Kommunismus = Sowjetmacht + Elektrifizierung des ganzen Landes*

Winterseminar AG Technomathematik

Uttendorf
Februar 2003

Überblick

1. Motivation
2. Wahlen: *Social Preference Lists*
3. Theorem von Sen
4. Wahlen: *Social Choice* (Eigenschaften, Verfahren)
5. Theorem von Arrow
6. Theorem von May

*math-politics.tex,v1.2

Motivation

- **US-Präsidentschaftswahl 2000** Bush jr. vs. Gore
  Die Mehrheit der US-Wahlberechtigten bevorzugt Gore vor dem neuen Präsidenten Bush jr.!
- **Bundestagswahl 2002** Überhangmandate Brandenburg vs. Bremen
  Die SPD *verliert* ein (Überhang-)Mandat (in Bremen), durch zuviele SPD-Wähler in Brandenburg!
- Stimmrecht gemäß ***Römischer Verträge*** (1958)
  12 Stimmen werden zur Zustimmung benötigt, wobei:

Frankreich - 4 Stimmen	Belgien - 2 Stimmen
Deutschland - 4 Stimmen	Niederlande - 2 Stimmen
Italien - 4 Stimmen	Luxemburg - 1 Stimme

  Luxemburgs Stimme hat nur symbolischen Wert!
- **Condorcet Voting Paradox** (*de Condorcet, 1785*)

Wahlschein	#1	#2	#3
Platz 1	Frau X	Frau Z	Herr Y
Platz 2	Herr Y	Frau X	Frau Z
Platz 3	Frau Z	Herr Y	Frau X

  Die Mehrheit der Wähler zieht dem siegenden Kandidaten einen anderen vor!

Was ist der Wählerwille?

Wahlschein	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7
Platz 1	Frau V	Frau V	Frau V	Frau X	Frau X	Herr W	Frau Z
Platz 2	Herr W	Herr Y	Herr Y	Herr W	Herr Y	Frau X	Frau X
Platz 3	Frau X	Herr W	Herr W	Herr Y	Herr W	Herr Y	Herr Y
Platz 4	Herr Y	Frau Z	Frau Z	Frau Z	Frau V	Frau V	Herr W
Platz 5	Frau Z	Frau X	Frau X	Frau V	Frau Z	Frau Z	Frau V

Erstellen von *Social Preference Lists*

- Relation P: „x *ist gesellschaftl. vor* y *bevorzugt*“
  $\Longleftrightarrow$ mehr als die Hälfte bevorzugt x vor y
- führt im Fall von Condorcet zu keiner *social preference list*:

Wahlschein	#1	#2	#3
Platz 1	Frau X	Frau Z	Herr Y
Platz 2	Herr Y	Frau X	Frau Z
Platz 3	Frau Z	Herr Y	Frau X

Frau X P Herr Y $\wedge$ Herr Y P Frau Z $\wedge$ Frau Z P Frau X $\Longrightarrow$ P ist nicht transitiv!

Satz.

$$\left.\begin{array}{l}\text{ungeradzahlig viele Wähler}\\ P \text{ transitiv}\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} xPy \Rightarrow x \text{ in } \textit{social pref. list} \text{ höher bewertet.}\\ \text{D. h., } P \text{ liefert „natürliche“ } \textit{social pref. list}.\end{array}\right.$$

Theorem von Sen

Frage: Test für „P ist transitiv“?

Definition. Eine Menge von *individual preference lists* heißt **Sen-kohärent**, wenn für jedes Tripel $\{x, y, z\}$ von Alternativen mindestens eine der Relationen

$$\begin{aligned} R_1 :& xPy \wedge xPz, \\ R_2 :& xPy \wedge zPx, \\ R_3 :& yPx \wedge zPx \end{aligned}$$

gilt.

Theorem. (Sen, 1966)

$$\left.\begin{array}{l}\text{ungeradzahlig viele Wähler,}\\ \text{Wahlscheine Sen-kohärent}\end{array}\right\} \Longrightarrow P \text{ transitiv.}$$

Test für Sen-kohärent. Menge von *individual preference lists* ist **nicht** Sen-kohärent

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow \exists\{x, y, z\} : \quad & \neg(xR_1(y, z)) \\ & \vee \neg(xR_2(y, z)) \\ & \vee \neg(xR_3(y, z)) \end{aligned}$$

Social Choice - Gewünschte Eigenschaften

Pareto-Bedingung Alle Wähler bevorzugen x vor y, dann ist y nicht gewählt worden.

Condorcets Siegerkriterium Wenn x Condorcet-Sieger, dann ist x alleiniger Wahlsieger.

Condorcet-Sieger: Alternative, die in jeweils mehr als der Hälfte der Fälle jede andere Alternative schlägt.

Monotonie x sei gewählt. Mind. ein Wähler erhöht die Präferenz, indem er x mit der um eine Position besser gesetzten Alternative tauscht. Dann bleibt x gewählt.

Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen (UIA) x ist gewählt, aber nicht y. Mind. ein Wähler ändert seine Entscheidung, ohne aber seine Präferenz zwischen x und y zu ändern. Auch dann ist y nicht gewählt.

Neutralität Invarianz bezüglich Permutation der Alternativen

Anonymität Invarianz bezüglich Permutation der Wahlzettel

Social Choice Procedures

Mehrheitsabstimmung Gewählt ist die Alternative, die auf den Wahlzetteln am häufigsten die höchste Bewertung bekommen hat.

Borda Auszählung (*de Borda, 1781*) Je nach Platzierung auf einem Wahlzettel erhält jede der n Alternativen (absteigend) $n-1$ bis 0 Punkte, die für jede Alternative über alle Wahlzettel summiert werden. Gewählt ist die Alternative mit der höchsten Punktzahl.

Hare System (*Hare, 1861*) Entweder eine Alternative erhält auf mind. der Hälfte der Stimmzettel die höchste Bewertung (und gilt als gewählt), oder es werden die Alternativen mit den wenigsten Bestbewertungen gestrichen und mit demselben Verfahren die gekürzte Liste neu ausgezählt. Es sei denn, alle (verbliebenen) Alternativen bekamen gleichhäufig die höchste Präferenz.

Sequentielles, paarweises Abstimmen mit fester Agenda Gebe feste Auflistung der Alternativen vor. Zwischen den ersten beiden Alternativen wird nach Mehrheitsabstimmung ein *Sieger* ermittelt. Der Verlierer wird aus der Liste gelöscht. Das Verfahren wird auf die verkürzte Liste angewandt, bis auch der letzte Eintrag getestet wurde.

Diktatur Ein Wähler (der Diktator) wird bestimmt, dessen höchste Platzierung auf dem Wahlzettel der Wahlsieger ist.

Eigenschaften der Wahlverfahren

	Pareto	Condorcet	Monotonie	UIA
Mehrheitsabstimmung	+	−	+	−
Borda Auszählung	+	−	+	−
Hare System	+	−	−	−
Sequentielles, paarweises Abstimmen mit fester Agenda	−	+	+	−
Diktatur	+	−	+	+

UIA $\leftrightarrow$ Condorcet Siegerkriterium

Theorem. Es gibt kein Wahlverfahren (*social choice procedure*) für drei und mehr Alternativen, das der Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen (UIA) und Condorcets Siegerkriterium genügt.

Beweis. Betrachte

Wahlschein	#1	#2	#3
Platz 1	Frau X	Frau Z	Frau Z
Platz 2	Herr Y	Frau X	Herr Y
Platz 3	Frau Z	Herr Y	Frau X

$\Longrightarrow$ Frau Z ist Condorcet-Gewinnerin, also ist Frau X keine Gewinnerin!

$\underset{\text{UIA}}{\Longrightarrow}$ Frau X ist keine Siergerin in

Wahlschein	#1	#2	#3
Platz 1	Frau X	Frau Z	Herr Y
Platz 2	Herr Y	Frau X	Frau Z
Platz 3	Frau Z	Herr Y	Frau X

Analog: Herr Y und Frau Z ebenfalls keine Wahlsieger. - **Widerspruch** zu Def. eines Wahlverfahrens (dies muß Sieger liefern)! ■

Theorem von Arrow

Theorem. (Arrow, 1950)

$$\left.\begin{array}{l} \geq 3 \text{ Alternativen} \\[1em] \text{endlich viele Wähler} \\[1em] \textit{Social welfare function} \text{ erfülle} \\ \quad \text{Pareto-Bedingung,} \\ \quad \text{Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen} \\ \quad \text{und Monotonie} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \textit{Social welfare function} \\ \text{ist Diktatur} \end{array}$$

Theorem von May

Theorem. (May, 1952)

$$\left.\begin{array}{l}\text{genau 2 Alternativen ohne Patt}\\ \text{ungeradzahlig viele Wähler}\\ \textit{Social welfare function}\text{ erfülle}\\ \quad\text{Anonymität,}\\ \quad\text{Neutralität und}\\ \quad\text{Monotonie}\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l}\textit{Social welfare function}\\ \text{ist }\textit{Majoritätsentscheidung}\end{array}$$ [1]

Theorem. (Verallgemeinerung) Ein anonymes, neutrales und monotones Wahlverfahren mit genau 2 Alternativen, ist ein Quotensystem.

D. h., eine der Alternativen bekam mehr als q Stimmen von n Wählern, wobei $n/2 < q \leq n + 1$.

[1] Für 2 Alternativen reduzieren sich sowohl Mehrheitsabstimmung und Borda Auszählung als auch Hare System zur simplen Majoritätsentscheidung. Ferner gilt trivialerweise Condorcets Siegerkriterium und UIA ist (mangels Alternativen) irrelevant.

Was ist der Wählerwille?

Wahlschein	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7
Platz 1	Frau V	Frau V	Frau V	Frau X	Frau X	Herr W	Frau Z
Platz 2	Herr W	Herr Y	Herr Y	Herr W	Herr Y	Frau X	Frau X
Platz 3	Frau X	Herr W	Herr W	Herr Y	Herr W	Herr Y	Herr Y
Platz 4	Herr Y	Frau Z	Frau Z	Frau Z	Frau V	Frau V	Herr W
Platz 5	Frau Z	Frau X	Frau X	Frau V	Frau Z	Frau Z	Frau V

Sieger	durch
Frau V	Mehrheitsabstimmung
Herr W	Borda Auszählung
Frau X	Hare System
Herr Y	Sequentielles, paarweises Abstimmen mit fester Agenda 'VWXYZ'
Frau Z	Diktatur mit #7 als Diktator

Literatur

[T95] **Taylor, A. D.:** *Mathematics and Politics. Strategy, Voting, Power and Proof.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1995

[SZ02] **Schrader, Chr.:** *„151 Stimmen“.* Süddeutsche Zeitung, 24. September 2002.