



Steuerungsprobleme in der Bildverarbeitung und verallgemeinerte Gradientenverfahren

Kristian Bredies, [Dirk Lorenz](#), Peter Maaß

2. Dezember 2005

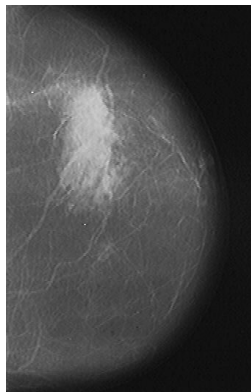
Überblick

- 1 Motivation aus der Bildverarbeitung
 - Untersuchung von Mammographie-Scans
 - Modellierung
- 2 Optimalsteuerungsprobleme
 - Modellprobleme
 - Optimale Steuerung vs. Inverse Probleme
- 3 Algorithmen
 - Bedingtes Gradientenverfahren
 - Verallgemeinertes bedingtes Gradientenverfahren
 - Äquivalenz zum Surrogateverfahren
- 4 Zusammenfassung

Überblick

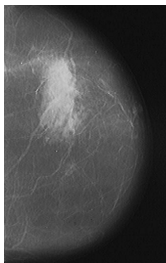
- 1 Motivation aus der Bildverarbeitung
 - Untersuchung von Mammographie-Scans
 - Modellierung
- 2 Optimalsteuerungsprobleme
 - Modellprobleme
 - Optimale Steuerung vs. Inverse Probleme
- 3 Algorithmen
 - Bedingtes Gradientenverfahren
 - Verallgemeinertes bedingtes Gradientenverfahren
 - Äquivalenz zum Surrogateverfahren
- 4 Zusammenfassung

Mammographie screening

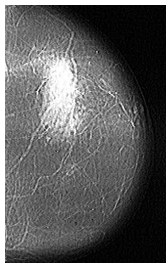


- Untersuchung von Röntgenbildern
- Viele tausend Bilder pro Jahr
(allein in Bremen)
- Mammographie Projekt Bremen

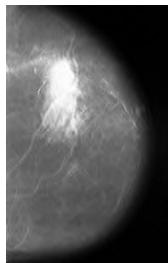
Die Untersuchung: Ein Multiskalenprozess



y_0 original



y_f feine Details



y_c Grobstruktur

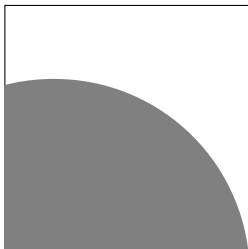
Film statt Bild: $y(t)$, $t \in [0, 1]$, $y(0) = y_0$

$$y^*(t) = \begin{cases} y_f, & t = .3 \\ y_c, & t = .6 \end{cases}$$

Überblick

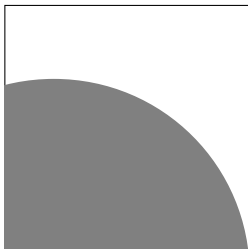
- 1 Motivation aus der Bildverarbeitung
 - Untersuchung von Mammographie-Scans
 - Modellierung
- 2 Optimalsteuerungsprobleme
 - Modellprobleme
 - Optimale Steuerung vs. Inverse Probleme
- 3 Algorithmen
 - Bedingtes Gradientenverfahren
 - Verallgemeinertes bedingtes Gradientenverfahren
 - Äquivalenz zum Surrogateverfahren
- 4 Zusammenfassung

Modellierung der Unterschiede



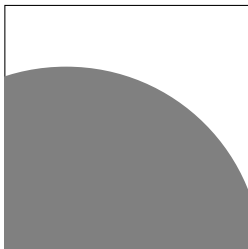
- Kanten bewegen sich
- Kontraständerung
- Details entstehen
- Textur ändert sich

Modellierung der Unterschiede



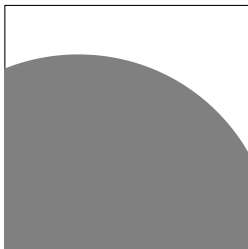
- Kanten bewegen sich
- Kontraständerung
- Details entstehen
- Textur ändert sich

Modellierung der Unterschiede



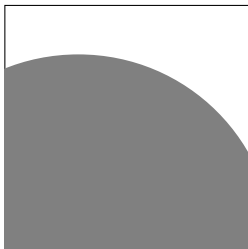
- Kanten bewegen sich
- Kontraständerung
- Details entstehen
- Textur ändert sich

Modellierung der Unterschiede



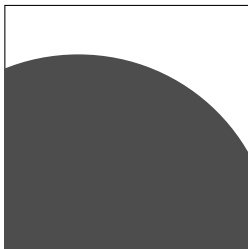
- Kanten bewegen sich
- Kontraständerung
- Details entstehen
- Textur ändert sich

Modellierung der Unterschiede



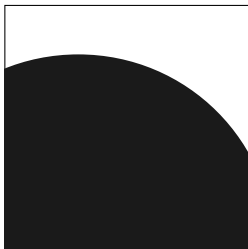
- Kanten bewegen sich
- Kontraständerung
- Details entstehen
- Textur ändert sich

Modellierung der Unterschiede



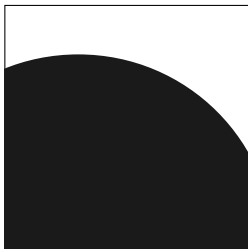
- Kanten bewegen sich
- Kontraständerung
- Details entstehen
- Textur ändert sich

Modellierung der Unterschiede



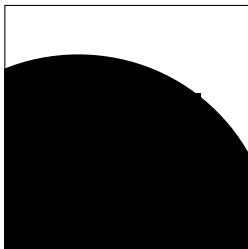
- Kanten bewegen sich
- **Kontraständerung**
- Details entstehen
- Textur ändert sich

Modellierung der Unterschiede



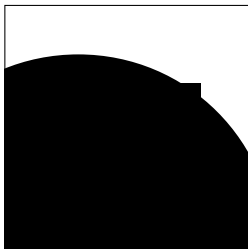
- Kanten bewegen sich
- Kontraständerung
- Details entstehen
- Textur ändert sich

Modellierung der Unterschiede



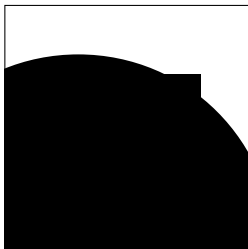
- Kanten bewegen sich
- Kontraständerung
- Details entstehen
- Textur ändert sich

Modellierung der Unterschiede



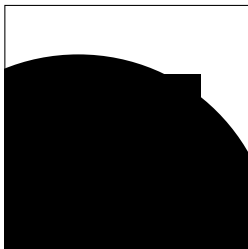
- Kanten bewegen sich
- Kontraständerung
- Details entstehen
- Textur ändert sich

Modellierung der Unterschiede



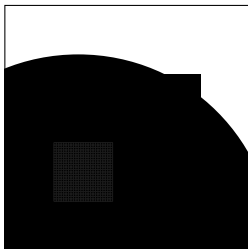
- Kanten bewegen sich
- Kontraständerung
- Details entstehen
- Textur ändert sich

Modellierung der Unterschiede



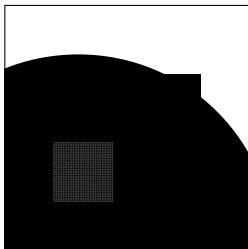
- Kanten bewegen sich
- Kontraständerung
- Details entstehen
- **Textur ändert sich**

Modellierung der Unterschiede



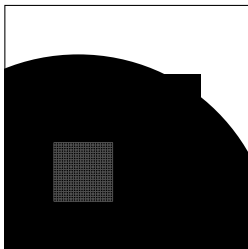
- Kanten bewegen sich
- Kontraständerung
- Details entstehen
- **Textur ändert sich**

Modellierung der Unterschiede



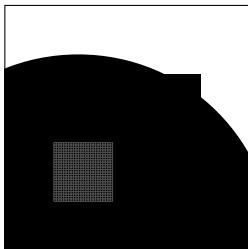
- Kanten bewegen sich
- Kontraständerung
- Details entstehen
- Textur ändert sich

Modellierung der Unterschiede



- Kanten bewegen sich
- Kontraständerung
- Details entstehen
- Textur ändert sich

Modellierung der Unterschiede



- Kanten bewegen sich
- Kontraständerung
- Details entstehen
- Textur ändert sich

Interpoliere auf 'natürliche' Art.



Was PDEs in der Bildverarbeitung können

Struktur entfernen Die Wärmeleitgleichung

$$y_t = \Delta y$$

Was PDEs in der Bildverarbeitung können

Struktur entfernen Die Wärmeleitgleichung

$$y_t = \Delta y$$

Kanten erhalten und betonen Anisotrope Diffusion

$$y_t = \operatorname{div}(A(\nabla y)\nabla y)$$

Perona-Malik, Weickert

Was PDEs in der Bildverarbeitung können

Struktur entfernen Die Wärmeleitgleichung

$$y_t = \Delta y$$

Kanten erhalten und betonen Anisotrope Diffusion

$$y_t = \operatorname{div}(A(\nabla y)\nabla y)$$

Perona-Malik, Weickert

Kanten bewegen Mittlerer-Krümmungsfluss, Erosion, Dilation

$$y_t = |\nabla y| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla y}{|\nabla y|} \right), \quad y_t = \pm |\nabla y|$$

Preusser-Rumpf, Alvarez-Guichard-Morel



Eine PDE für unsere Zwecke

$$y_t - \operatorname{div}(\nabla y) = 0$$

Eine PDE für unsere Zwecke

Quellterm

ermöglicht Kontraständerung
erzeugt Details

$$y_t - \operatorname{div}(\nabla y) = u$$


Eine PDE für unsere Zwecke

Quellterm

ermöglicht Kontraständerung
erzeugt Details

$$y_t - \operatorname{div}(P \nabla y) = u$$

Diffusionstensor

kann Kanten erhalten
kann Kanten bewegen
entfernt Textur/Struktur

Überblick

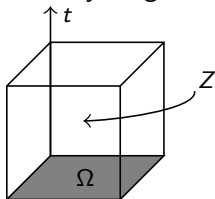
- 1 Motivation aus der Bildverarbeitung
 - Untersuchung von Mammographie-Scans
 - Modellierung
- 2 Optimalsteuerungsprobleme
 - Modellprobleme
 - Optimale Steuerung vs. Inverse Probleme
- 3 Algorithmen
 - Bedingtes Gradientenverfahren
 - Verallgemeinertes bedingtes Gradientenverfahren
 - Äquivalenz zum Surrogateverfahren
- 4 Zusammenfassung

Erstes Modell: Steuerung über Quellterme

Von einem Bild y_0 zum anderen y^* :
Minimiere das Kostenfunktional

$$\int |y(1) - y^*|^2 dx + \alpha \|u\|_{L^2(Z)}^2$$

wobei y folgende PDE löst:



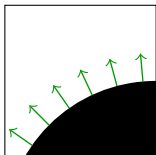
$$\begin{aligned} y_t - \Delta y &= u & \text{in } Z = \Omega \times [0, 1] \\ \partial_\nu y &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \\ y(0, x) &= y_0(x). \end{aligned}$$

Zweites Modell: Quellterm und Diffusionstensor

$$\min_u \int |y(1) - y^*|^2 dx + \alpha_u \Phi_u(u) + \alpha_p \Phi_p(p)$$

wobei y Lösung von

$$\begin{aligned}y_t - \operatorname{div}(P \nabla y) &= u \\ \partial_{\nu_p} y &= 0 \\ y(0, x) &= y_0(x).\end{aligned}$$



mit Diffusionstensor

$$P = (I - \sigma(|p|)) \frac{p}{|p|} \otimes \frac{p}{|p|}$$

($|p| = 1$: Projektion auf p^\perp)

Von der Steuerung zum Zustand

Lösung der PDE

$$y_t + \Delta y = u$$

Lösungsoperator

$$S : \begin{array}{l} u \quad \mapsto \quad y \\ L^2(Z) \rightarrow C([0, 1], L^2(\Omega)) \end{array}$$

Von der Steuerung zum Zustand

Lösung der PDE

$$y_t + \Delta y = u$$

Lösungsoperator

$$S : L^2(Z) \rightarrow C([0, 1], L^2(\Omega))$$

$u \mapsto y$

Der Steuerungs-Zustandsoperator

$$A : L^2(Z) \xrightarrow{S} y \xrightarrow{R} y(1) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

A ist kompakt.

Das reduzierte Kostenfunktional aka Tikhonov Regularisierung

Das reduzierte Kostenfunktional

Mit der Steuerungs-Zustandsabbildung wird aus

$$\int |y(1) - y^*|^2 dx + \alpha \|u\|_{L^2(Z)}^2$$

das Funktional

$$\|Au - y^*\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|u\|_{L^2(Z)}^2.$$

Überblick

- 1 Motivation aus der Bildverarbeitung
 - Untersuchung von Mammographie-Scans
 - Modellierung
- 2 Optimalsteuerungsprobleme
 - Modellprobleme
 - Optimale Steuerung vs. Inverse Probleme
- 3 Algorithmen
 - Bedingtes Gradientenverfahren
 - Verallgemeinertes bedingtes Gradientenverfahren
 - Äquivalenz zum Surrogateverfahren
- 4 Zusammenfassung



Verschiedene Gebiete, verschiedene Vorstellungen

$$\|Au - y^*\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha\Phi(u)$$

Steuerungsprobleme:

Verschiedene Gebiete, verschiedene Vorstellungen

$$\|Au - y^*\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha\Phi(u)$$

Steuerungsprobleme:

- A (semi-)lineare PDE mit Quelltermen

Verschiedene Gebiete, verschiedene Vorstellungen

$$\|Au - y^*\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha\Phi(u)$$

Steuerungsprobleme:

- A (semi-)lineare PDE mit Quelltermen
- y^* angestrebter Zustand

Verschiedene Gebiete, verschiedene Vorstellungen

$$\|Au - y^*\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha\Phi(u)$$

Steuerungsprobleme:

- A (semi-)lineare PDE mit Quelltermen
- y^* angestrebter Zustand
- typisch: $\Phi(u) = \|u\|^2 + \delta_C(u)$

Verschiedene Gebiete, verschiedene Vorstellungen

$$\|Au - y^*\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha\Phi(u)$$

Steuerungsprobleme:

- A (semi-)lineare PDE mit Quelltermen
- y^* angestrebter Zustand
- typisch: $\Phi(u) = \|u\|^2 + \delta_C(u)$
- Was rauskommen soll: Gute Annäherung an y^* .

Verschiedene Gebiete, verschiedene Vorstellungen

$$\|Au - y^*\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha\Phi(u)$$

Inverse Probleme:

Verschiedene Gebiete, verschiedene Vorstellungen

$$\|Au - y^*\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha\Phi(u)$$

Inverse Probleme:

- A 'beliebiger' kompakter Operator

Verschiedene Gebiete, verschiedene Vorstellungen

$$\|Au - y^*\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha\Phi(u)$$

Inverse Probleme:

- A 'beliebiger' kompakter Operator
- y^* verrauschte Daten

Verschiedene Gebiete, verschiedene Vorstellungen

$$\|Au - y^*\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha\Phi(u)$$

Inverse Probleme:

- A 'beliebiger' kompakter Operator
- y^* verrauschte Daten
- Vorwissen: Regularität von u

Verschiedene Gebiete, verschiedene Vorstellungen

$$\|Au - y^*\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha\Phi(u)$$

Inverse Probleme:

- A 'beliebiger' kompakter Operator
- y^* verrauschte Daten
- Vorwissen: Regularität von u
- Was rauskommen soll: Gute Annäherung an 'echtes' u .

Verschiedene Gebiete, verschiedene Vorstellungen

$$\|Au - y^*\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha\Phi(u)$$

	Steuerung	Inverse Probleme
A	Lösungsopt. einer PDE	Hauptsache kompakt
y^*	Idealzustand	Verrauschte Daten $\ y^* - \bar{y}\ < \delta$
Φ	Box constraints, Regularisierung $\ u\ ^2$	Regularisierung $\ u\ _{H^s}^2, \dots$
Ziel	$y = Au$ nahe an y^*	u nahe an $\bar{u} = A^{-1}\bar{y}$

Überblick

- 1 Motivation aus der Bildverarbeitung
 - Untersuchung von Mammographie-Scans
 - Modellierung
- 2 Optimalsteuerungsprobleme
 - Modellprobleme
 - Optimale Steuerung vs. Inverse Probleme
- 3 Algorithmen
 - Bedingtes Gradientenverfahren
 - Verallgemeinertes bedingtes Gradientenverfahren
 - Äquivalenz zum Surrogateverfahren
- 4 Zusammenfassung



Klassisch: Das bedingte Gradientenverfahren

$\min_{u \in C} F(u)$ durch



Klassisch: Das bedingte Gradientenverfahren

$\min_{u \in C} F(u)$ durch

1 Richtungsableitung

$$\min_{v \in C} \langle F'(u_n) | v \rangle$$

2 Schrittweitenbestimmung

$$\min_{s \in [0,1]} F(u_n + s(v_n - u_n))$$

3 Update

$$u_{n+1} = u_n + s(v_n - u_n)$$

Dunn (1980), F konvex, diffbar

Die Verallgemeinerung vorbereiten

$$\delta_C(u) = \begin{cases} 0 & u \in C \\ \infty & u \notin C \end{cases}$$

$$\Phi(u) = \delta_C(u) \rightarrow \min F(u) + \Phi(u)$$

F : z. B. $\|Au - y^*\|^2$ glatt, nicht unbedingt konvex

Φ : nicht diffbar, konvex



Überblick

- 1 Motivation aus der Bildverarbeitung
 - Untersuchung von Mammographie-Scans
 - Modellierung
- 2 Optimalsteuerungsprobleme
 - Modellprobleme
 - Optimale Steuerung vs. Inverse Probleme
- 3 Algorithmen
 - Bedingtes Gradientenverfahren
 - Verallgemeinertes bedingtes Gradientenverfahren
 - Äquivalenz zum Surrogateverfahren
- 4 Zusammenfassung

Verallgemeinertes bedingtes Gradientenverfahren

$\min F(u) + \Phi(u)$ by

1 'Richtungsableitung'

$$\min_v \langle F'(u_n) | v \rangle + \Phi(v)$$

2 Schrittweitenbestimmung

$$\min_{s \in [0,1]} (F + \Phi)(u_n + s(v_n - u_n))$$

3 Update

$$u_{n+1} = u_n + s(v_n - u_n)$$

Konvergenz des verallgemeinerten bedingten Gradientenverfahrens

Satz

Φ proper, konvex, uhst.

F stetig diffbar, $F + \Phi$ koerziv

$$E_t = \{\Phi(u) \leq t\} \text{ kompakt für jedes } t.$$

Dann: Konvergenz zu stationärem Punkt.

Bredies, L., Maass, 2005

Bemerkung: F muss nicht konvex sein.. [▶ Beweisskizze](#)

Überblick

- 1 Motivation aus der Bildverarbeitung
 - Untersuchung von Mammographie-Scans
 - Modellierung
- 2 Optimalsteuerungsprobleme
 - Modellprobleme
 - Optimale Steuerung vs. Inverse Probleme
- 3 Algorithmen
 - Bedingtes Gradientenverfahren
 - Verallgemeinertes bedingtes Gradientenverfahren
 - Äquivalenz zum Surrogateverfahren
- 4 Zusammenfassung

Das Surrogateverfahren

Probleme der Form

$$F(u) = \|Au - y^*\|^2 + \alpha \sum w_\gamma |u_\gamma|^p.$$

($u_\gamma = \langle u | \psi_\gamma \rangle$, $\{\psi_\gamma\}$ ONB)

Surrogateverfahren (Daubechies, Defries, De Mol, 2004)

$$J(u, a) = F(u) + (\|u - a\|^2 - \|Au - Aa\|^2)$$

Rekursion:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \operatorname{argmin}_u J(u, u_n) \\ &= \mathbb{S}_{\alpha w, p}(u_n - A^*(Au_n - y^*)) \end{aligned}$$

Das verallgemeinerte bedingte Gradientenverfahren in Action

$$\|Au - y^*\|^2 + \alpha \sum w_\gamma |u_\gamma|^p = F(u) + \Phi(u)$$

mit

$$F(u) = \|Au - y^*\|^2 - \lambda \|u\|^2,$$

$$\Phi(u) = \lambda \|u\|^2 + \sum w_\gamma |u_\gamma|^p$$

Richtungsableitung:

$$v_{n+1} = \operatorname{argmin}_v \langle F'(u_n) | v \rangle + \Phi(v)$$

Das verallgemeinerte bedingte Gradientenverfahren in Action

$$\|Au - y^*\|^2 + \alpha \sum w_\gamma |u_\gamma|^p = F(u) + \Phi(u)$$

mit

$$F(u) = \|Au - y^*\|^2 - \lambda \|u\|^2,$$

$$\Phi(u) = \lambda \|u\|^2 + \sum w_\gamma |u_\gamma|^p$$

Richtungsableitung:

$$v_{n+1} = \operatorname{argmin}_v 2\langle A^*(Au_n - y^*) - \lambda u_n | v \rangle + \Phi(v)$$

Das verallgemeinerte bedingte Gradientenverfahren in Action

$$\|Au - y^*\|^2 + \alpha \sum w_\gamma |u_\gamma|^p = F(u) + \Phi(u)$$

mit

$$F(u) = \|Au - y^*\|^2 - \lambda \|u\|^2,$$

$$\Phi(u) = \lambda \|u\|^2 + \sum w_\gamma |u_\gamma|^p$$

Richtungsableitung:

$$v_{n+1} = \operatorname{argmin}_v 2 \langle A^*(Au_n - y^*) - \lambda u_n | v \rangle + \lambda \|v\|^2 + \alpha \sum w_\gamma |v_\gamma|^p$$

Das verallgemeinerte bedingte Gradientenverfahren in Action

$$\|Au - y^*\|^2 + \alpha \sum w_\gamma |u_\gamma|^p = F(u) + \Phi(u)$$

mit

$$F(u) = \|Au - y^*\|^2 - \lambda \|u\|^2,$$

$$\Phi(u) = \lambda \|u\|^2 + \sum w_\gamma |u_\gamma|^p$$

Richtungsableitung:

$$v_{n+1} = \operatorname{argmin}_v \frac{1}{\lambda} \|A^*(Au_n - y^*) - \lambda u_n - \lambda v\|^2 - \frac{1}{\lambda} \|A^*(Au_n - y^*) - \lambda u_n\|^2 + \alpha$$

Das verallgemeinerte bedingte Gradientenverfahren in Action

$$\|Au - y^*\|^2 + \alpha \sum w_\gamma |u_\gamma|^p = F(u) + \Phi(u)$$

mit

$$F(u) = \|Au - y^*\|^2 - \lambda \|u\|^2,$$

$$\Phi(u) = \lambda \|u\|^2 + \sum w_\gamma |u_\gamma|^p$$

Richtungsableitung:

$$v_{n+1} = \operatorname{argmin}_v \frac{1}{\lambda} \|A^*(Au_n - y^*) - \lambda u_n - \lambda v\|^2 + \alpha \sum w_\gamma |v_\gamma|^p$$

Das verallgemeinerte bedingte Gradientenverfahren in Action

$$\|Au - y^*\|^2 + \alpha \sum w_\gamma |u_\gamma|^p = F(u) + \Phi(u)$$

mit

$$F(u) = \|Au - y^*\|^2 - \lambda \|u\|^2,$$

$$\Phi(u) = \lambda \|u\|^2 + \sum w_\gamma |u_\gamma|^p$$

Richtungsableitung:

$$v_{n+1} = \operatorname{argmin}_v \frac{1}{\lambda} \|A^*(Au_n - y^*) - \lambda u_n - \lambda v\|^2 + \alpha \sum w_\gamma |v_\gamma|^p$$

$$\rightsquigarrow v_{n+1} = S_{\alpha w/\lambda, p}(u_n - \frac{1}{\lambda} A^*(Au_n - y^*))$$

Das verallgemeinerte bedingte Gradientenverfahren in Action

$$\|Au - y^*\|^2 + \alpha \sum w_\gamma |u_\gamma|^p = F(u) + \Phi(u)$$

mit

$$F(u) = \|Au - y^*\|^2 - \lambda \|u\|^2,$$

$$\Phi(u) = \lambda \|u\|^2 + \sum w_\gamma |u_\gamma|^p$$

Richtungsableitung:

$$v_{n+1} = \operatorname{argmin}_v \frac{1}{\lambda} \|A^*(Au_n - y^*) - \lambda u_n - \lambda v\|^2 + \alpha \sum w_\gamma |v_\gamma|^p$$

$$\rightsquigarrow v_{n+1} = \mathbb{S}_{\alpha w/\lambda, p}(u_n - \frac{1}{\lambda} A^*(Au_n - y^*))$$

$$s_n = 1 \rightsquigarrow u_{n+1} = \mathbb{S}_{\alpha w/\lambda, p}(u_n - \frac{1}{\lambda} A^*(Au_n - y^*))$$

Das Surrogateverfahren ist ein Gradientenverfahren

Satz

Die Minimierung von

$$\|Au - y^*\|^2 + \alpha \sum w_\gamma |u_\gamma|^p$$

mit dem Surrogateverfahren liefert dasselbe wie die Anwendung des verallgemeinerten Gradientenverfahrens auf

$$F(u) = \|Au - y^*\|^2 - \lambda \|u\|^2,$$

$$\Phi(u) = \lambda \|u\|^2 + \sum w_\gamma |u_\gamma|^p$$

für $\lambda = 1$ mit Schrittweite 1.

Nichtlineare Operatoren gehen auch!

$$\|K(u) - y^*\|^2 + \alpha \sum w_\gamma |u_\gamma|^p$$

Surrogateverfahren

$$u_{n+1} = \mathbf{S}_{\alpha w, p}(u_n - K'(u_{n+1})(K(u_n) - y^*))$$

zwei Iterationen, K zweimal diffbar, neue Beweistechniken Ronny, Gerd

Nichtlineare Operatoren gehen auch!

$$\|K(u) - y^*\|^2 + \alpha \sum w_\gamma |u_\gamma|^p$$

Surrogateverfahren

$$u_{n+1} = \mathbf{S}_{\alpha w, p}(u_n - K'(u_{n+1})(K(u_n) - y^*))$$

zwei Iterationen, K zweimal diffbar, neue Beweistechniken Ronny, Gerd

Verallg. bedingtes Gradientenverfahren

$$u_{n+1} = \mathbf{S}_{\alpha w, p}(u_n - K'(u_n)(K(u_n) - y^*))$$

eine Iteration, K einmal diffbar, gleicher Beweis



Zusammenfassung

- Die Präsentation von Mammographiescans kann durch Optimalsteuerungsprobleme verbessert werden.
- Das verallgemeinerte bedingte Gradientenverfahren konvergiert auch für nicht-konvexe Funktionale.
- Das Surrogateverfahren ist eine Art Gradientenverfahren.
- Beide lassen sich auf nichtlineare Operatoren anwenden. Der Zusammenhang ist nicht klar.

Konvergenz des verallgemeinerten bedingten Gradientenverfahrens

Beweisskizze.

- 1 Notwendige Bedingung erster Ordnung:

$$\langle F'(u)|u \rangle + \Phi(u) = \min_v \langle F'(u)|v \rangle + \Phi(v)$$

- 2 Falls verletzt: $(F + \Phi)(u^{n+1}) < (F + \Phi)(u^n)$
- 3 $\Psi(u) := \langle F'(u)|u \rangle + \Phi(u) - (\min_v \langle F'(u)|v \rangle + \Phi(v))$ is lsc
- 4 $\Psi(u^n) \rightarrow 0$



▶ Zurück zum Satz