Platonische Körper oder das Geheimnis der A_5

Peter Maaß, Uttendorf 2005

- Konstruktion platonischer Körper
- Symmetriegruppen der platonischen Körper
- Die Primzahlen der Gruppentheorie
- Das Geheimnis der A_5

Konstruktion platonischer Körper

Definition: Ein Polyeder heißt regulär, wenn alle seine Oberflächen aus demselben regelmäßigen Vieleck bestehen und in jeder Ecke gleich viele dieser Vielecke zusammenstoßen.

Beispiel: Würfel: Quadrate, 3 Quadrate in jeder Ecke

Vollständige Liste platonischer Körper

Fläche	Wie viele je Ecke?	Name
Dreieck	3	Tetraeder
Dreieck	4	Octaeder
Dreieck	5	Ikosaeder
Viereck	3	Würfel
Fünfeck	3	Dodekaeder

Geschichte:

- Hexaeder (Würfel): uralt
- Dodekaeder, Tetraeder: Pythagoras, Heron von Alexandria
- Oktaeder, Ikosaeder: Theaitetos von Athen 380 v. Chr.

Euklid "Buch XIII der Elemente", 300 v.Chr., Konstruktionsbeschreibungen, Nachweis vollständig.

Platon: Philosophie der vier Elementen
Erde (Hexaeder), Wasser (Ikosaeder), Feuer (Tetraeder) und Luft (Oktaeder), Himmelsäther (Dodekaeder)

Johannes Kepler, 1596, Mysterium Cosmographicum

damals sechs bekannte Planeten
Planeten beschrieben Kreisbahnen auf Kugelschalen

„Zwischen diese Kugelschalen liegen die Platonischen Körper
so, daß jeweils eine Kugel Innenkugel des Körpers und
die folgende Kugel Außenkugel des Körpers ist“

- Oktaeder zwischen Merkur und Venus
- Ikosaeder zwischen Venus und Erde
- Dodekaeder zwischen Erde und Mars
- Tetraeder zwischen Mars und Jupiter
- Würfel zwischen Jupiter und Saturn

Symmetriegruppen der platonischen Körper

- Drehungen um Eckpunkte
- Drehungen um Seitenmittelpunkte
- Drehungen um Kantenmittelpunkte

Tetraeder: 4 Eckpunkte {1,2,3,4}

Drehungen um Ecke 1: (1)(234) und (1)(243)
analog Drehungen um Ecken 2,3,4 : insgesamt 8 Dreier-Drehungen

Drehungen um Seitenmittelpunkte sind identisch mit Drehungen um Ecken

Drehungen um Kantenmittelpunkte: 3 Paare gegenüberliegender Kanten
3 Zweier-Drehungen (12)(34), (13)(24) , (14)(23)

außerdem noch Identität (1)(2)(3)(4)

Insgesamt 12 Symmterieoperationen.

Permutationsgruppen

Def: Eine Gruppe G ist eine Menge von Elementen {g | g in G} mit 1 ε G
G ist abgeschlossen bezüglich einer Verknüpfung (Multiplikation),

- g, h in G → gh in G
- g in G → g^{-1} in G

Alle Permutationen der Zahlen {1,2,3,4, ..., n} bilden die S_n

Notation über Zyklen z.B. (135)(24)(6), d.h. 1 à 3, 3 à 5, 5 à 1 , ...

Bemerkungen:

- Jede Permutation kann als Folge unabhängiger Zyklen dargestellt werden
- Jede Permutation kann als Folge von Vertauschungen von zwei Zahlen dargestellt werden $(123) = (23)(12)$

Anzahl der Vertauschungen: Parität ist eindeutig

A_4 Untergruppe der S_4 ($A_4 < S_4$):
alle Permutationen der S_4, die sich mit einer geraden Anzahl von Vertauschungen darstellen lassen.

(3-er Zyklen und Doppel-Zweier ok, keine 4-er Zyklen)

$|S_4| = 4! = 24$ $|A_4| = 12$ A_4 Symmetriegruppe des Tetraeders
$|S_5| = 5! = 120$ $|A_5| = 60$

Symmetriegruppe des Ikosaeders:

- Drehungen um Ecken: 20 Dreier-Symmetrien
- Drehungen um Seiten Mittelpunkte: 24 Fünfersymmetrien
- Drehungen um Kantenmittelpunkte: 15 Zweier-Symmetrien
- Identität 1

insgesamt 60 Symmetrien

Beweis verwendet Sylow-Sätze

1) $H < G$: $|H|$ ist Teiler von $|G|$
2) p^k ist Teiler von $|G|$: ex. $H<G$ mit $|H| = p^k$
3) $q=\#H$ mit $|H|=p^k$: q ist Teiler von $|G|$ und $q = 1 \bmod(p)$

A_5 ist Symmetriegruppe des Ikosaeders

Die Primzahlen der Gruppentheorie

H<G,   H ist Gruppe, abgeschlossen bzgl. Multiplikation,   HH=H

Faktorisierung (Nebenklassen)   G/H

G/H \ = { gH | g= g1,.., gn }   mit |G/H| =|G|/|H| = n

Wann ist G/H selbst wieder eine Gruppe?

g1 H g2 H = g1 g2 H

D.h.   g1 H g2 H = g1 g2 g2^{-1} H g2 H = g1 g2 H H = g1 g2 H

genau dann wenn für all g gilt   g^{-1} H g = H

Definition: Eine Untergruppe H von G heißt Normalteiler, falls
Für alle g in G: $g^{-1} Hg=H$.

Triviale Normalteiler: {1}, G

Falls G keine (nicht-trivialen) Normalteiler besitzt,
so ist G nicht teilbar, einfache Gruppe (Prim-Gruppe)

<u>Klassifizierung aller einfachen Gruppen</u>
Serien einfacher Gruppen, z.B. Z_p, p Primzahl (Sylowsatz)

Das Geheimnis der A_5

A_5 ist eine einfache Gruppe

Lemma 1: Sei H ein Normalteiler von A_5, der einen Dreierzyklus enthält.
Dann enthält H alle Dreierzyklen.

Lemma2: Jeder Normalteiler H von A_5 enthält einen Dreierzyklus.

Lemma 3: Wenn eine Untergruppe H der A_5 alle Dreierzyklen enthält,
dann $H=A_5$.

Beweis Lemma 1:

o.B.d.A. (123) ist der Dreierzyklus in H

H Normalteiler, d.h. für g= (23k) gilt g^{-1} (123) g in H,

Also (23k) (123) (k32) = (13k) in H usw. .

Beweis Lemma 3:

Jedes g in H läßt sich als Produkt einer geraden Anzahl von 2-er Zyklen schreiben.

(12)(2k)=(1k2) , (12)(34)=(123)(143).

Beweis Lemma 2:

Sei g in H , das nur minimal viele Ziffern bewegt

Unter diesen habe g in der Zyklendarstellung einen maximal langen Zyklus.

Fallunterscheidungen. g=(12)(..), g=(123)(..), g=(1234)(..)

Geschichte: A_n, $n > 4$ ist eine einfache Gruppe:

alle einfachen Gruppen, die keiner Serie angehören heißen sporadische einfache Gruppen:

(Conway, Penrose, Janko, Fischer)

Klassifizierung aller einfachen Gruppen, ca. 1990