

# Formoptimierung

Dennis Trede

Zentrum für Technomathematik,  
Universität Bremen

August, 2008

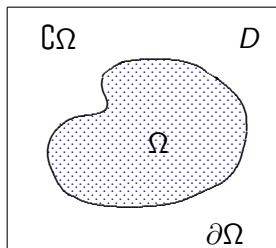
Arbeitsgruppen-Seminar, Krakau

# Inhalt

- 1 Einleitung
- 2 Formen
- 3 Ableitungen und Gradientenabstieg
  - bzgl. Form
  - bzgl. Topologie
- 4 Formoptimierung und Inverse Probleme

# Formen und Formoptimierung

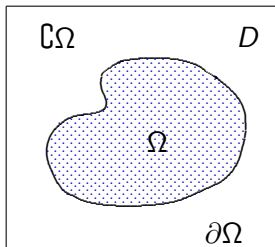
- **Form** als kompakte Teilmenge  $\Omega \subset D$ , festes  $D \subset \mathbb{R}^d$ .



# Formen und Formoptimierung

- **Form** als kompakte Teilmenge  $\Omega \subset D$ , festes  $D \subset \mathbb{R}^d$ .
- Funktional mit Form  $\Omega$  als Variable

$$J : \wp(D) \rightarrow \mathbb{R}, \\ \Omega \mapsto J(\Omega).$$



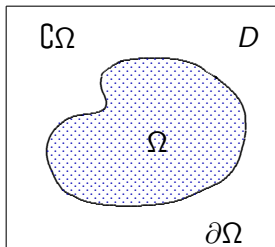
# Formen und Formoptimierung

- **Form** als kompakte Teilmenge  $\Omega \subset D$ , festes  $D \subset \mathbb{R}^d$ .
- Funktional mit Form  $\Omega$  als Variable

$$J : \varphi(D) \rightarrow \mathbb{R}, \\ \Omega \mapsto J(\Omega).$$

- **Optimierungsproblem**

$$\min_{\Omega} J(\Omega).$$



# Formen und Formoptimierung

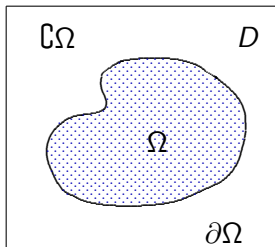
- **Form** als kompakte Teilmenge  $\Omega \subset D$ , festes  $D \subset \mathbb{R}^d$ .
- Funktional mit Form  $\Omega$  als Variable

$$J : \wp(D) \rightarrow \mathbb{R}, \\ \Omega \mapsto J(\Omega).$$

- **Optimierungsproblem**

$$\min_{\Omega} J(\Omega).$$

- Anwendungen in Inversen Problemen z.B.
  - Entwurf von optimalen Bauteilen,
  - Segmentieren auf indirekten Messungen, z.B. CT-Sinogramme.



# Inhalt

- 1 Einleitung
- 2 Formen
- 3 Ableitungen und Gradientenabstieg
  - bzgl. Form
  - bzgl. Topologie
- 4 Formoptimierung und Inverse Probleme

# Vollständige Metrik für Formen $\Omega \subset D$

Sei  $D \subset \mathbb{R}^d$  offen und beschränkt.



# Vollständige Metrik für Formen $\Omega \subset D$

Sei  $D \subset \mathbb{R}^d$  offen und beschränkt. Identifikation von  $\Omega \subset D$  mit

1 char. Funktion  $\chi_\Omega$  und  $L_p$ -Norm

$$d_\chi(\Omega_1, \Omega_2) := \|\chi_{\Omega_1} - \chi_{\Omega_2}\|_{L_p},$$

## Vollständige Metrik für Formen $\Omega \subset D$

Sei  $D \subset \mathbb{R}^d$  offen und beschränkt. Identifikation von  $\Omega \subset D$  mit

- 1 char. Funktion  $\chi_\Omega$  und  $L_p$ -Norm

$$d_\chi(\Omega_1, \Omega_2) := \|\chi_{\Omega_1} - \chi_{\Omega_2}\|_{L_p},$$

- 2 Abstandsfkt.  $d_\Omega(x) := \inf_{y \in \Omega} |y - x|$  und  $W_p^1$ -Norm

$$d_d(\Omega_1, \Omega_2) := \|d_{\Omega_1} - d_{\Omega_2}\|_{W_p^1},$$

## Vollständige Metrik für Formen $\Omega \subset D$

Sei  $D \subset \mathbb{R}^d$  offen und beschränkt. Identifikation von  $\Omega \subset D$  mit

- 1 char. Funktion  $\chi_\Omega$  und  $L_p$ -Norm

$$d_\chi(\Omega_1, \Omega_2) := \|\chi_{\Omega_1} - \chi_{\Omega_2}\|_{L_p},$$

- 2 Abstandsfkt.  $d_\Omega(x) := \inf_{y \in \Omega} |y - x|$  und  $W_p^1$ -Norm

$$d_d(\Omega_1, \Omega_2) := \|d_{\Omega_1} - d_{\Omega_2}\|_{W_p^1},$$

- 3 vorzeichenbehaft. Abstfkt.  $b_\Omega(x) := d_\Omega(x) - d_{\mathbb{C}\Omega}(x)$   
und  $W_p^1$ -Norm

$$d_b(\Omega_1, \Omega_2) := \|b_{\Omega_1} - b_{\Omega_2}\|_{W_p^1}.$$

$\leadsto$  Glattheit von  $\partial\Omega \Leftrightarrow$  Glattheit von  $b_\Omega$



## Vollständige Metrik für Formen $\Omega \subset D$

Sei  $D \subset \mathbb{R}^d$  offen und beschränkt. Identifikation von  $\Omega \subset D$  mit

- 1 char. Funktion  $\chi_\Omega$  und  $L_p$ -Norm

$$d_\chi(\Omega_1, \Omega_2) := \|\chi_{\Omega_1} - \chi_{\Omega_2}\|_{L_p},$$

- 2 Abstandsfkt.  $d_\Omega(x) := \inf_{y \in \Omega} |y - x|$  und  $W_p^1$ -Norm

$$d_d(\Omega_1, \Omega_2) := \|d_{\Omega_1} - d_{\Omega_2}\|_{W_p^1},$$

- 3 vorzeichenbehaft. Abstfkt.  $b_\Omega(x) := d_\Omega(x) - d_{\mathbb{C}\Omega}(x)$   
und  $W_p^1$ -Norm

$$d_b(\Omega_1, \Omega_2) := \|b_{\Omega_1} - b_{\Omega_2}\|_{W_p^1}.$$

$\leadsto$  Glattheit von  $\partial\Omega \Leftrightarrow$  Glattheit von  $b_\Omega$  ☹

- 4 Hausdorff-Metrik ( $d_\Omega$ ) bzw. uniforme Metrik ( $b_\Omega$ ) mit  $\|\cdot\|_{C(D)}$

# Level-Set-Darstellung

- Implizite Darstellung von  $\Omega$  durch **Level-Set-Funktion**

$$u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R},$$

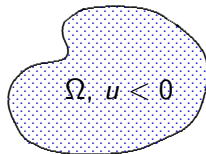
so dass

$$\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d \mid u(x) = 0\},$$

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d \mid u(x) < 0\},$$

$$\complement\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d \mid u(x) > 0\}.$$

$$\complement\Omega, u > 0$$



$$\partial\Omega, u = 0$$

# Level-Set-Darstellung

- Implizite Darstellung von  $\Omega$  durch **Level-Set-Funktion**

$$u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R},$$

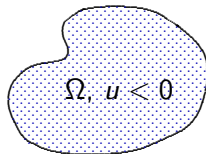
so dass

$$\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d \mid u(x) = 0\},$$

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d \mid u(x) < 0\},$$

$$\complement\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d \mid u(x) > 0\}.$$

$$\complement\Omega, u > 0$$

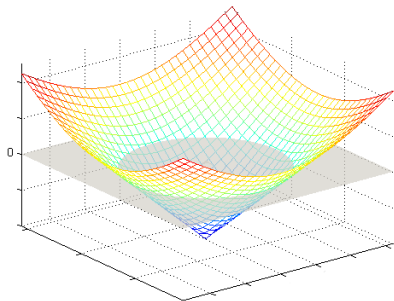
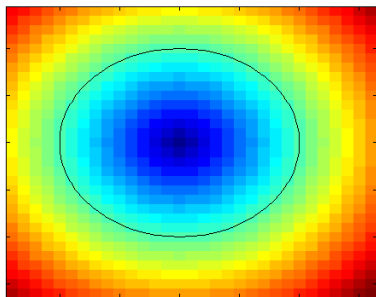


$$\partial\Omega, u = 0$$

- Konkret z.B. **vorzeichenbehaftete Abstfkt.**

$$u(x) := b_\Omega(x) = d_\Omega(x) - d_{\complement\Omega}(x).$$

## Beispiel: Einheitskreis



# Inhalt

- 1 Einleitung
- 2 Formen
- 3 Ableitungen und Gradientenabstieg
  - bzgl. Form
  - bzgl. Topologie
- 4 Formoptimierung und Inverse Probleme



# Formableitung

- misst den Einfluss von Störungen am Rand  $\partial\Omega$ .

# Formableitung

- misst den Einfluss von Störungen am Rand  $\partial\Omega$ .
- Transformation  $\Omega_t$ ,  $t > 0$ , des Gebiets  $\Omega$  durch Vektorfeld  $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$

$$\Omega_t(V) := \{x(t) \mid x(0) \in \Omega, \dot{x} = V(x)\}.$$

# Formableitung

- misst den Einfluss von Störungen am Rand  $\partial\Omega$ .
- Transformation  $\Omega_t$ ,  $t > 0$ , des Gebiets  $\Omega$  durch Vektorfeld  $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$

$$\Omega_t(V) := \{x(t) \mid x(0) \in \Omega, \dot{x} = V(x)\}.$$

- Definiere **Formableitung** in Richtung  $V$  als

$$d_S J(\Omega)(V) := \lim_{t \searrow 0} \frac{J(\Omega_t(V)) - J(\Omega)}{t}.$$

# Formableitung

- misst den Einfluss von Störungen am Rand  $\partial\Omega$ .
- Transformation  $\Omega_t$ ,  $t > 0$ , des Gebiets  $\Omega$  durch Vektorfeld  $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$

$$\Omega_t(V) := \{x(t) \mid x(0) \in \Omega, \dot{x} = V(x)\}.$$

- Definiere **Formableitung** in Richtung  $V$  als

$$d_S J(\Omega)(V) := \lim_{t \searrow 0} \frac{J(\Omega_t(V)) - J(\Omega)}{t}.$$

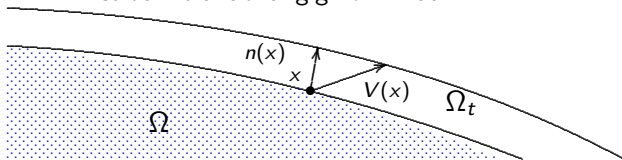
- Häufig ex. Banachraum  $B$ ,  $V \in B$ , so dass

$$d_S J(\Omega)(\cdot) : B \rightarrow \mathbb{R}, \quad V \mapsto d_S J(\Omega)(V),$$

**lineares, stetiges** Funktional auf  $B$  (z.B.  $B = \text{Lip}(\mathbb{R}^d)$ ).

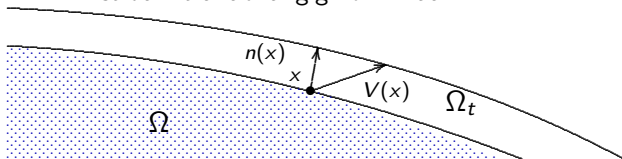
## Formableitung

- Formabl.  $d_S J(\Omega)(V)$ 
  - hängt nur von  $V \cdot n$  auf  $\partial\Omega$  ab,  $n$  äußere Normale, und
  - ist damit unabhängig von  $V$  auf  $\Omega$ .



## Formableitung

- Formabl.  $d_S J(\Omega)(V)$ 
  - hängt nur von  $V \cdot n$  auf  $\partial\Omega$  ab,  $n$  äußere Normale, und
  - ist damit unabhängig von  $V$  auf  $\Omega$ .



- **Struktursatz von Hadamard-Zolésio.**  
Falls  $J$ ,  $\Omega$ ,  $V_n := V \cdot n$  hinreichend glatt, dann

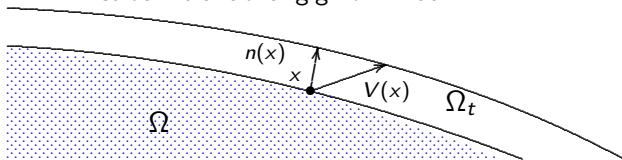
$$d_S J(\Omega)(V)$$

lineares Funktional (**Formgradient**) bzgl. Geschwindigkeitsfeld

$$V_n|_{\partial\Omega} : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

## Formableitung

- Formabl.  $d_S J(\Omega)(V)$ 
  - hängt nur von  $V \cdot n$  auf  $\partial\Omega$  ab,  $n$  äußere Normale, und
  - ist damit unabhängig von  $V$  auf  $\Omega$ .



- **Struktursatz von Hadamard-Zolésio.**

Falls  $J$ ,  $\Omega$ ,  $V_n := V \cdot n$  hinreichend glatt, dann

$$d_S J(\Omega)(V) =: \nabla_S J(\Omega) V_n$$

lineares Funktional (**Formgradient**) bzgl. Geschwindigkeitsfeld

$$V_n|_{\partial\Omega} : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

## Beispiele zur Formableitung (formal)

- **Volumenintegral.** Sei  $J_1(\Omega) := \int_{\Omega} f \, dx$ .



## Beispiele zur Formableitung (formal)

- **Volumenintegral.** Sei  $J_1(\Omega) := \int_{\Omega} f \, dx$ .

$$d_S J_1(\Omega)(V) = \nabla_S J_1(\Omega) \cdot V_n = \int_{\partial\Omega} f \, V_n \, ds.$$

Hier bezeichnet  $n : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  äußere Normale und  $V_n := V \cdot n$ ,

## Beispiele zur Formableitung (formal)

- **Volumenintegral.** Sei  $J_1(\Omega) := \int_{\Omega} f \, dx$ .

$$d_S J_1(\Omega)(V) = \nabla_S J_1(\Omega) \cdot V_n = \int_{\partial\Omega} f \, V_n \, ds.$$

- **Randintegral.** Sei  $J_2(\Omega) := \int_{\partial\Omega} f \, ds$ .

Hier bezeichnet  $n : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  äußere Normale und  $V_n := V \cdot n$ ,

## Beispiele zur Formableitung (formal)

- **Volumenintegral.** Sei  $J_1(\Omega) := \int_{\Omega} f \, dx$ .

$$d_S J_1(\Omega)(V) = \nabla_S J_1(\Omega) V_n = \int_{\partial\Omega} f V_n \, ds.$$

- **Randintegral.** Sei  $J_2(\Omega) := \int_{\partial\Omega} f \, ds$ .

$$d_S J_2(\Omega)(V) = \nabla_S J_2(\Omega) V_n = \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial f}{\partial n} + \kappa f \right) V_n \, ds.$$

Hier bezeichnet  $n : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  äußere Normale und  $V_n := V \cdot n$ ,  
 $\kappa : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  mittlere Krümmung von  $\partial\Omega$ .

# Formgradientenabstieg

- Falls Formgradient von der Form

$$\nabla_{\mathcal{S}} J(\Omega) V_n = \int_{\partial\Omega} V_n(x) W(\Omega)(x) \, ds$$

mit  $W(\Omega) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  ex., wähle Vektorfeld  $V_n$  gemäß

$$V_n = -W(\Omega).$$

# Formgradientenabstieg

- Falls Formgradient von der Form

$$\nabla_{\mathcal{S}} J(\Omega) V_n = \int_{\partial\Omega} V_n(x) W(\Omega)(x) \, ds$$

mit  $W(\Omega) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  ex., wähle Vektorfeld  $V_n$  gemäß

$$V_n = -W(\Omega).$$

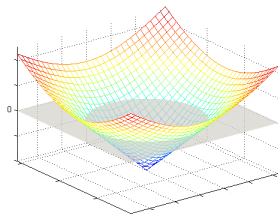
- Damit **Gradientenabstieg**, da

$$\nabla_{\mathcal{S}}(\Omega)(-W(\Omega)) = - \int_{\partial\Omega} |W(\Omega)|^2 \, ds < 0.$$

# Formgradientenabstieg und Level-Set-Gleichung

- Darstellung von  $\Omega(t)$   
durch Level-Set-Funktion

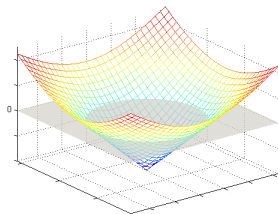
$$u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}.$$



# Formgradientenabstieg und Level-Set-Gleichung

- Darstellung von  $\Omega(t)$   
durch Level-Set-Funktion

$$u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}.$$



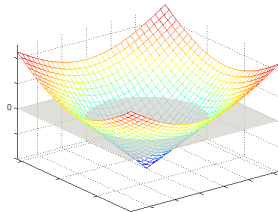
- Gradientenabstieg durch Lösen der Transportgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + W(\Omega(t))(x)n(x) \cdot \nabla u = 0,$$

# Formgradientenabstieg und Level-Set-Gleichung

- Darstellung von  $\Omega(t)$   
durch Level-Set-Funktion

$$u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}.$$



- Gradientenabstieg durch Lösen der Transportgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + W(\Omega(t))(x)n(x) \cdot \nabla u = 0,$$

bzw., mit  $n = \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}$ , durch Lösen der **Level-Set-Gleichung**

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + W(\Omega(t))(x) \|\nabla u\| = 0.$$



# Inhalt

- 1 Einleitung
- 2 Formen
- 3 Ableitungen und Gradientenabstieg
  - bzgl. Form
  - bzgl. Topologie
- 4 Formoptimierung und Inverse Probleme

# Topologieableitung

- Formgradient mit Level-Set-Methode führt nicht zu „genug“ topologischer Veränderung.
- Topologieableitung misst den Einfluss von Löchern.

# Topologieableitung

- Formgradient mit Level-Set-Methode führt nicht zu „genug“ topologischer Veränderung.
- Topologieableitung misst den Einfluss von Löchern.
- Definiere **Topologieableitung** an der Stelle  $x \in \Omega$  ( $\sim$  Loch)

$$d_{\mathcal{T}} J(\Omega)(x) := \lim_{\rho \searrow 0} \frac{J(\Omega \setminus B_{\rho}(x)) - J(\Omega)}{|B_{\rho}(x) \cap \Omega|},$$

wobei  $B_{\rho}(x) = \{y \in \mathbb{R}^d \mid |y - x| < \rho\}$ .

# Topologieableitung

- Formgradient mit Level-Set-Methode führt nicht zu „genug“ topologischer Veränderung.
- Topologieableitung misst den Einfluss von Löchern.
- Definiere **Topologieableitung** an der Stelle  $x \in \Omega$  ( $\sim$  Loch)

$$d_{\mathcal{T}} J(\Omega)(x) := \lim_{\rho \searrow 0} \frac{J(\Omega \setminus B_{\rho}(x)) - J(\Omega)}{|B_{\rho}(x) \cap \Omega|},$$

bzw. für  $x \in D \setminus \Omega$  ( $\sim$  Kolonie)

$$d_{\mathcal{T}} J(\Omega)(x) := \lim_{\rho \searrow 0} \frac{J(\Omega \cup B_{\rho}(x)) - J(\Omega)}{|B_{\rho}(x) \cap \mathbb{C}\Omega|},$$

wobei  $B_{\rho}(x) = \{y \in \mathbb{R}^d \mid |y - x| < \rho\}$ .

# Level-Set-Methode mit Topologieableitung

- Änderung der Topologie bei  $x \in D$

$$\begin{cases} \text{verringert } J(\Omega), & \text{falls } d_{\mathcal{T}} J(\Omega)(x) < 0, \\ \text{vergrößert } J(\Omega), & \text{falls } d_{\mathcal{T}} J(\Omega)(x) > 0. \end{cases}$$

# Level-Set-Methode mit Topologieableitung

- Änderung der Topologie bei  $x \in D$

$$\begin{cases} \text{verringert } J(\Omega), & \text{falls } d_{\mathcal{T}} J(\Omega)(x) < 0, \\ \text{vergrößert } J(\Omega), & \text{falls } d_{\mathcal{T}} J(\Omega)(x) > 0. \end{cases}$$

- Hinzufügen eines **Quellterms**  $G$  mit Kontrollparameter  $\gamma > 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + W(\Omega(t))(x) \|\nabla u\| + \gamma G = 0,$$

# Level-Set-Methode mit Topologieableitung

- Änderung der Topologie bei  $x \in D$

$$\begin{cases} \text{verringert } J(\Omega), & \text{falls } d_{\mathcal{T}} J(\Omega)(x) < 0, \\ \text{vergrößert } J(\Omega), & \text{falls } d_{\mathcal{T}} J(\Omega)(x) > 0. \end{cases}$$

- Hinzufügen eines **Quellterms**  $G$  mit Kontrollparameter  $\gamma > 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + W(\Omega(t))(x) \|\nabla u\| + \gamma G = 0,$$

z.B. mit  $G(x, t) = \text{sign}(u(t, x)) d_{\mathcal{T}} J(\Omega(t))(x)$ , denn

$$\begin{cases} d_{\mathcal{T}} J < 0 \wedge x \in \Omega = \{u < 0\} & \rightsquigarrow \text{pos. Quelle,} \\ d_{\mathcal{T}} J > 0 \wedge x \in \complement\Omega = \{u > 0\} & \rightsquigarrow \text{neg. Quelle,} \\ \dots & \end{cases}$$

# Inhalt

- 1 Einleitung
- 2 Formen
- 3 Ableitungen und Gradientenabstieg
  - bzgl. Form
  - bzgl. Topologie
- 4 Formoptimierung und Inverse Probleme



# Formoptimierung und Inverse Probleme

- Beispiel: Rekonstruktion einer indirekten Messung, häufig

$$J(\Omega) := \|F(\Omega) - v^\delta\|^2, \quad F : \wp(D) \rightarrow H.$$

- schlecht gestellt  $\leadsto$  **Regularisierungsverfahren** nötig.

# Formoptimierung und Inverse Probleme

- Beispiel: Rekonstruktion einer indirekten Messung, häufig

$$J(\Omega) := \|F(\Omega) - v^\delta\|^2, \quad F : \wp(D) \rightarrow H.$$

- schlecht gestellt  $\leadsto$  Regularisierungsverfahren nötig.
- Zwei verschiedene Herangehensweisen:

- 1 Einführen von Strafterm ( $\sim$  Tikhonov)

$$J_\alpha(\Omega) := J(\Omega) + \alpha R(\Omega),$$

z.B.  $R(\Omega) = \int_{\partial\Omega} ds$  oder  $R(\Omega) = \int_{\partial\Omega} \kappa^2 ds$ .

# Formoptimierung und Inverse Probleme

- Beispiel: Rekonstruktion einer indirekten Messung, häufig

$$J(\Omega) := \|F(\Omega) - v^\delta\|^2, \quad F : \wp(D) \rightarrow H.$$

- schlecht gestellt  $\leadsto$  Regularisierungsverfahren nötig.
- Zwei verschiedene Herangehensweisen:

- 1 Einführen von **Strafterm** ( $\sim$  Tikhonov)

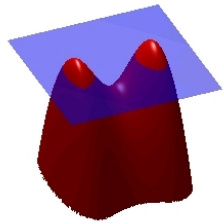
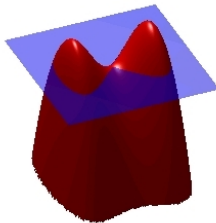
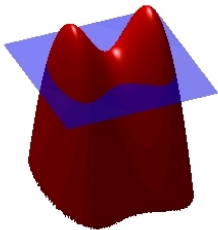
$$J_\alpha(\Omega) := J(\Omega) + \alpha R(\Omega),$$

z.B.  $R(\Omega) = \int_{\partial\Omega} ds$  oder  $R(\Omega) = \int_{\partial\Omega} \kappa^2 ds$ .

- 2 **Iterative** Regularisierung mit Abbruchkrit. ( $\sim$  Landweber).

# Formoptimierung und Inverse Probleme

- Level-Set-Methoden geeignetes und häufig genutztes Werkzeug der Formoptimierung.
- Analysis ist
  - sehr lückenhaft für spez. Funktionale/ Strafterme bzw.
  - komplett offen für iterative Verfahren.



## Literatur

- [1] Sokolowski, Zolésio. *Introduction to Shape Optimization: Shape Sensitivity Analysis*. Springer, 1992.
- [2] Delfour, Zolésio. *Shapes and Geometries: Analysis, Differential Calculus, and Optimization*. SIAM, 2001.
- [3] Burger. *Infinite-dimensional Optimization and Optimal Design*. Lecture Notes, UCLA, 2004.
- [4] Burger, Osher. **A survey on level set methods for inverse problems and optimal design**. Eur.J.Appl.Math., 2005.
- [5] Burger, Hackl, Ring. *Incorporating topological derivatives into level set methods*. J.Comp.Phys., 2004.
- [6] He, Kao, Osher. *Incorporating topological derivatives into shape derivatives based level set methods*. J.Comp.Phys., 2007.

# Vielen Dank für das Interesse

Dennis Trede  
[trede@math.uni-bremen.de](mailto:trede@math.uni-bremen.de)