

# Der Regenbogen

Prüfstein für optische Theorien

Uttendorf-Vortrag

Ludger Prünte

# Erscheinungsformen



## Erscheinungsformen



## Erscheinungsformen



# Erscheinungsformen



## Erscheinungsformen



## Einflüsse

Einfluss auf

- Religion

# Einflüsse

## Einfluss auf

- Religion
- bildende Kunst
- Musik
- Poesie

## Einfluss auf

- Religion
- bildende Kunst
- Musik
- Poesie
- Naturwissenschaft

# Antike

Beobachtungen in der Antike (festgehalten von Aristoteles)

### Beobachtungen in der Antike (festgehalten von Aristoteles)

- Höhe des Bogens abhängig von Sonnenstand
- Es existieren bis zu zwei Bögen, der äussere ist im Vergleich zum inneren schwächer und hat die umgekehrte Farbreihenfolge
- drei bis vier Farben: rot, (orange), Grün und violett

Beobachtungen in der Antike (festgehalten von Aristoteles)

- Höhe des Bogens abhängig von Sonnenstand
- Es existieren bis zu zwei Bögen, der äussere ist im Vergleich zum inneren schwächer und hat die umgekehrte Farbreihenfolge
- drei bis vier Farben: rot, (orange), Grün und violett

Das dunkle Band wurde erst von Alexander von Aphrodisia beschrieben.

### Erklärung (Aristoteles und Poseidonios)

- Man sieht dadurch, dass Strahlen vom Auge ausgehend, die Objekte „abtasten“

### Erklärung (Aristoteles und Poseidonios)

- Man sieht dadurch, dass Strahlen vom Auge ausgehend, die Objekte „abtasten“
- Der Regenbogen ist ein Teilspiegelbild von Sonne oder Mond, eine Wolke wirkt wie ein Hohlspiegel. Die Reflektion erfolgt unter einem festen Winkel.

### Erklärung (Aristoteles und Poseidonios)

- Man sieht dadurch, dass Strahlen vom Auge ausgehend, die Objekte „abtasten“
- Der Regenbogen ist ein Teilspiegelbild von Sonne oder Mond, eine Wolke wirkt wie ein Hohlspiegel. Die Reflektion erfolgt unter einem festen Winkel.

Dadurch war die Bogenform und die immer gleiche Winkelbreite erklärt, ausserdem war der Bogen korrekt als nicht materielles Objekt beschrieben (im Gegensatz zu religiösen Erklärungen).

## Mittelalter

in Europa gibt es kaum neue Erkenntnisse

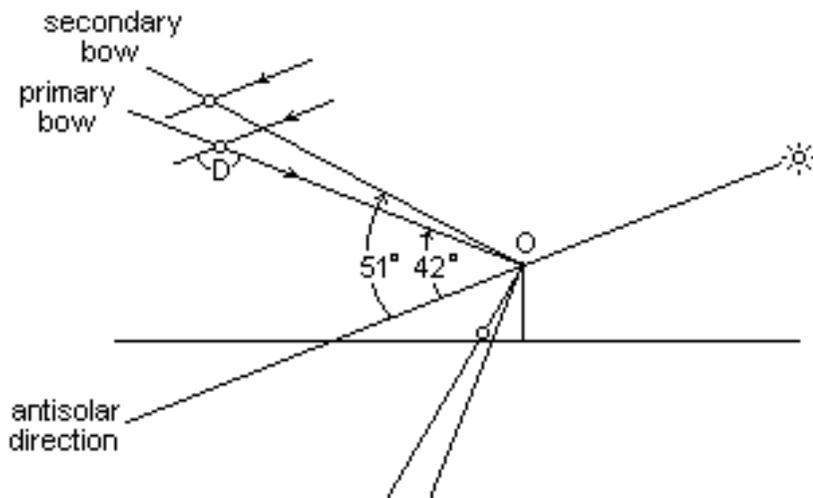
## Mittelalter

in Europa gibt es kaum neue Erkenntnisse

- Theologische Diskussionen, ob der Bogen drei oder vier Farben hat

## Mittelalter

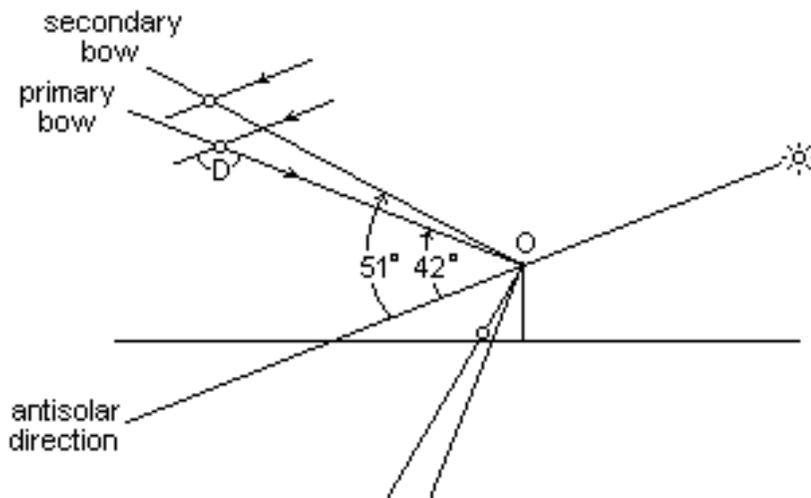
in Europa gibt es kaum neue Erkenntnisse



- 1266 bestimmt Roger Bacon den Winkel des Regenbogens zum Gegenpunkt der Sonne zu  $42^\circ$  und den Winkel des zweiten Bogens zu  $50^\circ$ .

- Theologische Diskussionen, ob der Bogen drei oder vier Farben hat

in Europa gibt es kaum neue Erkenntnisse



- Theologische Diskussionen, ob der Bogen drei oder vier Farben hat

- 1266 bestimmt Roger Bacon den Winkel des Regenbogens zum Gegenpunkt der Sonne zu  $42^\circ$  und den Winkel des zweiten Bogens zu  $50^\circ$ .
- Im 13. Jahrhundert werden zum ersten mal die überzähligen Bögen erwähnt (Witelo, ca. 1270).

## Klassik

Verschiedene Angaben, wer die folgende klassische (strahlengeometrische) Erklärung des Regenbogens gefunden hat:

## Klassik

Verschiedene Angaben, wer die folgende klassische (strahlengeometrische) Erklärung des Regenbogens gefunden hat:

- Dietrich von Freiberg (Theodoricus Teutonicus de Vriberg, 1250-1310) in „De iride“ (vom Regenbogen) von 1304

## Klassik

Verschiedene Angaben, wer die folgende klassische (strahlengeometrische) Erklärung des Regenbogens gefunden hat:

- Dietrich von Freiberg (Theodoricus Teutonicus de Vriberg, 1250-1310) in „De iride“ (vom Regenbogen) von 1304
- Marco Antonio de Dominis (Erzbischof von Split, 1560-1624) 1611 in „Tractatus de radiis visus et lucis in vitris, pespectivis et iride“ (Traktat über die Sehstrahlen und das Licht in Glas, Perspektive und Regenbogen)

## Klassik

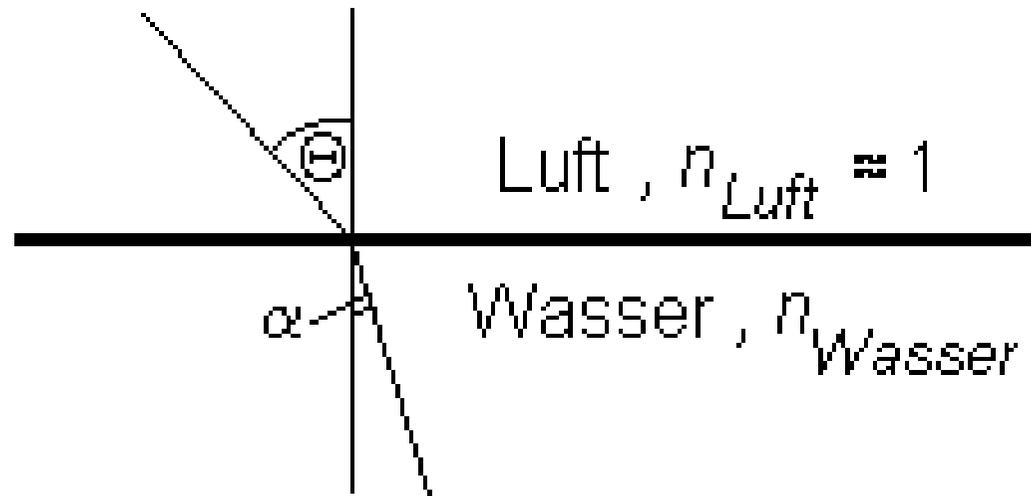
Verschiedene Angaben, wer die folgende klassische (strahlengeometrische) Erklärung des Regenbogens gefunden hat:

- Dietrich von Freiberg (Theodoricus Teutonicus de Vriberg, 1250-1310) in „De iride“ (vom Regenbogen) von 1304
- Marco Antonio de Dominis (Erzbischof von Split, 1560-1624) 1611 in „Tractatus de radiis visus et lucis in vitris, pespectivis et iride“ (Traktat über die Sehstrahlen und das Licht in Glas, Perspektive und Regenbogen)
- René Descartes (Philosoph und Mathematiker 1596-1650) entdeckt diese Theorien neu in „Discours de la Méthode“ (1637) und begründete sie mathematisch mit dem Snellius'schen Brechungsgesetz

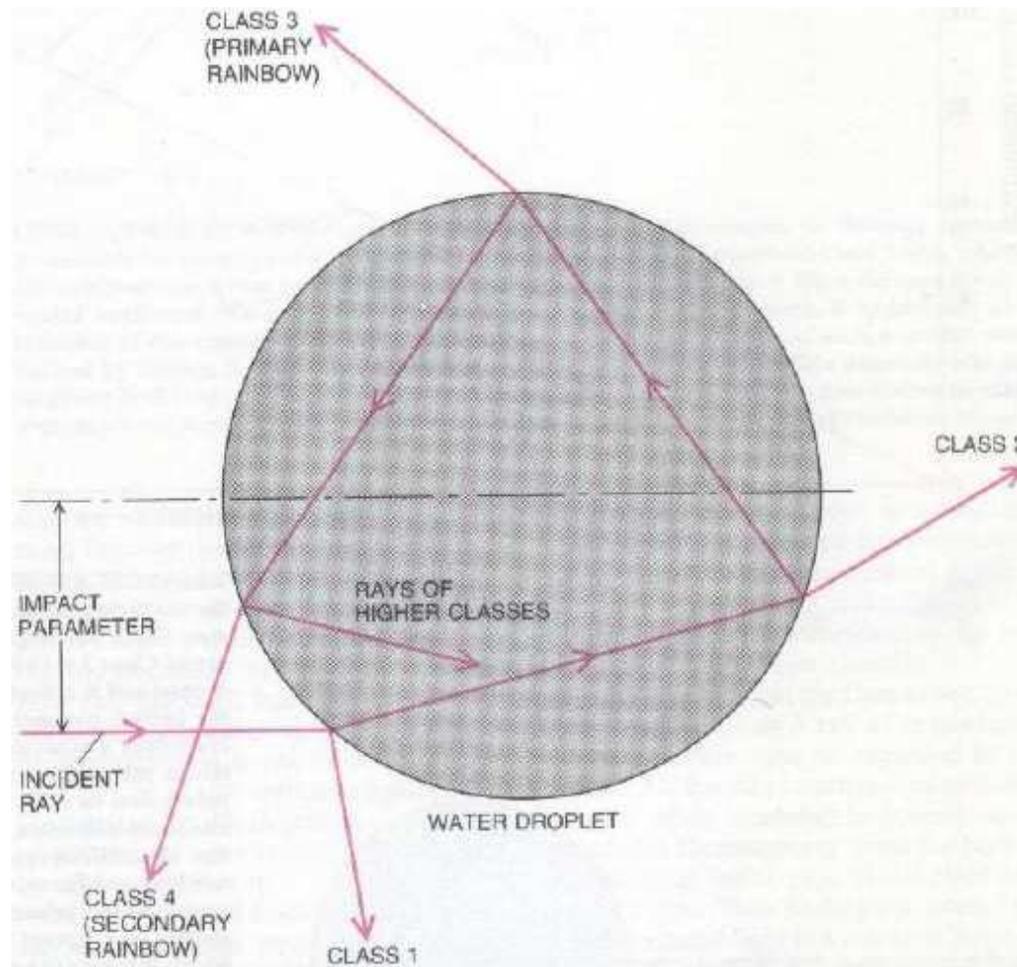
## Klassik

Snellius'sches Brechungsgesetz (1621, von Willebrod Snell (1591-1626))

$$\frac{\sin \Theta}{\sin \alpha} = \frac{n_{Wasser}}{n_{Luft}} = n$$

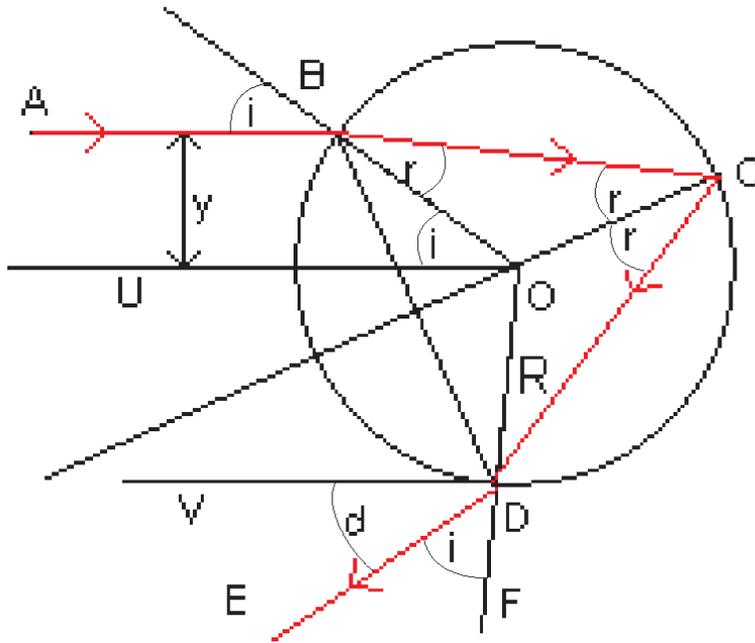


## Strahlengang im Regentropfen nach Dietrich und Descartes





## Klassik



$$= \angle(BOD) - \angle(BOU) - i$$

$$= 2\angle(BCD) - 2i = 4r - 2i$$

Des weiteren gilt

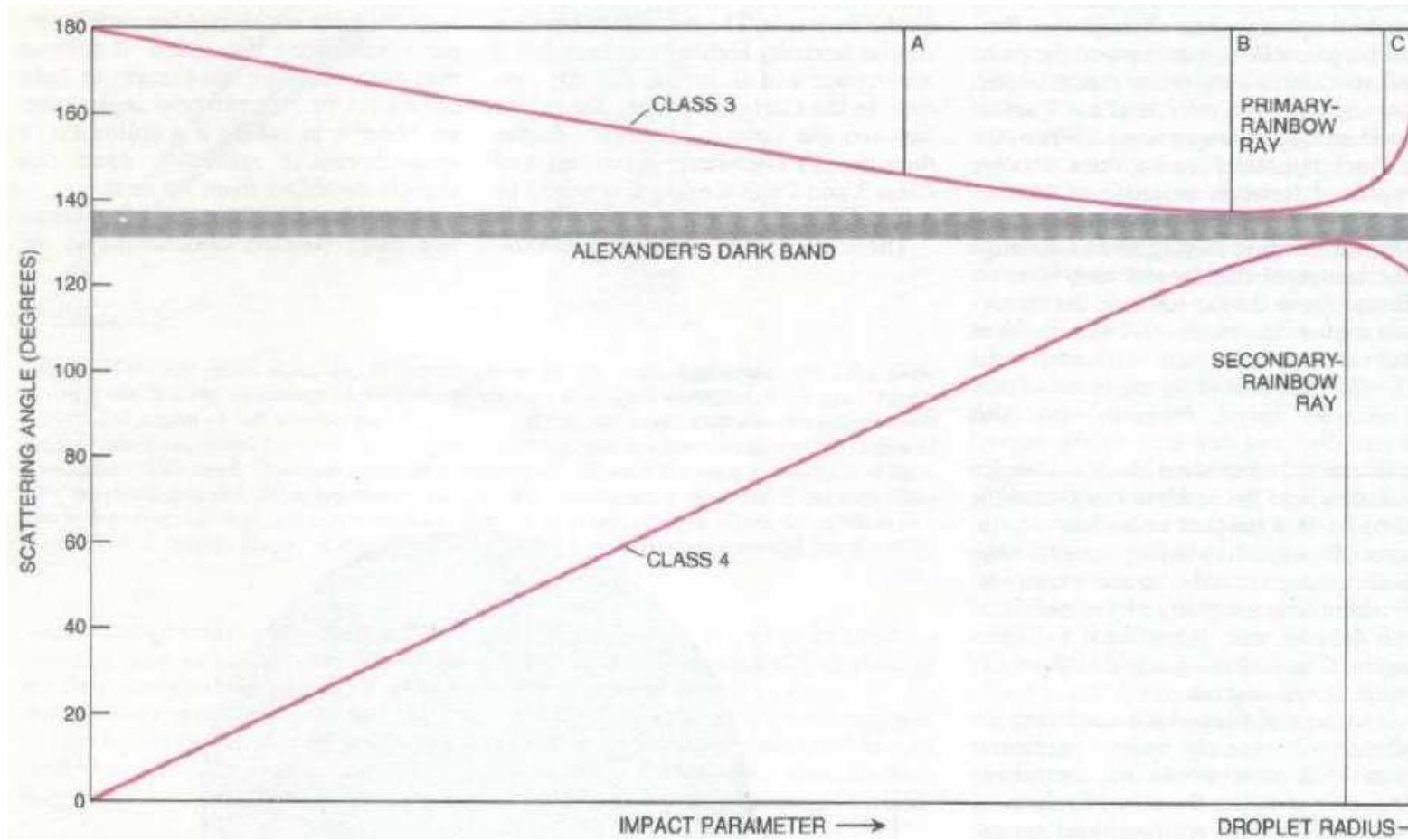
$$\sin i = \frac{y}{R} \quad \text{und} \quad \frac{\sin i}{\sin r} = n$$

$$d = \angle(FDV) - \angle(FDE)$$

$$= \angle(FOU) - i$$



# Klassik



## Klassik

Warum ist die Lichtintensität im Bereich des Regenbogens so gross?

Das Maximum ist sehr flach, es werden also viele Strahlen in diese Richtung abgelenkt. Dieses Maximum ist für den ersten Bogen bestimmt durch:

$$0 = dd/dy = \frac{4}{\sqrt{n^2 R^2 - y^2}} - \frac{2}{\sqrt{R^2 - y^2}}$$

und damit

$$y_{max} = R \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} \quad \text{und} \quad d_{max} = 4 \arcsin \sqrt{\frac{4 - n^2}{3n^2}} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$$

oder nach einer anderen Herleitung:

$$\sin(d_{max}/2) = \frac{(4 - n^2)^{3/2}}{3\sqrt{3}n^2}$$

Für den sekundären Bogen gilt:

$$d = 2i - 6r + \pi = 2 \arcsin \left( \frac{y}{R} \right) - 6 \arcsin \left( \frac{y}{nR} \right) + \pi$$

und damit

$$d_{2,max} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{9 - n^2}{8}} - 6 \arcsin \sqrt{\frac{9 - n^2}{8n^2}}$$

Für Bögen beliebiger Ordnung gilt die Formel

$$e^{i(\pi - d_{N,max})/2} = \frac{e^{i\pi N/2}}{(m^2 - 1)^{(m+1)/2} n^m} (\alpha + i\beta)(m\alpha - i\beta)^m$$

mit

$$m = N + 1 \quad \alpha = \sqrt{n^2 - 1} \quad \beta = \sqrt{m^2 - n^2}$$

## Klassik

Bisher gab es keine richtige Erklärung für die Farbe der Regenbögen!

## Klassik

Bisher gab es keine richtige Erklärung für die Farbe der Regenbögen!

Newton (1643-1727) fand 1672 am Prisma die Abhängigkeit von Wellenlänge und Lichtbrechung!

## Klassik

Bisher gab es keine richtige Erklärung für die Farbe der Regenbögen!

Newton (1643-1727) fand 1672 am Prisma die Abhängigkeit von Wellenlänge und Lichtbrechung!

Farbe	Wellenlänge	B-Index	$d_{1,max}$	$d_{2,max}$
Dunkelblau	404nm	1,34351	40,574°	53,608°
Blau	450nm	1,34033	41,024°	52,794°
Grün	540nm	1,33538	41,733°	51,513°
Gelb	589nm	1,33341	42,019°	50,998°
Rot	660nm	1,33144	42,305°	50,481°
Tiefrot	706nm	1,33073	42,409°	50,294°

# Klassik

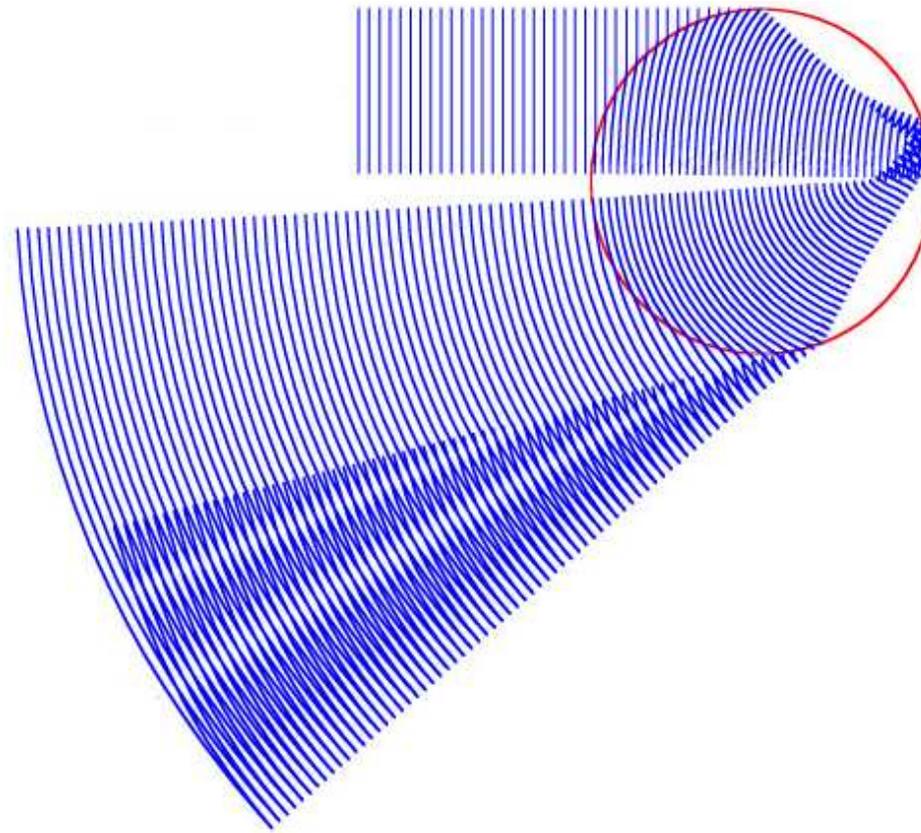


# Klassik



## Young

Thomas Young (1773-1829) betrachtet 1803 die Überlagerung der Strahlen ausserhalb des Tropfens nicht mehr additiv sonder als Überlagerung von Wellen.



## Airy

Problem: Der Übergang zum Alexander-Band ist eine Kaustik, d.h. es müssten Beugungserscheinungen wie an einer Kante auftreten (Potter, 1835)

George Biddell Airy (1801-1892, königlicher Astronom) entwickelte 1838 (veröffentlicht 1849) eine neue Theorie basierend auf

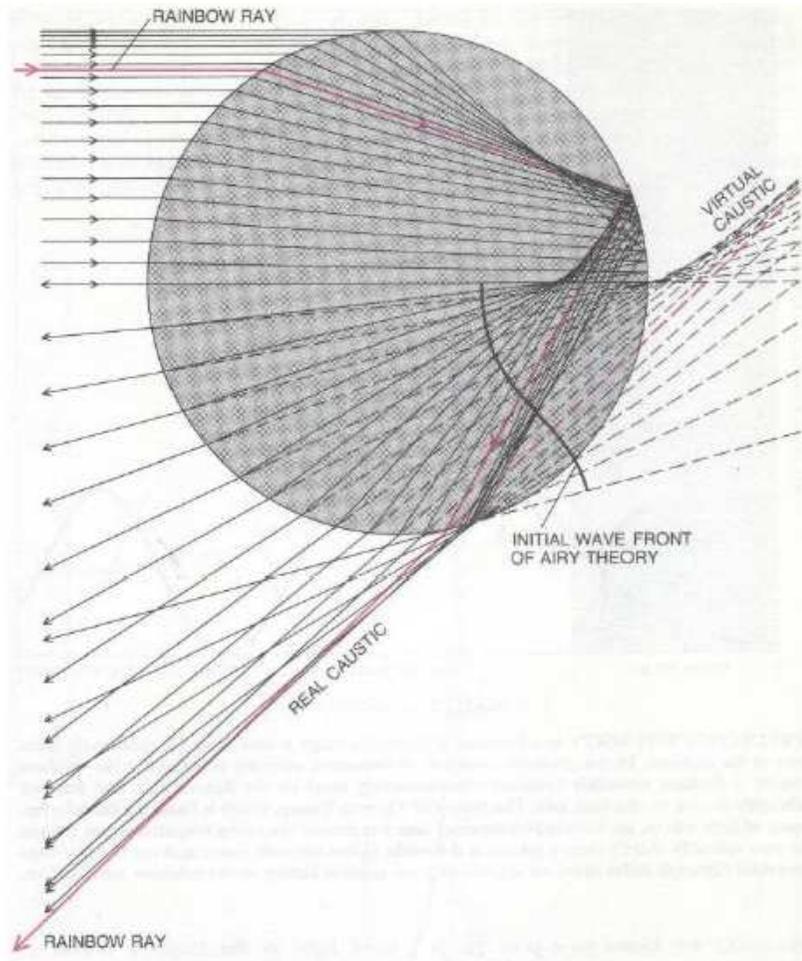
## Airy

Problem: Der Übergang zum Alexander-Band ist eine Kaustik, d.h. es müssten Beugungserscheinungen wie an einer Kante auftreten (Potter, 1835)

George Biddell Airy (1801-1892, königlicher Astronom) entwickelte 1838 (veröffentlicht 1849) eine neue Theorie basierend auf

- **Huygens Prinzip:** Jeder Punkt einer Wellenfront ist Quelle von Kugelwellen, die ihrerseits eine neue Wellenfront bilden (Christiaan Huygens, Augustin Jean Fresnel)
- **Propagation:** Kennt man die Amplitude des Lichtes entlang einer Wellenfront, kann man sie für jede andere Wellenfront rekonstruieren.

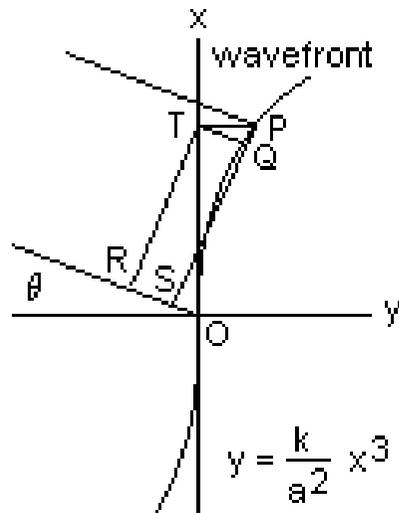
## Airy



Problem: Wahl der ursprünglichen  
Wellenfront und Amplitude

## Airy

Airy wählte eine konstante Amplitude  
und als Wellenfront eine Funktion  
der Form  $y = k/r^2 \cdot x^3$ .



Wegunterschied zwischen  $O$  und  
 $P = (x, z)$ :

$$\begin{aligned} |\bar{OS}| &= |\bar{OR}| - |\bar{QT}| \\ &= x \sin \theta - y \cos \theta \\ &= x \sin \theta - (kx^3/r^2) \cos \theta \end{aligned}$$

Definiere  $u$  und  $z$  als

$$u^3 = 2 \cdot (2k/(\lambda r^2)) x^3 \cos \theta$$

und

$$zu = 2 \cdot (2/\lambda) x \sin \theta$$

damit gilt

$$|\bar{OS}| = (\lambda/4)(u^3 - zu)$$

## Airy

Mit dem Wegunterschied ergibt sich auch ein Phasenunterschied von

$$\delta = (2\pi/\lambda) \cdot |\vec{OS}|$$

## Airy

Mit dem Wegunterschied ergibt sich auch ein Phasenunterschied von

$$\delta = (2\pi/\lambda) \cdot |\bar{O}S|$$

Integration über die ganze Wellenfront von  $-\infty$  bis  $\infty$  ergibt für die Amplitude

$$\Psi(z) = C \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \cos[(\pi/2)(u^3 - zu)] du$$

## Airy

Mit dem Wegunterschied ergibt sich auch ein Phasenunterschied von

$$\delta = (2\pi/\lambda) \cdot |\bar{O}S|$$

Integration über die ganze Wellenfront von  $-\infty$  bis  $\infty$  ergibt für die Amplitude

$$\Psi(z) = C \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \cos[(\pi/2)(u^3 - zu)] du$$

Die Lichtintensität ist proportional zu  $|\Psi|^2$  und man erhält:

$$I(\theta) \sim \left(\frac{r}{\lambda}\right)^{1/3} \mathbf{Ai}^2 \left[ \left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^{2/3} \gamma(n)(\theta - \theta_1) \right]$$

Dabei sind  $\theta_1$  der Descarte'sche Winkel und  $\gamma = \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} \frac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt[6]{4-n^2}}$ .

## Airy

$\mathbf{Ai}$  ist die sogenannte Airy-Funktion, sie ist definiert als

$$\mathbf{Ai}(x) = \frac{\sqrt[3]{3}}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(t^3 + \sqrt[3]{3}xt) dt$$

## Airy

$\mathbf{Ai}$  ist die sogenannte Airy-Funktion, sie ist definiert als

$$\mathbf{Ai}(x) = \frac{\sqrt[3]{3}}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(t^3 + \sqrt[3]{3}xt) dt$$

und läßt sich mit Bessel-Funktionen der Ordnung  $1/3$  beschreiben als:

$$\mathbf{Ai}(z) = 1/3\sqrt{z}[I_{-1/3}(\zeta) - I_{1/3}(\zeta)] \quad \text{mit} \quad \zeta = 2/3z^{3/2}$$

## Airy

$\text{Ai}$  ist die sogenannte Airy-Funktion, sie ist definiert als

$$\text{Ai}(x) = \frac{\sqrt[3]{3}}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(t^3 + \sqrt[3]{3}xt) dt$$

und läßt sich mit Bessel-Funktionen der Ordnung  $1/3$  beschreiben als:

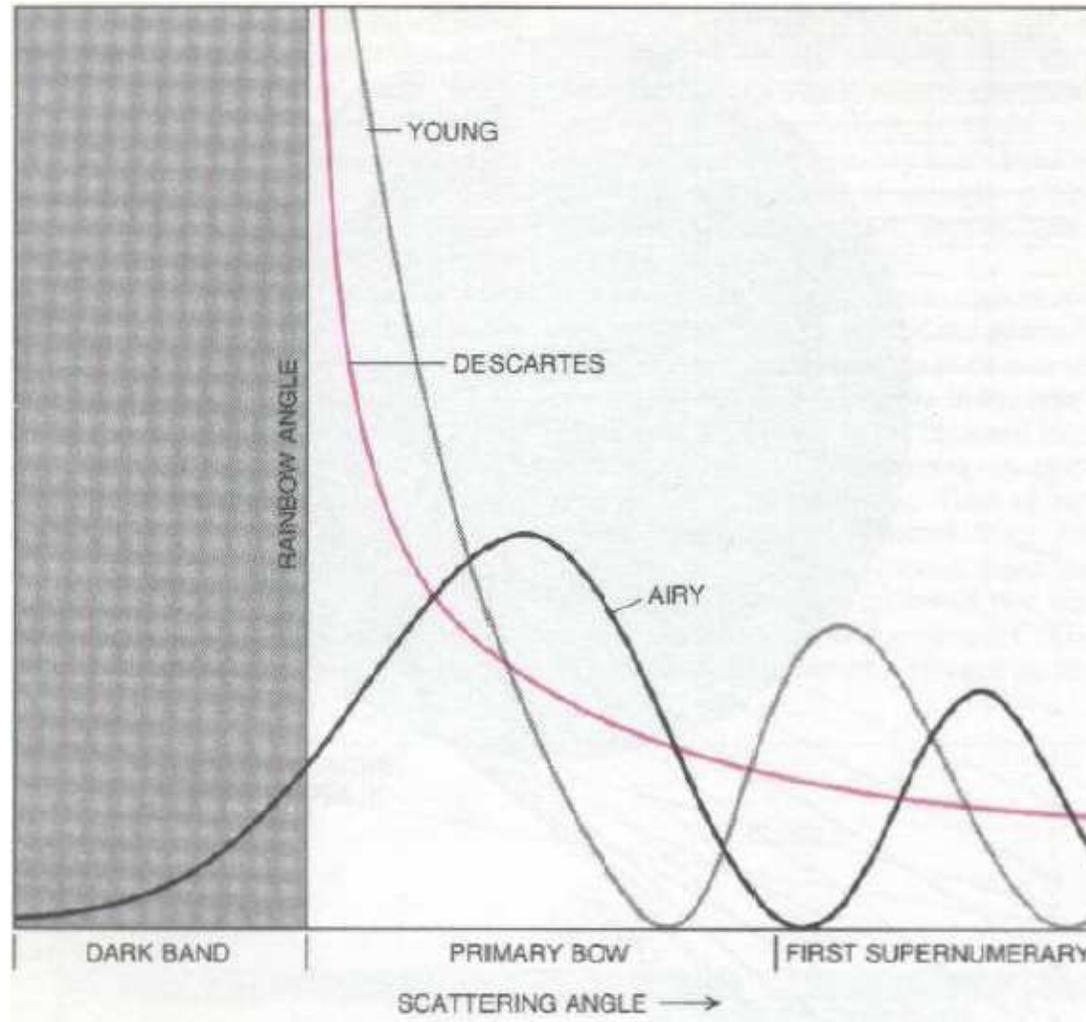
$$\text{Ai}(z) = 1/3\sqrt{z}[I_{-1/3}(\zeta) - I_{1/3}(\zeta)] \quad \text{mit} \quad \zeta = 2/3z^{3/2}$$

Perntner berechnete damit 1905 den Regenbogen, bei endlicher Größe der Sonne, d.h. unter Nutzung von

$$I_S(\theta) = \int_{\theta-\omega}^{\theta+\omega} \left[ 1 - \left( \frac{\theta - \nu}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2} I_p(\nu) d\nu$$

# Airy

# Airy



# Airy

Erinnerung Näherungen der Airy-Theorie:

- Geschätzte Ausgangsamplitude und -wellenfront
- 2 dimensionale Rechnung
- unendliches Integral
- Nur erster Bogen

# Airy

Erinnerung Näherungen der Airy-Theorie:

- Geschätzte Ausgangsamplitude und -wellenfront
- 2 dimensionale Rechnung
- unendliches Integral
- Nur erster Bogen

Was machen diese Näherungen am Ergebnis aus?

Licht ist eine elektromagnetische Welle

Es erfüllt also die Maxwell Gleichungen

$$\nabla \cdot E = \rho \quad \nabla \cdot B = 0 \quad \nabla \times E = -\dot{B} \quad \nabla \times H = J + \dot{D}$$

Licht ist eine elektromagnetische Welle

Es erfüllt also die Maxwell Gleichungen

$$\nabla \cdot E = \rho \quad \nabla \cdot B = 0 \quad \nabla \times E = -\dot{B} \quad \nabla \times H = J + \dot{D}$$

und die Tangentialkomponente des Feldes im Tropfen und aussen gehen stetig ineinander über.

Licht ist eine elektromagnetische Welle

Es erfüllt also die Maxwell Gleichungen

$$\nabla \cdot E = \rho \quad \nabla \cdot B = 0 \quad \nabla \times E = -\dot{B} \quad \nabla \times H = J + \dot{D}$$

und die Tangentialkomponente des Feldes im Tropfen und aussen gehen stetig ineinander über.

Dieses Problem haben Gustav Mie und Peter J.W. Debye unabhängig voneinander 1908 bearbeitet.

Gesucht sind

- die einfallende Welle ( $E_1, B_1$ )
- die Welle im Inneren des Tropfens ( $E_2, B_2$ )
- die Welle des gestreuten Feldes ( $E_3, B_3$ )

Gesucht sind

- die einfallende Welle  $(E_1, B_1)$
- die Welle im Inneren des Tropfens  $(E_2, B_2)$
- die Welle des gestreuten Feldes  $(E_3, B_3)$

Da der Tropfen kugelförmig ist, ist eine Behandlung dieses Problems in Kugelkoordinaten sinnvoll.

## Mie

Nutzt man die

Nutzt man die

- Potentiale statt Felder
- Wellengestalt der Lösung

Nutzt man die

- Potentiale statt Felder
- Wellengestalt der Lösung

So sind die Gleichungen

$$\nabla^2 \Psi + n^2 k^2 \Psi \quad r \leq R$$

$$\nabla^2 \Psi + k^2 \Psi \quad r \geq R$$

in Abhängigkeit von der Wellenzahl  $k$  unter stetigem Übergang von  $\Psi(r, \theta)$  und  $\Psi'(r, \theta)$  zu lösen.

Reihenansatz für jeden einzelnen Teil

$$r\Psi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Psi_{l,m}$$

mit

$$\Psi_{l,m} = [c_n \psi_l(kr) + d_n \chi_l(kr)] \cdot P_n^{(m)}(\cos\theta) \cdot [a_m \cos(m\phi) + b_m \sin(m\phi)]$$

Mit den Legendre-Polynomen  $P_n^{(m)}(\cos\theta)$  und den Riccati-Bessel-Funktionen  $\psi_n$  und  $\chi_n$ . Diese

Reihenansatz für jeden einzelnen Teil

$$r\Psi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Psi_{l,m}$$

mit

$$\Psi_{l,m} = [c_n \psi_l(kr) + d_n \chi_l(kr)] \cdot P_n^{(m)}(\cos\theta) \cdot [a_m \cos(m\phi) + b_m \sin(m\phi)]$$

Mit den Legendre-Polynomen  $P_n^{(m)}(\cos\theta)$  und den Riccati-Bessel-Funktionen  $\psi_n$  und  $\chi_n$ . Diese folgen aus den Bessel- und Neumannfunktionen mittels

$$\psi_l(r) = \sqrt{\pi r/2} I_{l+1/2}(r)$$

$$\chi_l(r) = \sqrt{\pi r/2} N_{l+1/2}(r)$$

$\chi$  hat im Nullpunkt eine Singularität

$\Rightarrow$  Innerhalb der Kugel  $d_l = 0$

## Mie

$\chi$  hat im Nullpunkt eine Singularität

$\Rightarrow$  Innerhalb der Kugel  $d_l = 0$

Für die Streuwelle werden nur die Hankelfunktionen

$$\zeta(r) = \chi(r) + i\psi(r) = \sqrt{\pi r/2} H_{l+1/2}^2(r)$$

genutzt, da die im Unendlichen verschwinden.

## Mie

$\chi$  hat im Nullpunkt eine Singularität

$\Rightarrow$  Innerhalb der Kugel  $d_l = 0$

Für die Streuwelle werden nur die Hankelfunktionen

$$\zeta(r) = \chi(r) + i\psi(r) = \sqrt{\pi r/2} H_{l+1/2}^2(r)$$

genutzt, da die im Unendlichen verschwinden.

Aus den Rand- und Übergangsbedingungen ergeben sich die restlichen Streukoeffizienten in Abhängigkeit von  $n$  und  $x = 2\pi r/\lambda$

Ausserhalb der Kugel gilt z.B.:

$$a_l = \frac{\psi_l'(xn)\psi_l(x) - n\psi_n(xn)\psi_l'(x)}{\psi_l'(xn)\chi_l(x) - n\psi_n(xn)\chi_l'(x)}$$

## Mie

Zur Lösung des Problems werden also benötigt:

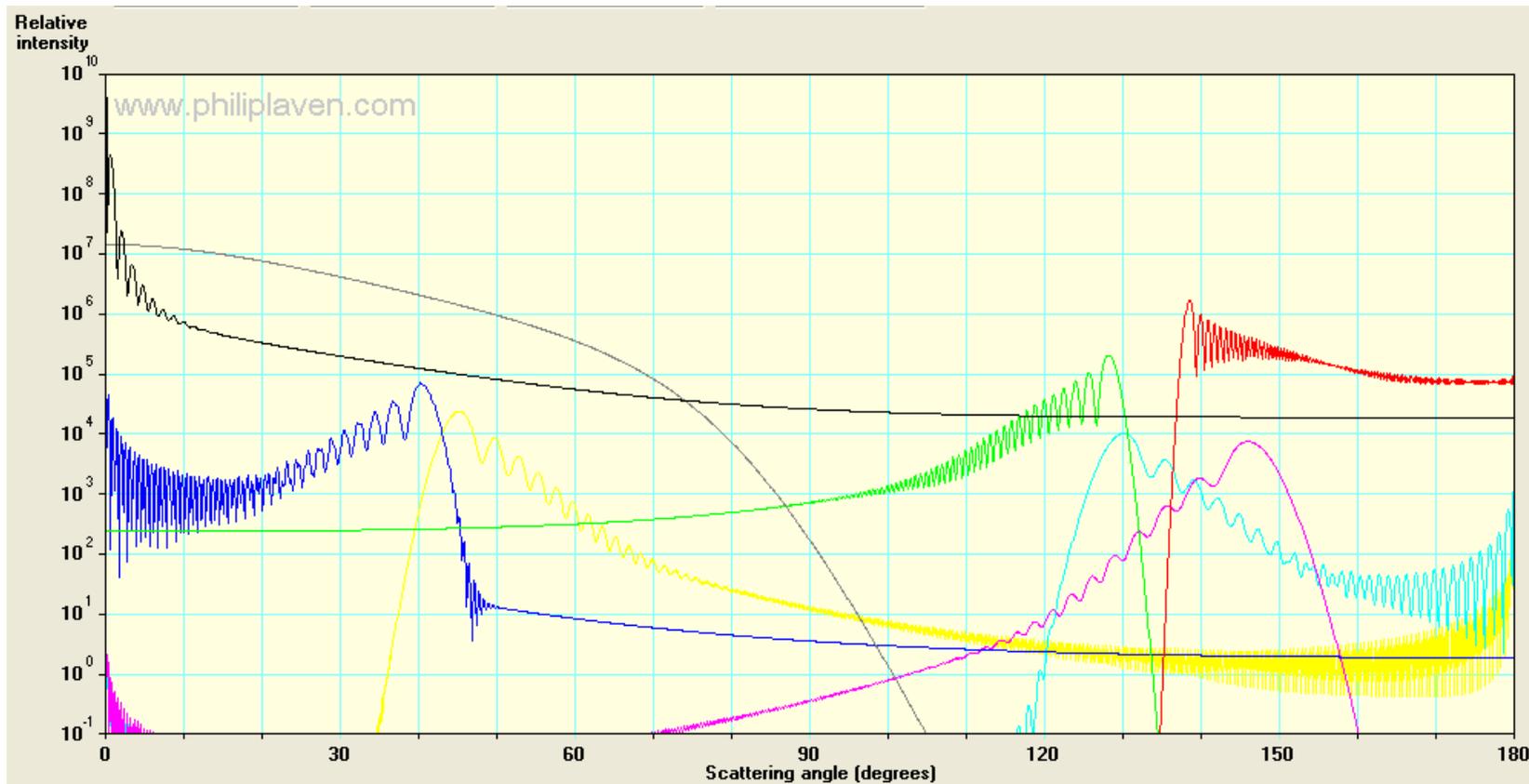
Zur Lösung des Problems werden also benötigt:

- Der Radius der Regentropfen
- Der Brechungsindex von Wasser für alle Wellenlängen
- Die Wellenlängen- und Intensitätsverteilung der Sonne
- Viel Zeit, da die Anzahl der benötigten Summanden ungefähr  $x$  ist.

## Modern

Erhöhung der Rechengeschwindigkeit

Debye sortiert seine Terme im Inneren nach der Anzahl der Reflektionen, so dass man irgendwann abbrechen kann (oder auch nicht?)



## Drehimpuls gequantelt

$$\hbar l = b p \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad p = \hbar / \lambda$$

Drehimpuls gequantelt

$$\hbar l = b p \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad p = \hbar / \lambda$$

Neuere Ansätze (Balthus van der Pol und H. Bremmer 1937 ,Verbesserung von H. Moysés Nussenzweig 1969) führen eine Watsontransformation durch:

$$\Psi(\beta, \theta) = i/\beta \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \int_0^{\infty} [1 - S(\mu, \beta)] P_{\mu-1/2}(\cos \theta) e^{2\pi i m \mu} \mu d\mu$$

dabei ist  $S$  eine meromorphe Funktion und  $\mu = l + 1/2$ .

Interessant sind jetzt die  $\mu$ -Werte der Pole und Sattelpunkte des Integranden:

Interessant sind jetzt die  $\mu$ -Werte der Pole und Sattelpunkte des Integranden:

- Reelle Sattelpunkte stellen die gewöhnlich reflektierten und gebrochenen Lichtstrahlen dar

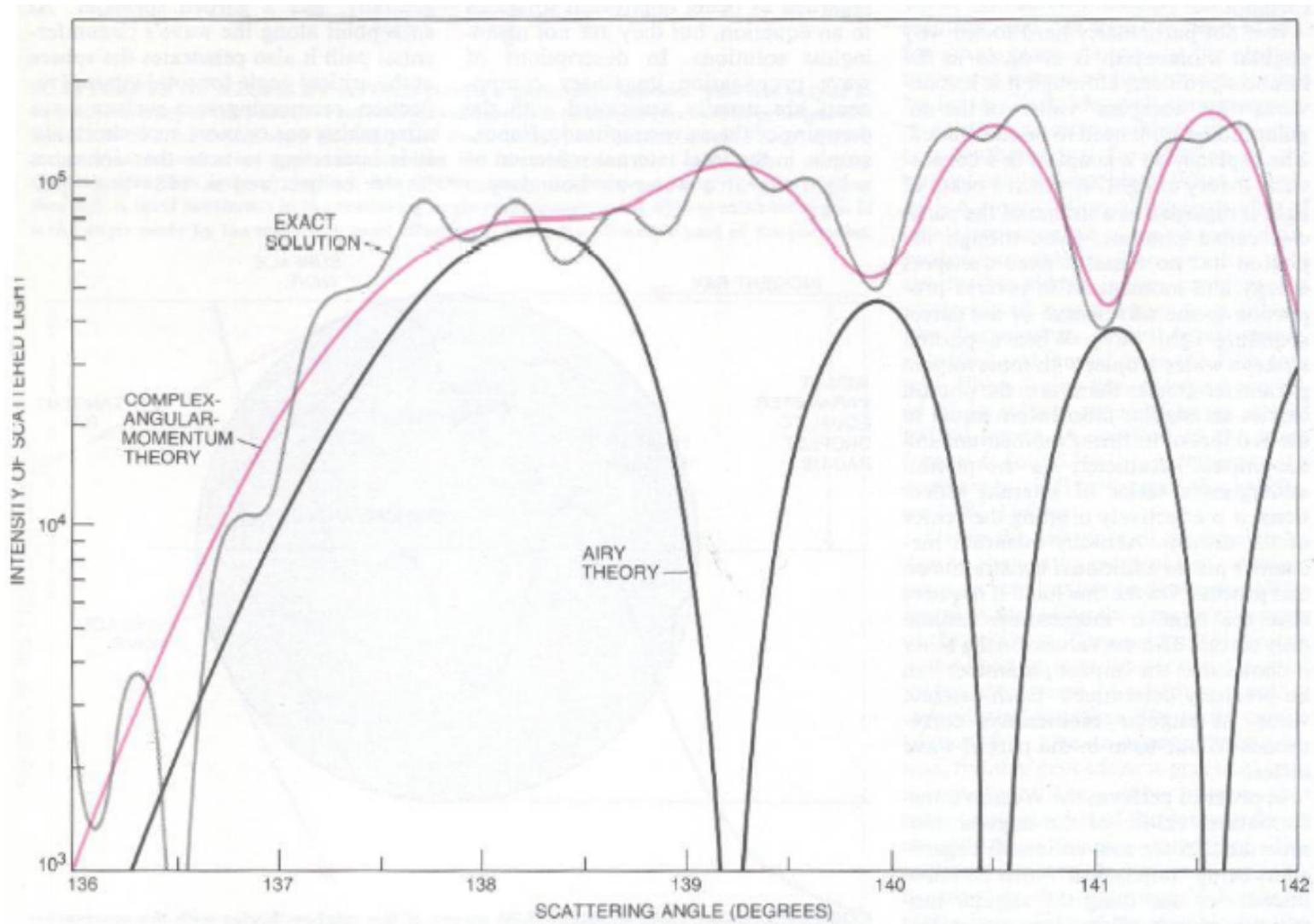
Interessant sind jetzt die  $\mu$ -Werte der Pole und Sattelpunkte des Integranden:

- Reelle Sattelpunkte stellen die gewöhnlich reflektierten und gebrochenen Lichtstrahlen dar
- Imaginäre Sattelpunkte korespondieren zu vollständigen inneren Reflektionen am Tunnelrand (evanescente waves), dringen nur wenig aus dem Tropfen (Tunneleffekte)

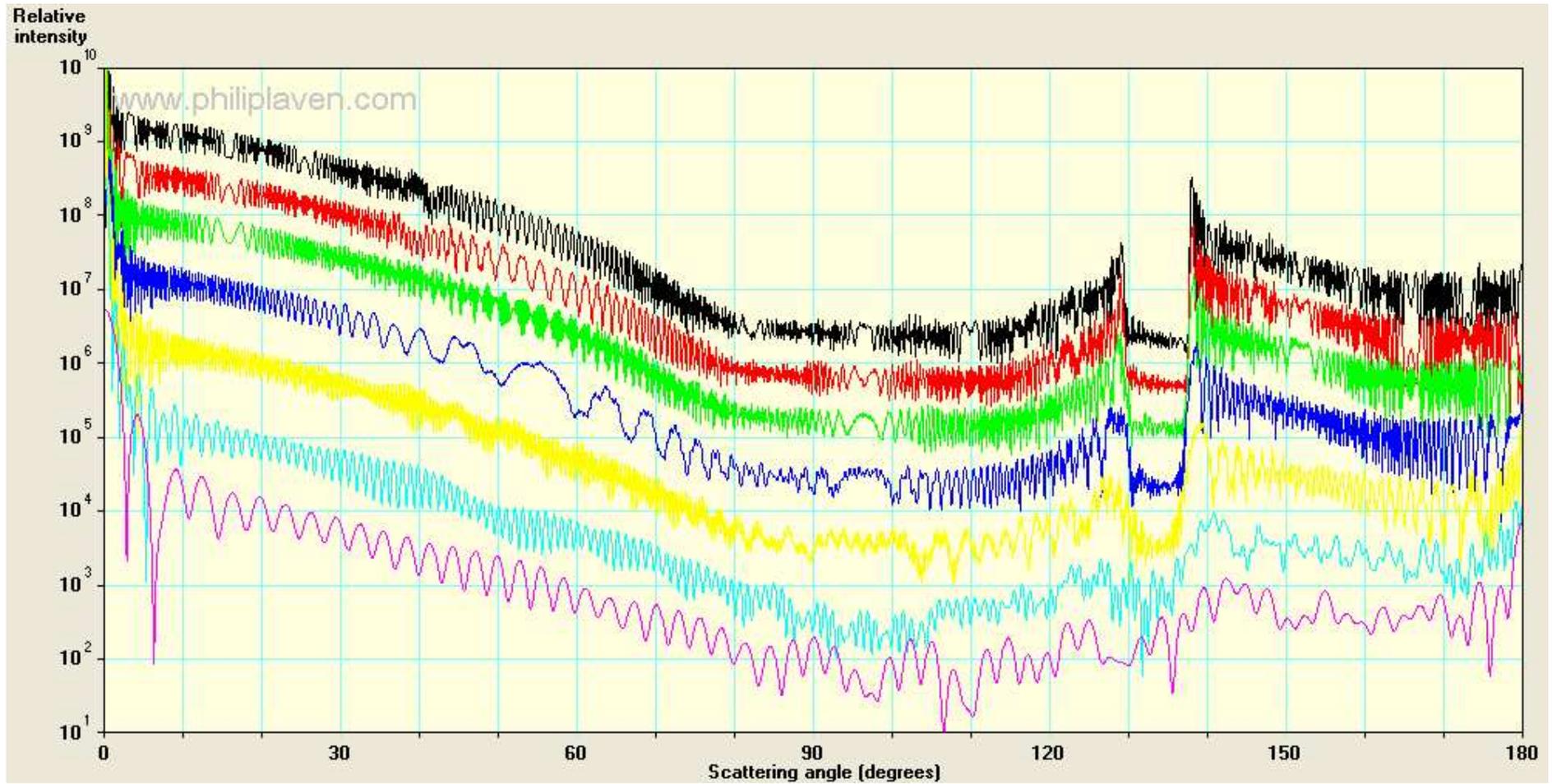
Interessant sind jetzt die  $\mu$ -Werte der Pole und Sattelpunkte des Integranden:

- Reelle Sattelpunkte stellen die gewöhnlich reflektierten und gebrochenen Lichtstrahlen dar
- Imaginäre Sattelpunkte korespondieren zu vollständigen inneren Reflektionen am Tunnelrand (evanescente waves), dringen nur wenig aus dem Tropfen (Tunneleffekte)
- Regge Pole entsprechen den Wellen, die den Tropfen tangential treffen, ihn umlaufen und dabei kontinuierlich wieder abstrahlen.  
(Oberflächenwellen)

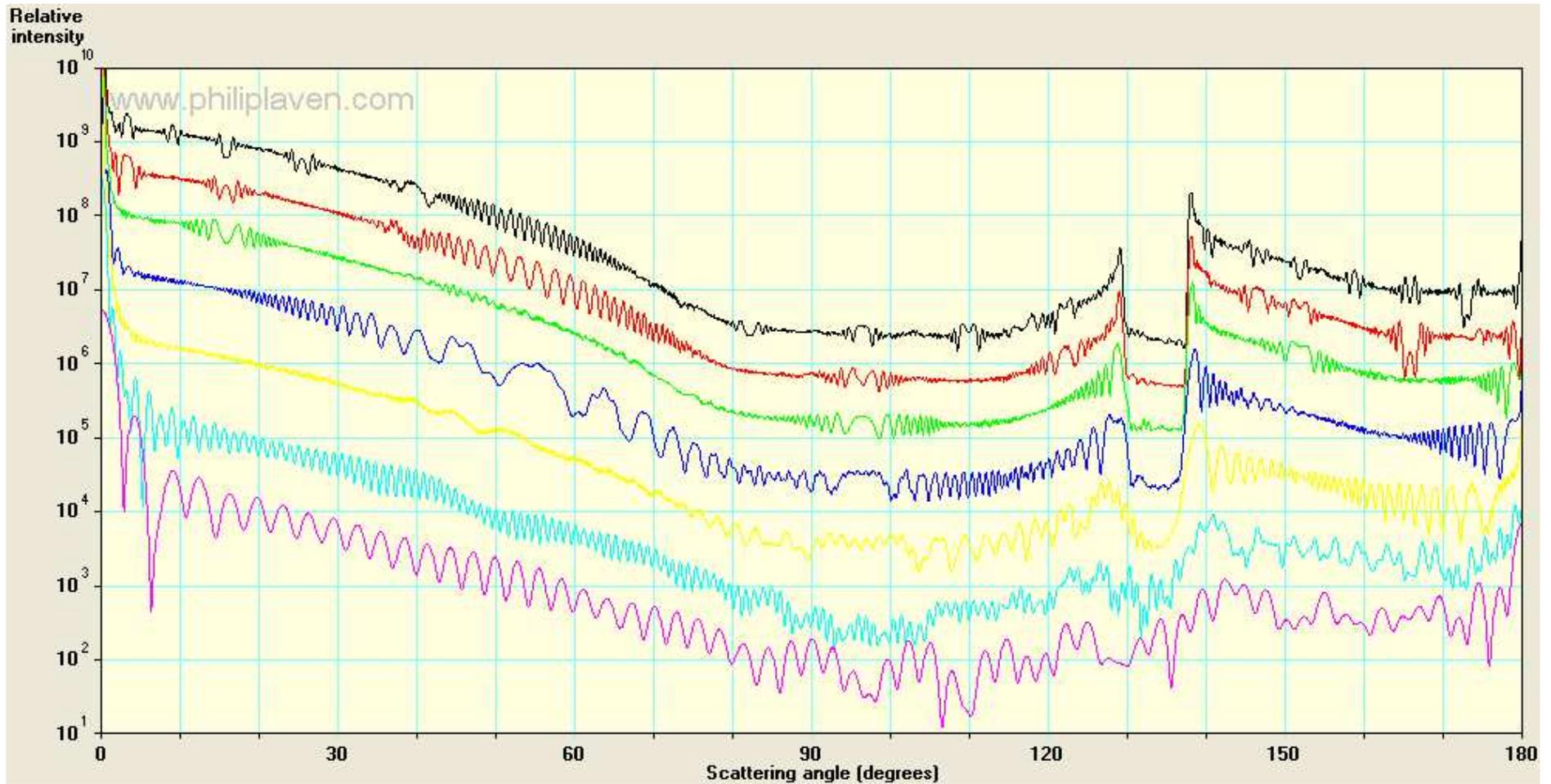
# Modern



# Farben



# Farben





## Extras

Weitere Faktoren, die die Farbe des Regenbogen beeinflussen

## Extras

Weitere Faktoren, die die Farbe des Regenbogen beeinflussen

- horizontale Tiefe des Regenschauers (mehr Tropfen  $\sim$  lebendigere Farben)
- Die Größenverteilung der Tropfen im Schauer (nicht alle Tropfen haben die gleiche Größe)
- In höheren Luftschichten sind die Tropfen meist kleiner als weiter unten
- Einfluss von anderen Partikeln in der Atmosphäre (Staub)
- Verformung der Regentropfen durch den Luftwiderstand
- Farbe des Hintergrundes
- Das genaue Spektrum der Sonne

### Mehrfache Regenbögen

- Die Meinungen über die Beobachtbarkeit des dritten Bogens divergieren, es gibt aber seltene Schilderungen
- Seine Existenz wurde von Halley vorhergesagt
- Er bildet einen Bogen von  $41.62^\circ$  um die Sonne (rotes Licht)
- Der Beobachter muss im Regen stehen und durch Wolkenlücken in die auf- oder untergehende Sonne schauen

### Mehrfache Regenbögen

- Die Meinungen über die Beobachtbarkeit des dritten Bogens divergieren, es gibt aber seltene Schilderungen
- Seine Existenz wurde von Halley vorhergesagt
- Er bildet einen Bogen von  $41.62^\circ$  um die Sonne (rotes Licht)
- Der Beobachter muss im Regen stehen und durch Wolkenlücken in die auf- oder untergehende Sonne schauen
- Im Labor (Laserlicht) wurden Bögen bis zur 13. Ordnung beobachtet

### Anwendungen

- In der Vergangenheit Motivator für die Entwicklung von Theorien zur Natur des Lichtes und Prüfstein für diese
- Licht kann auch an anderen Stoffen getreut werden
- Übertragung auf Streuung von Partikeln in Quantenmechanik
- komplexe Drehmoment-Darstellung wird auch in der String-Theorie genutzt

## Extras



## Extras

