Die Dynamik des Konsens

Dirk A. Lorenz

Winterseminar AG Technomathematik, Uttendorf

13. Februar 2006

Ende

Beispiele für Meinungsdynamik

Beispiel: Expertenrunde

Ein Expertengremium soll schätzen, wieviel die Erdtemperatur in den nächsten 10 Jahren steigen wird.

Beispiel: Haushalt

Eine Runde von Leuten soll eine bestimmte Summe Geld auf Projekte verteilen.

Rundenbasierte Meinungsbildungsmodell

Das Setting

- Es sitzen m 'Experten' zusammen.
- Eine Meinung besteht aus n reellen Zahlen.
- Ein Meinungsbildungsprozess verläuft in Runden: Die Experten ziehen andere Meinungen in betracht und überdenkt seine Meinung neu.

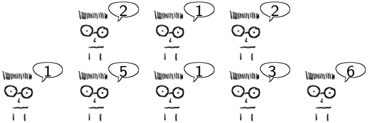
Meinungsprofil: $X(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$
Vertrauensmatrix: $A(X(t)) \in \mathbb{R}^{m \times m}$
Meinungsbildungsprozess:

$$X(t+1) = A(X(t))X(t)$$

$$\begin{bmatrix} & & \\ & A(X(t)) & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t)_{[1,:]} \\ \vdots \\ X(t)_{[m,:]} \end{bmatrix}$$

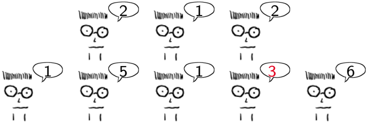
Alle am Runden Tisch: Hegselmann-Krause

Jeder Experte bezieht nur die Meinungen ein,
die nahe bei seiner eigenen liegen.



Alle am Runden Tisch: Hegselmann-Krause

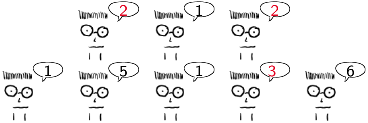
Jeder Experte bezieht nur die Meinungen ein,
die nahe bei seiner eigenen liegen.



$$\#I(i,X) = \{j \mid \|X_{[i,:]} - X_{[j,:]}\| \leq \epsilon\}$$

Alle am Runden Tisch: Hegselmann-Krause

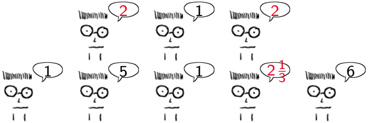
Jeder Experte bezieht nur die Meinungen ein,
die nahe bei seiner eigenen liegen.



$$\#I(i,X) = \{j \mid \|X_{[i,:]} - X_{[j,:]}\| \leq \epsilon\}$$

Alle am Runden Tisch: Hegselmann-Krause

Jeder Experte bezieht nur die Meinungen ein,
die nahe bei seiner eigenen liegen.

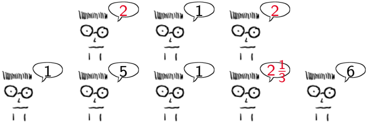


$$\# I(i, X) = \{j \mid \|X_{[i,:]} - X_{[j,:]}\| \leq \epsilon\}$$

Von diesen nimmt er das Mittel.

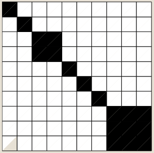
Alle am Runden Tisch: Hegselmann-Krause

Jeder Experte bezieht nur die Meinungen ein, die nahe bei seiner eigenen liegen.



$$\#I(i,X) = \{j \mid \|X_{[i,:]} - X_{[j,:]}\| \le \epsilon\}$$

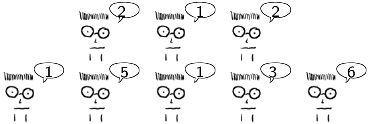
Von diesen nimmt er das Mittel.



$$X(t+1)_{[i,:]} = \frac{1}{\#I(i,X)} \sum_{j \in I(i,X)} X(t)_{[j,:]}$$

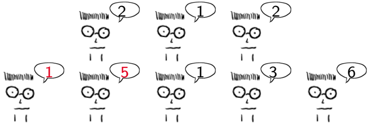
$$A(X)_{[i,j]} = \begin{cases} \frac{1}{\#I(i,X)} & \text{falls } j \in I(i,X) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zwiegespräch in der Kaffeepause: Weisbuch-Deffuant



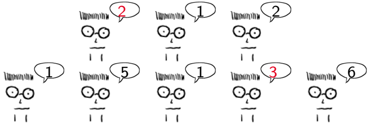
Zwei zufällige Experten einigen sich, falls sie nah beieinander sind.

Zwiegespräch in der Kaffeepause: Weisbuch-Deffuant



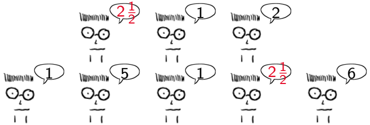
Zwei zufällige Experten einigen sich, falls sie nah beieinander sind.

Zwiegespräch in der Kaffeepause: Weisbuch-Deffuant



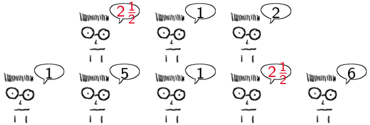
Zwei zufällige Experten einigen sich, falls sie nah beieinander sind.

Zwiegespräch in der Kaffeepause: Weisbuch-Deffuant



Zwei zufällige Experten einigen sich, falls sie nah beieinander sind.

Zwiegespräch in der Kaffeepause: Weisbuch-Deffuant



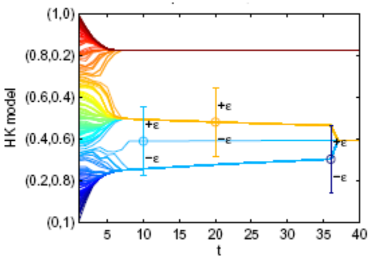
Zwei zufällige Experten einigen sich, falls sie nah beieinander sind.

Zwei Experten i und j zufällig gewählt.
Falls $\|X(t)_{[i,:]} - X(t)_{[j,:]}\| \leq \epsilon$

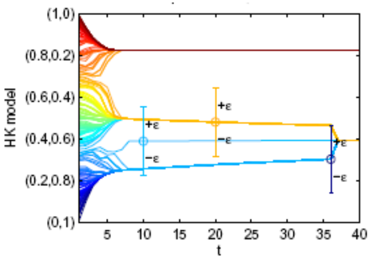
$$X(t+1)_{[i,:]} = \tfrac{1}{2}\left(X(t)_{[i,:]} + X(t)_{[j,:]}\right)$$

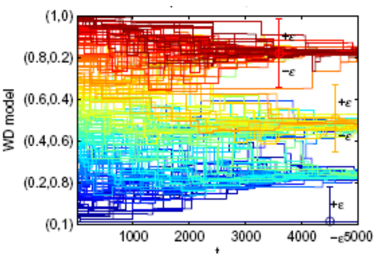
$$A(t)_{[i,i]} = A(t)_{[j,j]} = A(t)_{[i,j]} = A(t)_{[j,i]} = \frac{1}{2}$$

Ein erster Eindruck der Dynamik

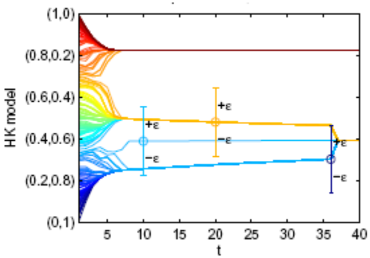


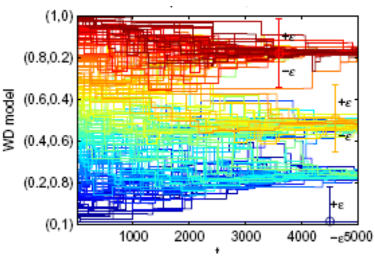
Ein erster Eindruck der Dynamik





Ein erster Eindruck der Dynamik





Konvergenz?

Ende

Begriffe

Vertrauensmatrix: $A \in \boldsymbol{R}^{m \times m}$ nicht-negativ mit Zeilensumme 1

Konsensmatrix: K Vertrauensmatrix mit gleichen Zeilen

Akkumulation: Für Matrixfolge $A(t)$ ist

$$\underline{A}(t_1, t_0) = A(t_1 - 1) \cdots A(t_0 + 1) A(t_0)$$

Vorüberlegungen

- $X(t)$ ergibt sich durch Akkumulation von Vertrauensmatrizen:
  $X(1) = A(X(0))X(0)$

Vorüberlegungen

- $X(t)$ ergibt sich durch Akkumulation von Vertrauensmatrizen:
  $X(2) = A(X(1))A(X(0))X(0)$

Vorüberlegungen

- $X(t)$ ergibt sich durch Akkumulation von Vertrauensmatrizen:
  $$X(t) = A(X(t-1)) \cdots A(X(1))A(X(0))X(0)$$

Vorüberlegungen

- $X(t)$ ergibt sich durch Akkumulation von Vertrauensmatrizen:
$$X(t) = A(X(t-1)) \cdots A(X(1))A(X(0))X(0)$$
$\longrightarrow$ betrachte also allgemeine Akkumulation von solchen.

Vorüberlegungen

- $X(t)$ ergibt sich durch Akkumulation von Vertrauensmatrizen:
  $$X(t) = A(X(t-1)) \cdots A(X(1))A(X(0))X(0)$$
  $\longrightarrow$ betrachte also allgemeine Akkumulation von solchen.
- Konsens wird erreicht, falls
  $$\lim_{t\to\infty} \underline{A}(t,0) = K\underline{A}(t_0,0)$$
  mit einer Konsensmatrix K.

Vorüberlegungen

- $X(t)$ ergibt sich durch Akkumulation von Vertrauensmatrizen:
  $$X(t) = A(X(t-1)) \cdots A(X(1))A(X(0))X(0)$$
  $\rightarrow$ betrachte also allgemeine Akkumulation von solchen.
- Konsens wird erreicht, falls
  $$\lim_{t\to\infty} \underline{A}(t,0) = K\underline{A}(t_0,0)$$
  mit einer Konsensmatrix K.
- Der Prozess konvergiert, falls:
  $$\lim_{t\to\infty} \underline{A}(t,0) = \begin{bmatrix} K_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & K_p \end{bmatrix} \underline{A}(t_0,0)$$
  mit Konsensmatrizen K_i.

Satz

$A(t)$ Folge von Vertrauensmatrizen mit:

1. *$A(t)$ hat positive Diagonale,*
2. *Nullenmuster von $A(t)$ ist symmetrisch,*
3. *Es gibt $\delta > 0$ so dass kleinster positiver Eintrag von $A(t)$ größer als δ ist.*

Dann

$$\lim_{t\to\infty} \underline{A}(t,0) = \begin{bmatrix} K_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & K_p \end{bmatrix} \underline{A}(t_0,0)$$

(nach Sortierung der Indizes).

(Lorenz, 2003)

Satz

$A(t)$ Folge von Vertrauensmatrizen mit:

1. *$A(t)$ hat positive Diagonale,*
2. *Nullenmuster von $A(t)$ ist symmetrisch,*
3. *Es gibt $\delta > 0$ so dass kleinster positiver Eintrag von $A(t)$ größer als δ ist.*

Dann

$$\lim_{t\to\infty} \underline{A}(t,0) = \begin{bmatrix} K_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & K_p \end{bmatrix} \underline{A}(t_0,0)$$

(nach Sortierung der Indizes).

(Jan Lorenz, 2003)

Übersetzung des Satzes

1. $A(t)$ hat positive Diagonale.
2. Nullenmuster von $A(t)$ ist symmetrisch.
3. Es gibt $\delta > 0$ so dass kleinster positiver Eintrag von $A(t)$ größer als δ ist.

Übersetzung des Satzes

1. $A(t)$ hat positive Diagonale.

   Die Experten sind selbstbewusst.

2. Nullenmuster von $A(t)$ ist symmetrisch.

3. Es gibt $\delta > 0$ so dass kleinster positiver Eintrag von $A(t)$ größer als δ ist.

Übersetzung des Satzes

1. $A(t)$ hat positive Diagonale.

   Die Experten sind selbstbewusst.

2. Nullenmuster von $A(t)$ ist symmetrisch.

   Vertrauen beruht auf Gegenseitigkeit.

3. Es gibt $\delta > 0$ so dass kleinster positiver Eintrag von $A(t)$ größer als δ ist.

Übersetzung des Satzes

1. $A(t)$ hat positive Diagonale.

   Die Experten sind selbstbewusst.

2. Nullenmuster von $A(t)$ ist symmetrisch.

   Vertrauen beruht auf Gegenseitigkeit.

3. Es gibt $\delta > 0$ so dass kleinster positiver Eintrag von $A(t)$ größer als δ ist.

   Vertrauen wird nicht beliebig klein.

Übersetzung des Satzes

1. $A(t)$ hat positive Diagonale.

   Die Experten sind selbstbewusst.

2. Nullenmuster von $A(t)$ ist symmetrisch.

   Vertrauen beruht auf Gegenseitigkeit.

3. Es gibt $\delta > 0$ so dass kleinster positiver Eintrag von $A(t)$ größer als δ ist.

   Vertrauen wird nicht beliebig klein.

Ein Meinungsbildungsprozess wird stabil, falls die Experten ein wenig Selbstbewusstsein haben, Vertrauen immer auf Gegenseitigkeit beruht und diese Eigenschaften nicht wegkonvergieren.

Implikationen des Satzes

- Damit Konvergenz für Hegselmann-Krause und Weisbuch-Deffuant bewiesen.
- Selbstvertrauen ist treibende Kraft für Konvergenz.
- Nur hinreichende Eigenschaften gefunden.

Ende

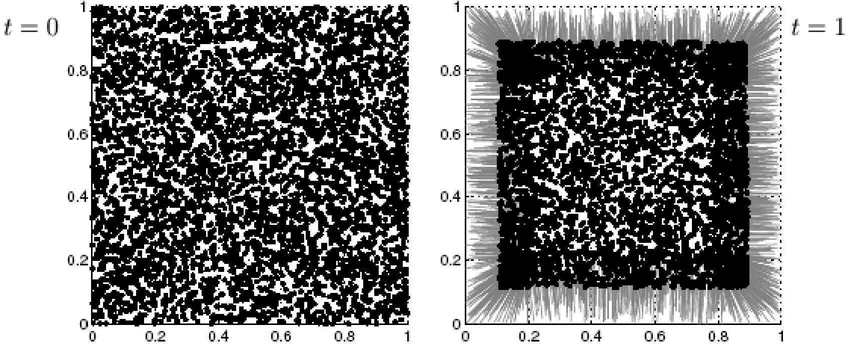
1 Modell für Einigungen: Akkumuliere Matrizen

2 Wann enden Verhandlungen? Hinreichende Bedingungen

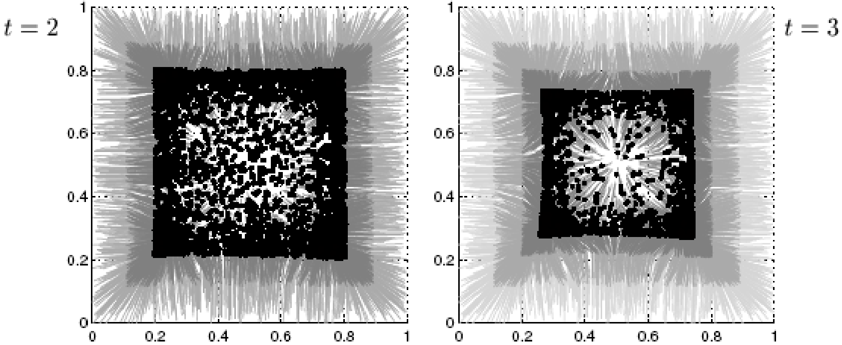
3 Simulation
- Hegselmann-Krause in 2-D
- Mehr Vertrauen $\longrightarrow$ Weniger Konsens
- Mehr Alternativen $\longrightarrow$ Häufigerer Konsens

Ende

Hegselmann-Krause am Beispiel

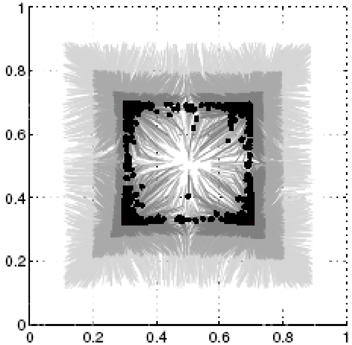


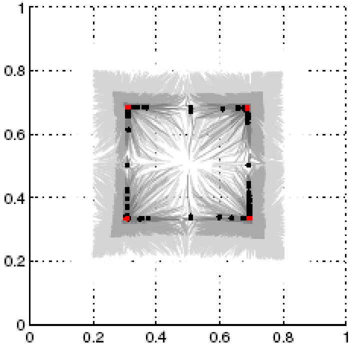
Hegselmann-Krause am Beispiel



Hegselmann-Krause am Beispiel

$t = 4$

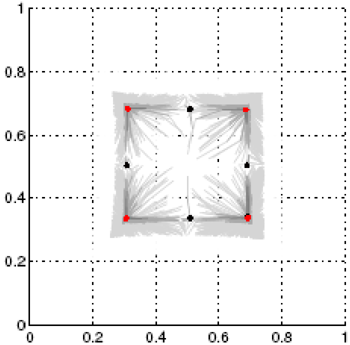


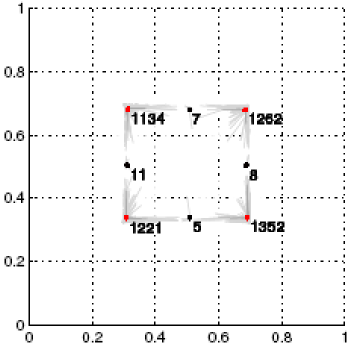


$t = 5$

Hegselmann-Krause am Beispiel

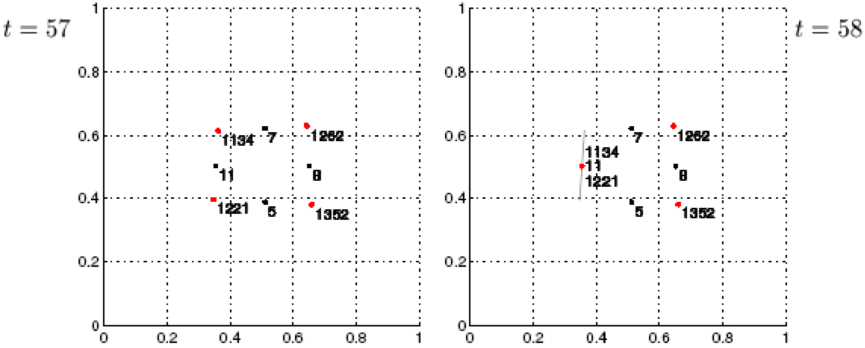
$t = 6$



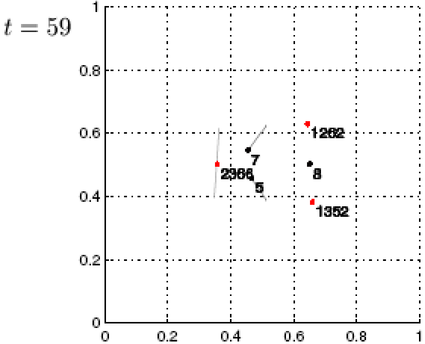


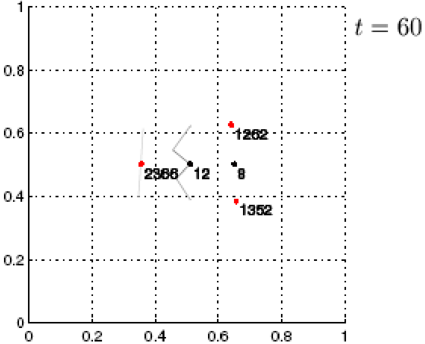
$t = 7$

Hegselmann-Krause am Beispiel

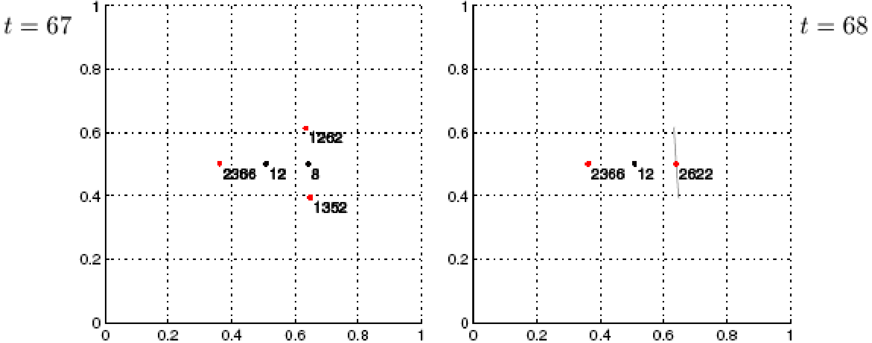


Hegselmann-Krause am Beispiel

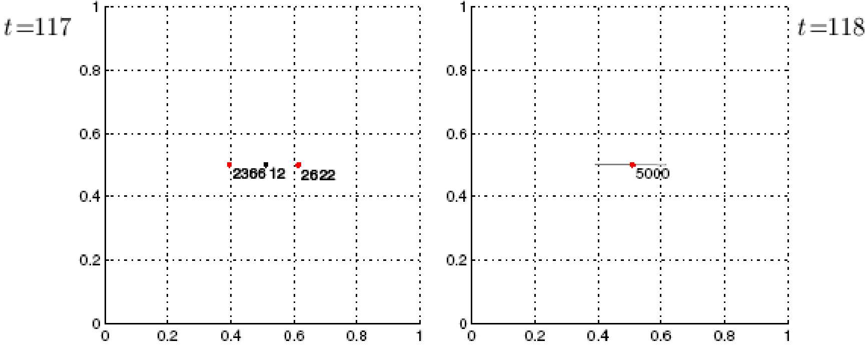




Hegselmann-Krause am Beispiel



Hegselmann-Krause am Beispiel



1 Modell für Einigungen: Akkumuliere Matrizen

2 Wann enden Verhandlungen? Hinreichende Bedingungen

3 Simulation
- Hegselmann-Krause in 2-D
- Mehr Vertrauen → Weniger Konsens
- Mehr Alternativen → Häufigerer Konsens

Ende

Variation der Vertrauensschranke

Grenzfälle

Engstirnigkeit: $\epsilon \longrightarrow 0$ Jeder bleibt für sich.

Leichtgläubigkeit: $\epsilon \longrightarrow \infty$ Immer Konsens in einem Schritt.

Dazwischen?

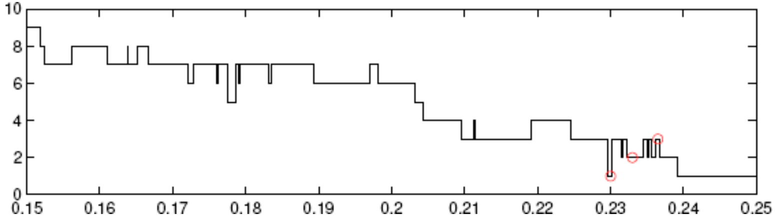
Variation der Vertrauensschranke

Grenzfälle

Engstirnigkeit: $\epsilon \longrightarrow 0$ Jeder bleibt für sich.

Leichtgläubigkeit: $\epsilon \longrightarrow \infty$ Immer Konsens in einem Schritt.

Dazwischen?



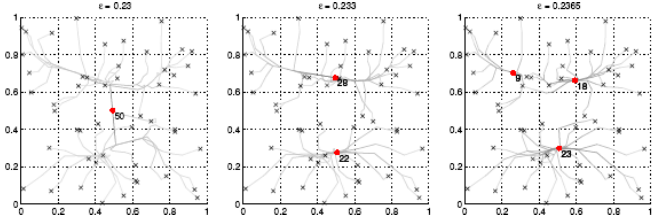
Variation der Vertrauensschranke

Grenzfälle

Engstirnigkeit: $\epsilon \longrightarrow 0$ Jeder bleibt für sich.

Leichtgläubigkeit: $\epsilon \longrightarrow \infty$ Immer Konsens in einem Schritt.

Dazwischen?



1 Modell für Einigungen: Akkumuliere Matrizen

2 Wann enden Verhandlungen? Hinreichende Bedingungen

3 Simulation

- Hegselmann-Krause in 2-D
- Mehr Vertrauen $\longrightarrow$ Weniger Konsens
- Mehr Alternativen $\longrightarrow$ Häufigerer Konsens

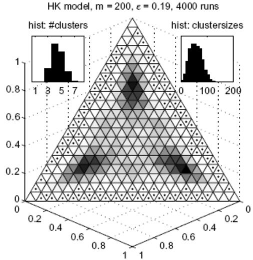
Ende

Das Budget-Problem in mehreren Dimensionen

- Eine Menge Geld auf n Projekte verteilen
  $\to$ Meinungen = Punkte im n-Simplex

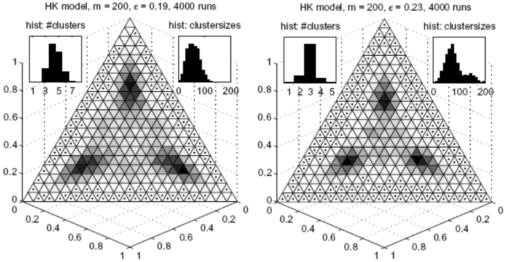
Das Budget-Problem in mehreren Dimensionen

- Eine Menge Geld auf n Projekte verteilen
  $\rightarrow$ Meinungen $=$ Punkte im n-Simplex



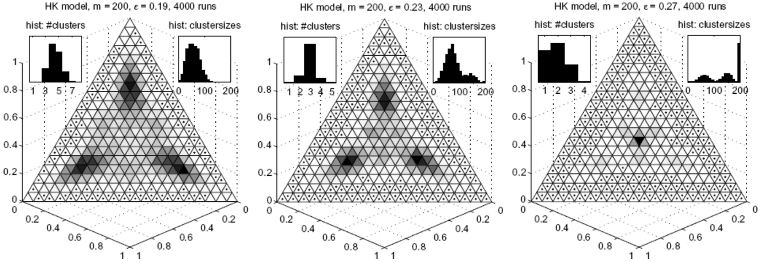
Das Budget-Problem in mehreren Dimensionen

- Eine Menge Geld auf n Projekte verteilen
  $\rightarrow$ Meinungen = Punkte im n-Simplex



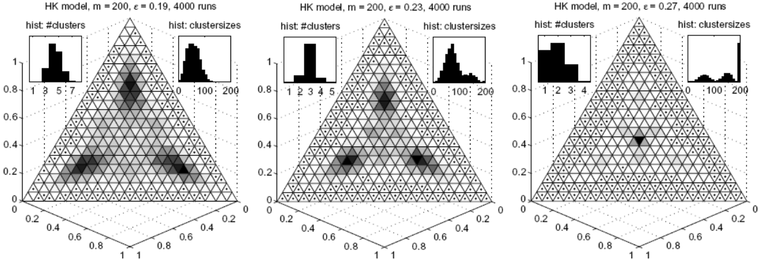
Das Budget-Problem in mehreren Dimensionen

- Eine Menge Geld auf n Projekte verteilen
  $\rightarrow$ Meinungen $=$ Punkte im n-Simplex



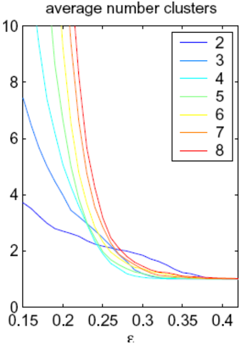
Das Budget-Problem in mehreren Dimensionen

- Eine Menge Geld auf *n* Projekte verteilen
  $\rightarrow$ Meinungen $=$ Punkte im *n*-Simplex

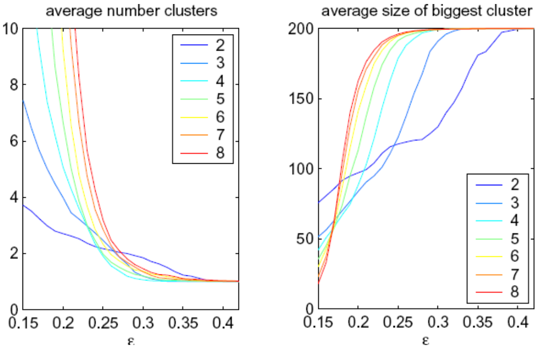


- Polarisierung in drei Endmeinungen der Form (70/15/15)
- Bei zwei Endmeinungen (70/15/15), (40/40/20)
  Ort nicht vorhersagbar

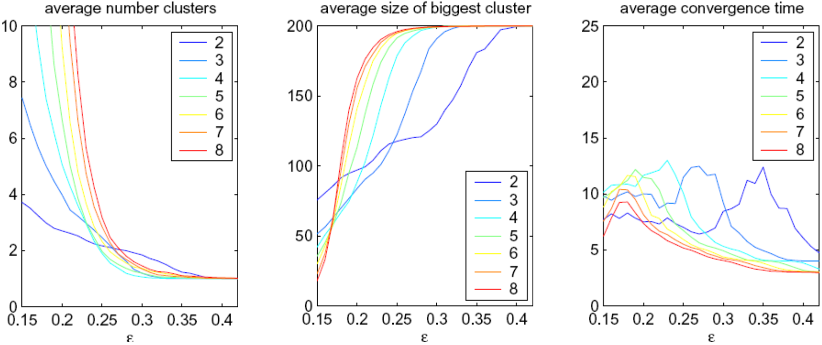
Abhängigkeiten von der Dimension



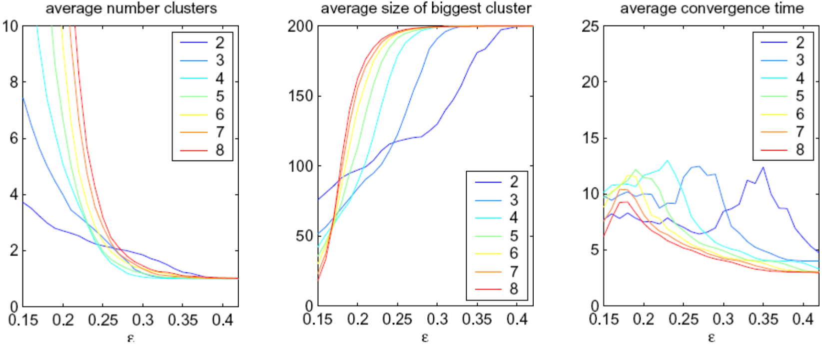
Abhängigkeiten von der Dimension



Abhängigkeiten von der Dimension

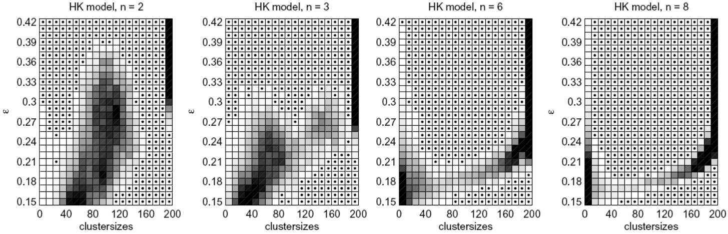


Abhängigkeiten von der Dimension

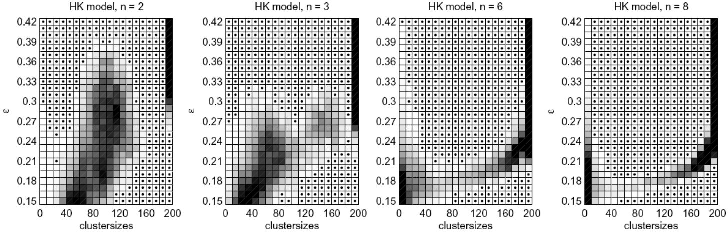


- Je höher die Dimension,
  desto schneller sammeln sich mehr Leute.

Abhängigkeiten von der Dimension



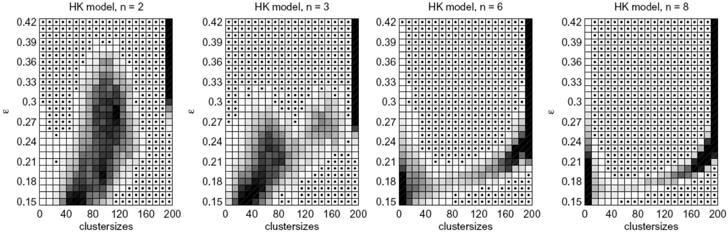
Abhängigkeiten von der Dimension



In höheren Dimensionen

- steigt die Chance für einen "Mehrheitskonsens".

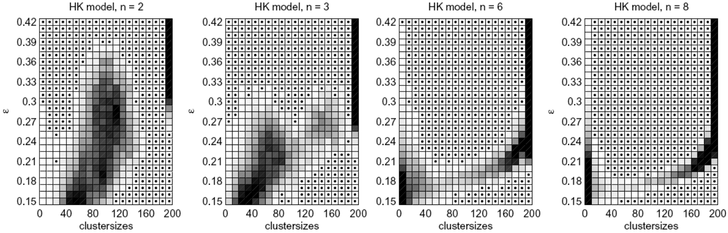
Abhängigkeiten von der Dimension



In höheren Dimensionen

- steigt die Chance für einen “Mehrheitskonsens”.
- steigt die Chance, dass Extremisten übrig bleiben.

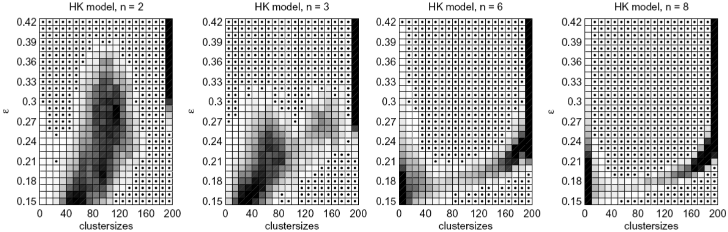
Abhängigkeiten von der Dimension



In höheren Dimensionen

- steigt die Chance für einen "Mehrheitskonsens".
- steigt die Chance, dass Extremisten übrig bleiben.
- sinkt der ϵ-Abstand zwischen Pluralität und Mehrheitskonsens.

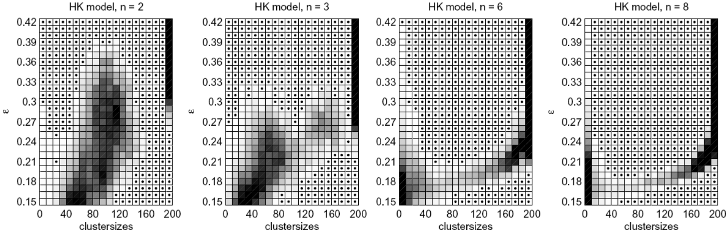
Abhängigkeiten von der Dimension



In höheren Dimensionen

- steigt die Chance für einen "Mehrheitskonsens".
- steigt die Chance, dass Extremisten übrig bleiben.
- sinkt der ϵ-Abstand zwischen Pluralität und Mehrheitskonsens.

Abhängigkeiten von der Dimension



In höheren Dimensionen

- steigt die Chance für einen “Mehrheitskonsens”.
- steigt die Chance, dass Extremisten übrig bleiben.
- sinkt der ϵ-Abstand zwischen Pluralität und Mehrheitskonsens.

Erklärungen Ende

Rainer Hegselmann and Ulrich Krause.
Opinion dynamics and bounded confidence, models, analysis and simulation.
Journal of Artificial Societies and Social Simulation, 5(3), 2002.

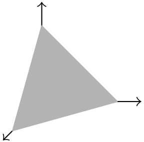
Gérard Weisbuch, Guillaume Deffuant, Frédéric Amblard, and Jean-Pierre Nadal.
Meet, Discuss and Segregate!
Complexity, 7(3):55–63, 2002.

Jan Lorenz.
Mehrdimensionale Meinungsdynamik bei wechseldem Vertrauen.
Diploma thesis, University of Bremen, 2003. Find it at `www.janlo.de`.

Jan Lorenz.
A stabilization theorem for dynamics of continuous opinions.
Physica A, 355(1):217–223, 2005.

Jan Lorenz.
Continuous opinion dynamics of multidimensional allocation problems under bounded confidence: More dimensions lead to better chances for consensus.
Preprint, 2005.

Erklärungen: Zur Geometrie des Simplex

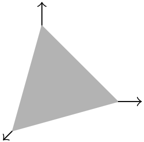


- Wieso Extremisten überbleiben:

- Wieso es zum Mehrheitskonsens kommt:

▸ Zurück in den Vortrag

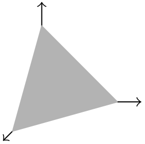
Erklärungen: Zur Geometrie des Simplex



- Wieso Extremisten überbleiben:
  - Sie verstecken sich in den Ecken.
- Wieso es zum Mehrheitskonsens kommt:

Zurück in den Vortrag

Erklärungen: Zur Geometrie des Simplex

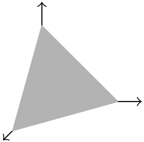


- Wieso Extremisten überbleiben:
  - Sie verstecken sich in den Ecken.
  - Die Ecken entfernen sich vom Mittelpunkt.

- Wieso es zum Mehrheitskonsens kommt:

Zurück in den Vortrag

Erklärungen: Zur Geometrie des Simplex



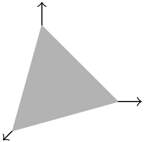
- Wieso Extremisten überbleiben:
  - Sie verstecken sich in den Ecken.
  - Die Ecken entfernen sich vom Mittelpunkt.

$$\left\|\left(\tfrac{1}{n},\ldots,\tfrac{1}{n}\right)-(1,0,\ldots,0)\right\| = \sqrt{1-\tfrac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

- Wieso es zum Mehrheitskonsens kommt:

Zurück in den Vortrag

Erklärungen: Zur Geometrie des Simplex



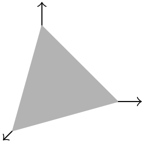
- Wieso Extremisten überbleiben:
  - Sie verstecken sich in den Ecken.
  - Die Ecken entfernen sich vom Mittelpunkt.

$$\|(\tfrac{1}{n},\ldots,\tfrac{1}{n})-(1,0,\ldots,0)\| = \sqrt{1-\tfrac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

- Wieso es zum Mehrheitskonsens kommt:
  - In der Mitte des Simplexes wird es enger.

Zurück in den Vortrag

Erklärungen: Zur Geometrie des Simplex



- Wieso Extremisten überbleiben:
  - Sie verstecken sich in den Ecken.
  - Die Ecken entfernen sich vom Mittelpunkt.

$$\|(\tfrac{1}{n},\dots,\tfrac{1}{n})-(1,0,\dots,0)\| = \sqrt{1-\tfrac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

- Wieso es zum Mehrheitskonsens kommt:
  - In der Mitte des Simplexes wird es enger.

$$\|(\tfrac{1}{n},\dots,\tfrac{1}{n})-(\tfrac{1}{n-1},\dots,\tfrac{1}{n-1},0)\| = \sqrt{\tfrac{1}{n-1}-\tfrac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Zurück in den Vortrag