

# Partielle Differentialgleichungen in der Bildverarbeitung oder Partielle Differentialgleichungen zum Anfassen und Streicheln

Dirk Lorenz

11. Februar 2003

## 1 Einleitung

Partielle Differentialgleichungen sind ein sehr vielfältiges und starkes Hilfsmittel in der Bildverarbeitung. Für fast jede Anwendung in der Bildverarbeitung gibt es partielle Differentialgleichungen, die zur Lösung benutzt werden können.

Hier soll es hauptsächlich im folgende Problematik gehen:

*Bilder, die von Digitalkameras, Scannern oder von anderen bildgebenden Verfahren kommen sind verrauscht.*

*Oft sind Bilder von Kameras oder Scannern dazu noch unscharf.*

Das Ziel unserer Bemühungen ist es hier also, eine Methode zu entwerfen, die das Rauschen in einem Bild eliminiert, dabei aber das Bild in seiner Struktur möglichst wenig verändert.

Es gibt auch noch andere Ziele der Bildverarbeitung, z. B. das hervorheben und finden von bestimmten Strukturen oder das Bild in eine besser komprimierbare Form zu bringen. Um andere Ziele soll es hier aber nicht gehen.

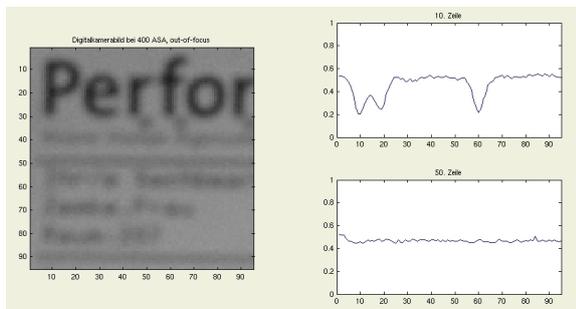


Abbildung 1: Ein Digitalkamerabild. Aufgenommen bei wenig Licht und schlecht fokussiert.

## 2 Die Rolle von PDEs

Die Philosophie bei der Anwendung von PDEs ist folgende: Man stellt sich ein Bild  $u_0$  als eine reellwertige Funktion auf einer rechteckigen oder auch quadratischen Bereich vor:  $u_0 : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Dieses Bild steckt man als Anfangswert in eine partielle Differentialgleichung. Es geht also um die Lösung des Problems:

$$\begin{aligned} u_t &= Pu \text{ in } [0, 1]^2 \\ u(0, \cdot) &= u_0 \\ \langle \nabla u | \vec{n} \rangle &= 0 \text{ auf } \partial[0, 1]^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Man erhält durch Lösung dieses Problem nicht nur ein Bild als Ergebnis, sondern eine Analyse des Bildes auf verschiedenen "Skalen", wobei das Wort "Skala" hier oft eine eher abstrakte Bedeutung hat. Die Familien von Operatoren

$$\{T_t \mid T_t(u_0) = \text{"Lösung des Problems (1) zur Zeit } t"\}$$

heißt "Scale-Space".

## 3 Differentialgleichungen sehen und verstehen

Gewöhnliche Differentialgleichungen der Form  $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$  lassen sich mit ein wenig Übung intuitiv verstehen. Der Schlüssel dazu bildet das Richtungsfeld (siehe Abbildung 2).

Für partielle Differentialgleichung ist es viel schwieriger, ein intuitives Verständnis zu entwickeln. In unserem Spezialfall gibt es jedoch viele Differentialoperatoren  $P$ , für die man ein gutes Gefühl entwickeln kann. Der Weg dazu führt über viele kleine Spezialfälle.

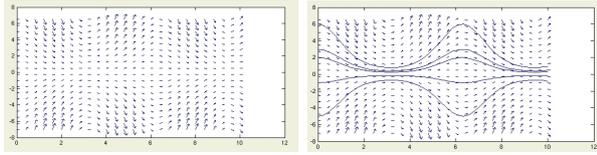


Abbildung 2: Das Richtungsfeld gibt einem alle Informationen, die man zum Verständnis einer gewöhnlichen Differentialgleichung benötigt.

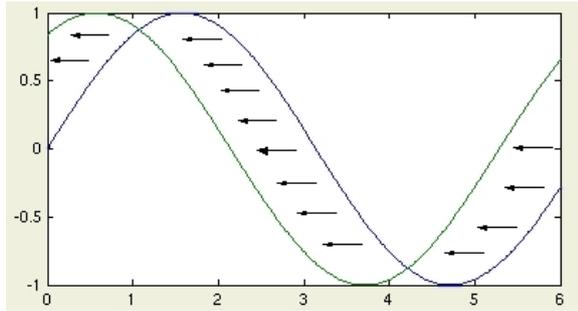


Abbildung 3: Lösung der Transportgleichung (2).

### 3.1 Transportgleichungen

Eine Gleichung der Form

$$u_t = au_x \quad (2)$$

heißen Transportgleichungen. Der Grund dafür ist ganz einfach und an der expliziten Lösung zu erkennen. Zu einem gegebenen Anfangswert  $u_0$  ist die Lösung der Transportgleichung (2) gegeben durch

$$u(t, x) = u_0(x + at),$$

das heißt die Lösung bewegt sich in Richtung  $-a$  (siehe Abbildung 3).

Transportgleichungen in 2-D haben die Form

$$u_t = \langle v | \nabla u \rangle \quad v \in \mathbb{R}^2 \quad (3)$$

Auch hier gibt es eine explizite Darstellung der Lösung:

$$u(t, x) = u_0(x + tv).$$

Die Lösung “bewegt” sich also in Richtung  $-v$ .

Mit diesem Wissen lassen sich jetzt schon schwierigere Gleichungen verstehen.

### 3.2 Dilation, Erosion und Shockfilter

Die Operationen Dilation und Erosion kommen aus der Mathematischen Morphologie. In Diffe-

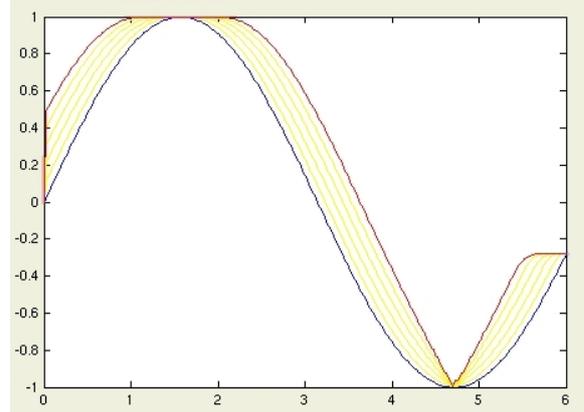


Abbildung 4: Lösung der Dilationsgleichung (4).

rentialgleichungsform sehen sie wie folgt aus:

$$u_t = |u_x| \text{ (Dilation)}, \text{ bzw. } u_t = -|u_x| \text{ (Erosion)}. \quad (4)$$

Diese Gleichungen kann man lokal als Transportgleichungen sehen. Aus Gleichung (4) folgt:

$$u_t = \pm \text{sign}(u_x)u_x.$$

Das heißt es wird etwas nach links transportiert wo  $u$  steigend (bzw. fallend) ist und nach rechts, wo  $u$  fallend (bzw. steigend) ist (siehe Abbildung 4).

Das ist natürlich in keiner Weise ein Beweis dafür, dass die Lösung sich wirklich so entwickelt. Insbesondere wird für diese Differentialgleichung ein erweiterter Lösungsbegriff benötigt (Viskositätslösungen), da die Lösungen mit der Zeit Unstetigkeiten in den ersten Ableitungen entwickeln. Um aber die Differentialgleichung “verstehen” zu können ist das schon genug.

In 2-D sehen die Dilations- und Erosionsgleichung wie folgt aus:

$$u_t = |\nabla u| \text{ (Dilation)}, \text{ bzw. } u_t = -|\nabla u| \text{ (Erosion)}. \quad (5)$$

Die Interpretation geht fast wie im eindimensionalen Fall. Wir formen Gleichung (5) um:

$$u_t = \pm \left\langle \frac{\nabla u}{|\nabla u|} | \nabla u \right\rangle.$$

Es wird also auch etwas mit Geschwindigkeit eins in (entgegengesetzte) Richtung des Gradienten transportiert.

Weitere alte Gleichungen aus der Mathematischen Bildverarbeitung sind die Shockfiltergleichungen, zum Beispiel in 1-D:

$$u_t = -\text{sign}(u_{xx})|u_x|. \quad (6)$$

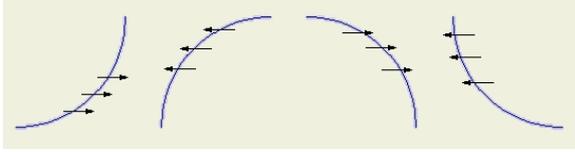


Abbildung 5: Veranschaulichung der Transportrichtung bei der Shockfiltergleichung (6).

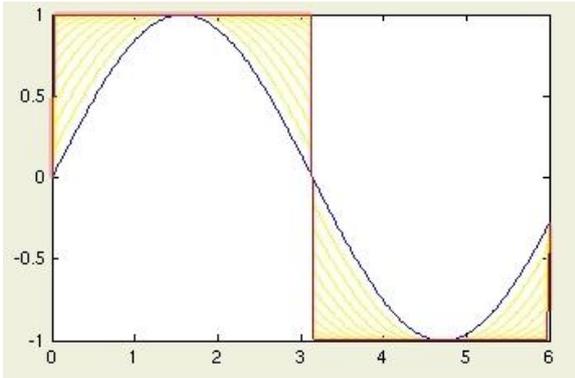


Abbildung 6: Veranschaulichung der Lösung der Shockfiltergleichung (6).

Die Interpretation geht natürlich wieder wie bei der Dilationsgleichung (4):

$$u_t = -\text{sign}(u_{xx}) \text{sign}(u_x) u_x.$$

Hier ist die Richtung des Transports also auch noch von der Krümmung der Funktion abhängig. Abbildung 5 veranschaulicht dies.

Das Verhalten der Lösung ist in Abbildung 6 zu sehen. Unter bestimmten Voraussetzungen lässt sich zeigen, dass die Lösung gegen eine stückweise konstante Funktion konvergiert, welche in die ursprünglichen Wendepunkten Sprungstellen hat.

Auch Shockfiltergleichungen gibt es natürlich in 2-D. Hier gibt es jedoch mehrere Möglichkeiten, den Term  $\text{sign}(u_{xx})$  zu verallgemeinern. Die einfachste Möglichkeit ist folgende:

$$u_t = -\text{sign}(\Delta u) |\nabla u|. \quad (7)$$

Zur Interpretation bringen wir die Gleichung wieder in Skalarproduktform:

$$u_t = -\langle \text{sign}(\Delta u) \frac{\nabla u}{|\nabla u|}, |\nabla u| \rangle.$$

Der Laplaceoperator  $\Delta$  hat etwas mit Konvexität und Konkavität zu tun. Man kann sagen, dass in

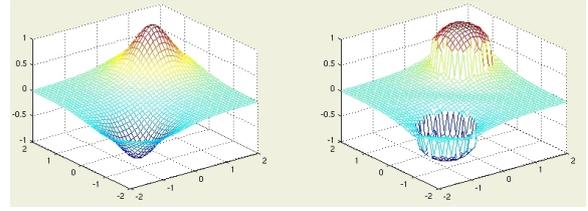


Abbildung 7: Veranschaulichung der Lösung der Shockfiltergleichung (7).

konvexen Gebieten der Funktion  $u$  ein Transport in entgegengesetzte Richtung des Gradienten (also in Abstiegsrichtung) stattfindet und in konkaven Bereichen ein Transport in Anstiegsrichtung (siehe Abbildung 7).

### 3.3 Mean-Curvature-Motion

Die vorerst schwierigste Gleichung der Bildverarbeitung, die wir “verstehen” wollen, ist die Gleichung zur Mean-Curvature-Motion:

$$u_t = \text{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) |\nabla u|. \quad (8)$$

Auch bei dieser Gleichung kann man schon erkennen, dass man sie als Transportgleichung auffassen kann. Es wird wieder Masse in die Richtung oder die Entgegengesetzte Richtung des Gradienten transportiert. Diesmal hängt die Richtung und die Geschwindigkeit aber vom komplizierten Term  $\text{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$  ab. Um diesen vernünftig zu interpretieren, brauchen wir die Hilfe der Differentialgeometrie. Denn die verrät uns, dass die Divergenz der Einheitsnormalen  $\nabla u / |\nabla u|$  auf einer “Höhenlinie” gleich ihrer Krümmung  $\kappa(u)$  ist. Das heißt, die Differentialgleichung lautet

$$u_t = \langle \kappa(u) \frac{\nabla u}{|\nabla u|}, |\nabla u| \rangle.$$

Mit  $\kappa(u)$  ist die orientierte Krümmung gemeint. In diesem Fall gilt:  $\kappa(u) > 0$ , falls die Höhenlinie in Richtung von  $\nabla u^\perp = (-u_y, u_x)$  rechtsgekrümmt ist. Man kann sagen: Durch Mean-Curvature-Motion werden die Höhenlinien geradegezogen (siehe Abbildung 8).



Abbildung 8: Die Wirkung der Mean-Curvature-Motion aus Gleichung (8).

## 4 Diffusionsgleichungen

### 4.1 Das Konzept der Diffusion

Das Konzept der Diffusion kommt aus der Physik. Diffusion beschreibt, wie sich ein Quantität (z. B. Wärme oder eine Massendichte) mit dem Lauf der Zeit verhält.

Die zugehörige Differentialgleichung lässt sich aus zwei Prinzipien ableiten:

- Die Quantität  $u$  fließt in Abstiegsrichtung, das heißt, der "Fluss"  $\vec{j}$  zeigt in Abstiegsrichtung:

$$\vec{j} = -g\nabla u$$

Dabei darf noch ein "Diffusionstensor" oder ein "Diffusionskoeffizient"  $g$  auftauchen.

- In jedem Teilgebiet  $\Omega \subset [0, 1]^2$  ist die Massenänderung gleich dem Fluss durch den Rand. Zusammen mit dem Gauss'schen Satz ergibt das

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u dx = - \int_{\partial\Omega} \langle \vec{j} | \vec{n} \rangle = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{j}) dx.$$

Zusammengenommen gehorcht ein Diffusionsprozess also der Differentialgleichung

$$u_t = \operatorname{div}(g\nabla u). \quad (9)$$

In einer Dimension sieht die Diffusionsgleichung so aus:

$$u_t = (gu_x)_x. \quad (10)$$

Durch die Wahl  $g \equiv 1$  erhält man die sogenannte Wärmeleitungs-Gleichung

$$u_t = \Delta u$$

deren Glättungseigenschaft bekannt sind (z. B. ist für  $t > 0$  die Lösung unendlich oft differenzierbar).

### 4.2 Anwendung in der Bildverarbeitung

Wie kann man dies in der Bildverarbeitung anwenden? Die oben erwähnte Wärmeleitgleichung ist sehr gut geeignet, um Rauschen zu entfernen. Ein entscheidender Nachteil ist, dass durch das Filtern mit der Wärmeleitungs-Gleichung nicht nur das Rauschen, sondern auch wichtige Strukturen (insbesondere Kanten) entfernt werden.

Dem kann man beikommen, indem man den Diffusionskoeffizienten  $g$  besser wählt. Am besten sollte man ihn so wählen, dass er dort groß ist, wo das Bild uninteressant ist, und dort klein, wo es interessant ist. In der Bildverarbeitung gilt hier das Dogma: *Bilder sind dort interessant, wo der Gradient groß ist.*

Man setzt daher  $g = g(|\nabla u|)$  mit

$$g(s) = e^{-\frac{s^2}{\lambda^2}} \quad \text{oder} \quad (11)$$

$$g(s) = \frac{1}{1 + \frac{s^2}{\lambda^2}}.$$

Die ergibt die sogenannte Perona-Malik-Gleichung:

$$u_t = \operatorname{div}(g(|\nabla u|)\nabla u). \quad (12)$$

### 4.3 Die eindimensionale Perona-Malik-Gleichung

In einer Dimension ergibt sich die Gleichung

$$u_t = (g(|u_x|)u_x)_x. \quad (13)$$

Rechnet man die Ableitung aus, erhält man

$$u_t = \Phi'(|u_x|)u_{xx} \quad (14)$$

mit  $\Phi(s) = sg(s)$ .

Im Hinblick auf dem 2-D-Fall führen wir folgende Notation ein:  $u_\nu$  bedeutet: Leite den Term in Normalenrichtung ab. In 1-D gilt dann z. B.  $u_\nu = |u_x|$  und  $u_{\nu\nu} = u_{xx}$ .

Wir wollen nun genauer untersuchen, was die Differentialgleichung speziell mit Kanten macht. Dazu benötigen wir ein Definition für eine Kante. Über den oben eingeführten Begriff der Normalenableitung lässt sich diese wie folgt schreiben: Eine Kante ist dort wo gilt:

1.  $u_\nu > 0$ , d. h. das Bild ist nicht flach

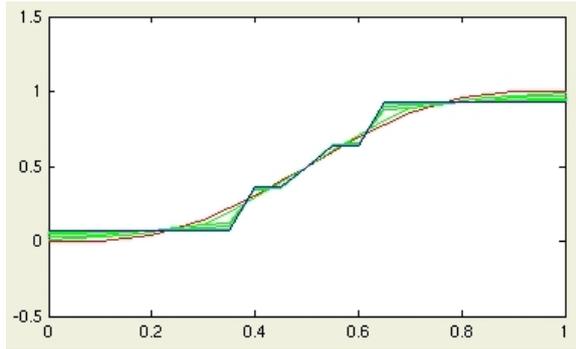


Abbildung 9: Zum Staircasing-Effekt.

2.  $u_{\nu\nu} = 0$ , d. h. die Krümmung in Normalenrichtung ist 0
3.  $u_{\nu\nu\nu} < 0$ , d. h. die Krümmung in Normalenrichtung wechselt das Vorzeichen.

Zusammengenommen kann man sagen: Eine Kante ist dort, wo in Normalenrichtung ein nicht-flacher Wendepunkt von linksgekrümmt nach rechtsgekrümmt ist. Diese Definition lässt sich eins zu eins ins zweidimensionale übertragen.

Jetzt, wo wir die Definition einer Kante haben, können wir Anforderungen an die Lösung unsere Differentialgleichung (13) stellen und gucken, für welche Funktion  $g$  diese erfüllt werden.

Wenn unsere Differentialgleichung Kanten schärfen machen soll, sollte in einem Kantenpunkt folgendes gelten:

1.  $\partial_t u_\nu > 0$ , d. h. die Kante wird schärfer
2.  $\partial_t u_{\nu\nu} = 0$ , d. h. die Kante bleibt eine Kante
3.  $\partial_t u_{\nu\nu\nu} < 0$ , d. h. in einem Kantenpunkt steigt die Steigung am schnellsten.

Der dritte Punkt bedarf einer Erläuterung. Er bedeutet, dass die Änderungsrate der Steigung im Kantenpunkt ein lokales Maximum hat. Ist dies verletzt, so gibt es in der Nachbarschaft der Kante einen Punkt, in dem die Steigung schneller steigt. Aus einer "Rampe" wird eine "Treppe" statt einer "Stufe". Es kommt zum "staircasing" (siehe Abbildung 9).

Die obigen Anforderungen lassen sich in Anforderungen an die Funktion  $\Phi$  aus Gleichung (14) ausdrücken. In einem Kantenpunkt soll also gelten:

1.  $\partial_t u_\nu = \partial_\nu(\Phi'(u_\nu)u_{\nu\nu}) = \Phi'(u_\nu)u_{\nu\nu\nu} \stackrel{!}{>} 0$

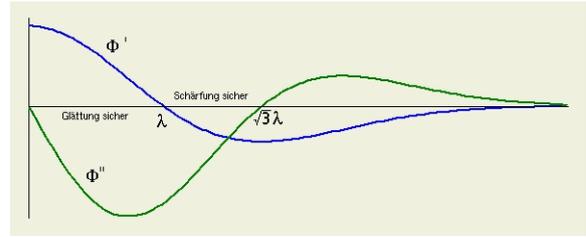


Abbildung 10: Zum Effekt der Perona-Malik-Gleichung an Kanten.

2.  $\partial_t u_{\nu\nu} = \partial_{\nu\nu}(\Phi'(u_\nu)u_{\nu\nu}) = 0 \stackrel{!}{=} 0$
3.  $\partial_t u_{\nu\nu\nu} = \partial_{\nu\nu\nu}(\Phi'(u_\nu)u_{\nu\nu}) = 3\Phi''(u_\nu)u_{\nu\nu\nu}^2 + \Phi'(u_\nu)u_{\nu\nu\nu\nu} \stackrel{!}{<} 0$

Die zweite Bedingung ist immer erfüllt. Die erste Bedingung ist durch die Forderung  $\Phi'(u_\nu) < 0$  erfüllen (in einem Kantenpunkt gilt  $u_{\nu\nu\nu} < 0$ ). Die dritte Bedingung lässt sich unter der nicht unsinnigen Annahme  $u_{\nu\nu\nu\nu} > 0$  erfüllen durch  $\Phi''(u_\nu) < 0$ .

Für die typischen Perona-Malik-Funktionen aus Gleichung (11) ergibt das (siehe Abbildung 10):

1. Es werden nur Kanten mit einer Steigung zwischen  $\lambda$  und  $\sqrt{3}\lambda$  vernünftig geschärft.
2. Kanten mit einer Steigung kleiner als  $\lambda$  werden unschärfer.
3. An Kanten mit einer Steigung größer als  $\sqrt{3}\lambda$  tritt eventuell "staircasing" auf.

In Abbildung 11 kann man alle drei Effekte auf einmal sehen.

All diese Effekte treten auch im zweidimensionalen auf, sie sind aber nicht so gut zu visualisieren.

Die Perona-Malik-Gleichung hat noch ein paar weitere seltsame Eigenschaften:

- Ist der Anfangswert  $u_0$  nicht unendlich oft differenzierbar, so hat die Gleichung keine Lösungen.
- Fast jede Implementierung liefert gute Ergebnisse, auch bei unstetigen Anfangswerten.
- Fast jede Semi-Diskretisierung im Raum liefert ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen, welches "gut gestellt" ist.

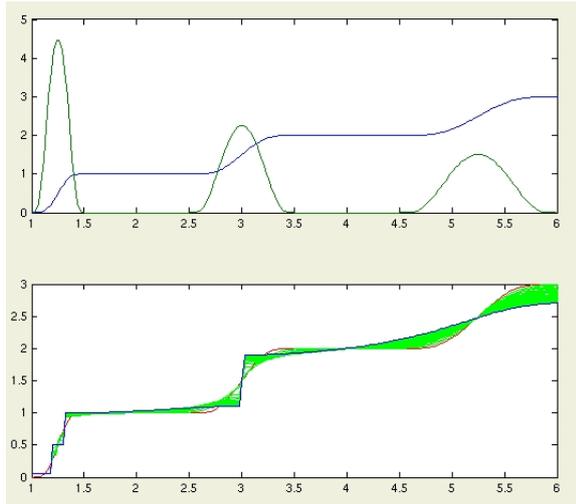


Abbildung 11: Oben: blau Anfangswert  $u_0$ , grün Ableitung davon. Unten: Wirkung der Perona-Malik-Gleichung mit  $g(s) = e^{-\left(\frac{s}{2\lambda}\right)^2}$ , und  $\lambda = 2$ .

- Mit einer kleinen Veränderung der Gleichung erhält man Existenz und Eindeutigkeit einer glatten Lösung, auch bei unstetigen Anfangswerten.

Die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung erhält man durch die folgende Regularisierung

$$u_t = \operatorname{div}\left(g(|G_\sigma * \nabla u|)\nabla u\right)$$

wobei  $G_\sigma$  eine Gaußkurve mit Varianz  $\sigma$  ist. Dies bewirkt auch, das impulsives Rauschen (welches große Gradienten verursacht, welche eigentlich verstärkt werden) rausgeglättet werden.

## 5 Was man mit Differentialgleichungen noch machen kann

Um zu zeigen, dass man partielle Differentialgleichungen auch für ganz andere Zwecke, aber mit ähnlichen Überlegungen wie in der Bildverarbeitung, einsetzen kann, hier ein kleines Beispiel.

Das Problem ist folgendes:

Suche zu einer nicht-konvexen Funktion die größte konvexe Funktion, die unterhalb liegt.

In einer Dimension ist dies Problem auch schon nicht einfach (Abbildung 12). In zwei Dimensionen ist dies noch viel schwieriger.

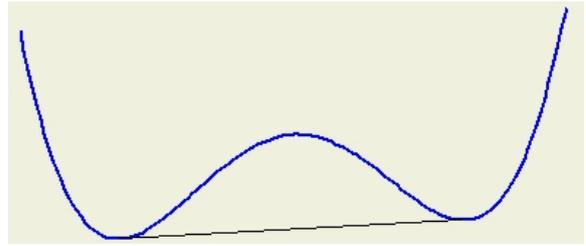


Abbildung 12: Konvexifizierung einer eindimensionalen Funktion

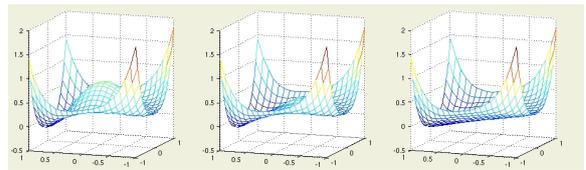


Abbildung 13: Konvexifizierung einer zweidimensionalen Funktion

Dies Problem lässt sich mit Hilfe einer Transportgleichung lösen:  
Die Lösung des Problems

$$u_t = \min(0, \lambda_{\min})|\nabla u|$$

$$u(0, \cdot) = u_0$$

$\lambda_{\min}$  : kleinster Eigenwert der Hesse-Matrix von  $u$

konvergiert für  $t \rightarrow \infty$  gegen die Konvexifizierung von  $u_0$ .

Falls der Abschnitt 3 gut genug geschrieben war, sollte die Leserin oder der Leser jetzt in der Lage sein, sich dies selbst zu erklären :-).