleichen Teilen auf beiden Seiten der Hyperebene liegt?

Der Brötchensatz

Frage

Kann man das Brot mit einem geraden Schnitt so teilen,
dass Brot, Schinken und Gurke
in gleich große Hälften zerlegt werden?

Frage

Gegeben seien n abgeschlossene Mengen im $\boldsymbol{R}^n$.
Gibt es eine Hyperebene, so dass jede Menge zu gleichen Teilen auf beiden Seiten der Hyperebene liegt?

Der Brötchensatz

Frage

Kann man das Brot mit einem geraden Schnitt so teilen,
dass Brot, Schinken und Gurke
in gleich große Hälften zerlegt werden?

Stone-Tukey-Theorem

Gegeben seien n abgeschlossene Mengen im $\boldsymbol{R}^n$.
Es gibt eine Hyperebene, so dass jede Menge zu gleichen Teilen auf beiden Seiten der Hyperebene liegt.

Hilfsmittel: Der Satz von Borsuk-Ulam

Satz (Borsuk-Ulam)

Sei $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ eine stetige Abbildung. Dann gibt es einen Punkt $p \in S^{n-1}$, so dass $f(p) = f(-p)$.

Hilfsmittel: Der Satz von Borsuk-Ulam

Satz (Borsuk-Ulam)

Sei $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ eine stetige Abbildung. Dann gibt es einen Punkt $p \in S^{n-1}$, so dass $f(p) = f(-p)$.

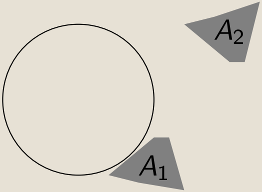
Folgerung

Zu jedem Zeitpunkt gibt es gegenüberliegende Punkte auf der Erde, so dass dort gleicher Druck und gleiche Temperatur herrschen.

Beweis des Brötchensatzes

Beweis

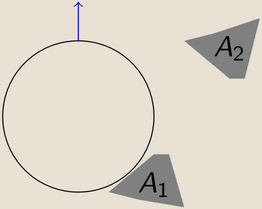
- Zu jedem $p \in S^{n-1}$ betrachte Familie von orthogonalen Hyperebenen.
- Es gibt Hyperebene H_p die A_n in gleiche Teile zerlegt.



Beweis des Brötchensatzes

Beweis

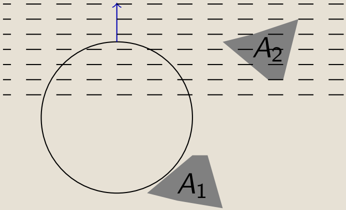
- Zu jedem $p \in S^{n-1}$ betrachte Familie von orthogonalen Hyperebenen.
- Es gibt Hyperebene H_p die A_n in gleiche Teile zerlegt.



Beweis des Brötchensatzes

Beweis

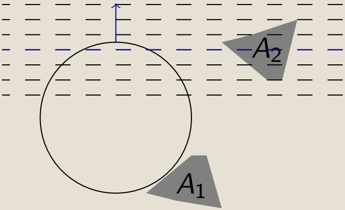
- Zu jedem $p \in S^{n-1}$ betrachte Familie von orthogonalen Hyperebenen.
- Es gibt Hyperebene H_p die A_n in gleiche Teile zerlegt.



Beweis des Brötchensatzes

Beweis

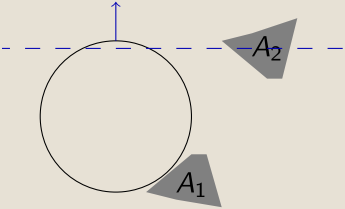
- Zu jedem $p \in S^{n-1}$ betrachte Familie von orthogonalen Hyperebenen.
- Es gibt Hyperebene H_p die A_n in gleiche Teile zerlegt.



Beweis des Brötchensatzes

Beweis

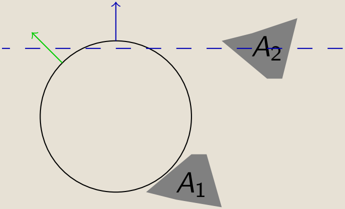
- Zu jedem $p \in S^{n-1}$ betrachte Familie von orthogonalen Hyperebenen.
- Es gibt Hyperebene H_p die A_n in gleiche Teile zerlegt.



Beweis des Brötchensatzes

Beweis

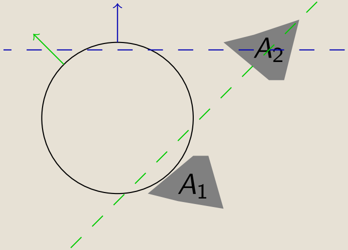
- Zu jedem $p \in S^{n-1}$ betrachte Familie von orthogonalen Hyperebenen.
- Es gibt Hyperebene H_p die A_n in gleiche Teile zerlegt.



Beweis des Brötchensatzes

Beweis

- Zu jedem $p \in S^{n-1}$ betrachte Familie von orthogonalen Hyperebenen.
- Es gibt Hyperebene H_p die A_n in gleiche Teile zerlegt.



Beweis des Brötchensatzes II

Beweis Fortsetzung.

- Definiere $f : S^{n-1} \to \boldsymbol{R}^{n-1}$ durch

$$
\begin{aligned}
f(p) = &(\text{Volumen von } A_1 \text{ oberhalb von } H_p,\\
&\dots\\
&\text{Volumen von } A_{n-1} \text{ oberhalb von } H_p)
\end{aligned}
$$

- Borsuk-Ulam: Es existiert p mit $f(p) = f(-p)$. $\Longrightarrow$ A_i hat gleiches Volumen ober- und unterhalb von H_p.

$\square$

Der Igel-Satz

Behauptung

Jeder stetig gekämmte Igel hat mindestens einen Glatzpunkt.

Der Igel-Satz

Satz

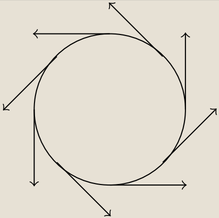
Ist n ungerade, so gibt es kein (stetig diffbares) Vektorfeld auf der n-Sphäre $S^{n-1} \subset \boldsymbol{R}^n$, welches tangential und ohne Nullstellen ist.

Der Igel-Satz

Satz

Ist n ungerade, so gibt es kein (stetig diffbares) Vektorfeld auf der n-Sphäre $S^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$, welches tangential und ohne Nullstellen ist.

Beispiel ($n = 2$)

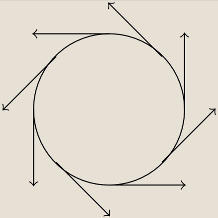


Der Igel-Satz

Satz

Ist n ungerade, so gibt es kein (stetig diffbares) Vektorfeld auf der n-Sphäre $S^{n-1} \subset \boldsymbol{R}^n$*, welches tangential und ohne Nullstellen ist.*

Beispiel $(n = 2)$



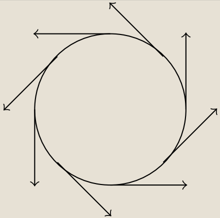
Beispiel $(n = 3)$

Der Igel-Satz

Satz

Ist n ungerade, so gibt es kein (stetig diffbares) Vektorfeld auf der n-Sphäre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, welches tangential und ohne Nullstellen ist.

Beispiel $(n = 2)$



$v(x_1, \ldots, x_n) = (-x_2, x_1, \ldots, -x_n, x_{n-1})$

Beispiel $(n = 3)$

Erstes Lemma

Lemma

$A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, v stetig diffbares Vektorfeld in Umgebung von A. Definiere $f_t(x) = x + tv(x)$.
Dann ist das Volumen von $f_t(A)$ ein Polynom von t (für kleine t).

Beweis.

v ist Lipschitz mit Konstante c.
Für $t \leq 1/c$ ist $f_t : A \to f_t(A)$ bijektiv.
$J_{f_t} = I + t[\frac{\partial v_i}{\partial x_j}]$, also $\det J_{f_t} = 1 + \sigma_1 t + \ldots \sigma_n t^n > 0$ für kleines t.

$$\mathrm{vol} f_t(A) = \int_{f_t(A)} 1 dx = \int_A \det J_{f_t} dx = a_0 + a_1 t + \ldots a_n t^n$$

$\square$

Zweites Lemma

Lemma

Sei $v : S^{n-1} \to S^{n-1}$ tangentiales Vektorfeld mit Norm eins. Für kleines t bildet $f_t(x) = x + tv(x)$ die Sphäre S^{n-1} auf die Sphäre mit Radius $\sqrt{1+t^2}$ ab (surjektiv!)

Beweis.

- $\|f_t(x)\| = \|x + tv(x)\| = \sqrt{1+t^2}$
- t klein $\implies \det(J_{f_t}) \neq 0 \implies$ Homöomorphismus
- $f_t(S^{n-1})$ ist offene und abgeschlossene Teilmenge der Sphäre mir Radius $\sqrt{1+t^2}$, also die ganze Sphäre.

$\square$

Beweis des Igelsatzes

Beweis.

Sei v tangentiales Vektorfeld mit Norm eins.
Definiere $A = \{x \mid a \leq \|x\| \leq b\}$ und setze auf A: $v(rx) = rv(x)$.
Nach zweite Lemma bildet dann $f_t(x) = x + tv(x)$ die Sphäre mit Radius r auf die Sphäre mir Radius $r\sqrt{1+t^2}$ ab.

$$\mathrm{vol}(f_t(A)) = \sqrt{1+t^2}^{\,n}\,\mathrm{vol}(A)$$

Ist n ungerade: $\sqrt{1+t^2}^{\,n}$ kein Polynom!
Widerspruch zu erstem Lemma. $\square$

Zu guter Letzt...

Zu guter Letzt...

Borsuk-Ulam $\Longrightarrow$ Brötchensatz

Zu guter Letzt...

$$\text{Borsuk-Ulam} \implies \text{Brötchensatz}$$

$$\text{Borsuk-Ulam} \implies \text{Brouwerscher Fixpunktsatz}$$

Zu guter Letzt. . .

Borsuk-Ulam $\Longrightarrow$ Brötchensatz

Borsuk-Ulam $\Longrightarrow$ Brouwerscher Fixpunktsatz

Igelsatz $\Longrightarrow$ Brouwerscher Fixpunktsatz