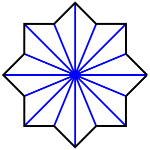
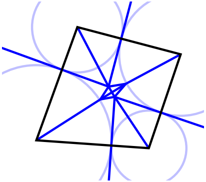
Das Falten-und-Schneiden Problem

Kristian Bredies

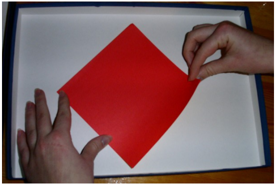
Uttendorf, 14. Februar 2005





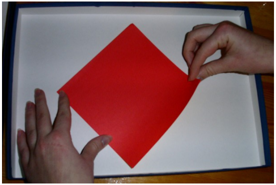
Inhalt

Origami – Die Kunst des Papierfaltens



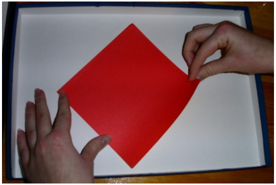
Im klassischen Origami werden komplexe Figuren aus einem einzigen quadratischen Blatt Papier gefaltet.

Origami – Die Kunst des Papierfaltens



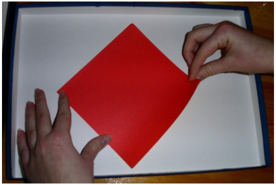
Im klassischen Origami werden komplexe Figuren aus einem einzigen quadratischen Blatt Papier gefaltet.

Origami – Die Kunst des Papierfaltens



Im klassischen Origami werden komplexe Figuren aus einem einzigen quadratischen Blatt Papier gefaltet.

Origami – Die Kunst des Papierfaltens



Im klassischen Origami werden komplexe Figuren aus einem einzigen quadratischen Blatt Papier gefaltet.

Zur Geschichte des Origami

Origami

Aus den japanischen Worten *oru* – falten und *kami* – Papier.

Zur Geschichte des Origami

Origami

Aus den japanischen Worten *oru* – falten und *kami* – Papier.

Japan:	6. Jahrhundert; schriftliche Aufzeichnungen erst Ende 18. Jahrhundert; einfache Figuren
Spanien:	12. Jahrhundert; geometrische Figuren

Zur Geschichte des Origami

Origami

Aus den japanischen Worten *oru* – falten und *kami* – Papier.

Japan:	6. Jahrhundert; schriftliche Aufzeichnungen erst Ende 18. Jahrhundert; einfache Figuren
Spanien:	12. Jahrhundert; geometrische Figuren

Populär geworden als Kunstform erst ab 1950 durch *Yoshizawa Akira*, ab dann Entwicklung komplexer Figuren.

Erweiterung: Falten und Schneiden

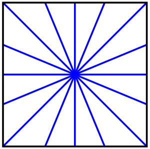
Beobachtung

Zusammenfalten eines Blattes Papier *und* anschließendes Durchschneiden entlang einer Linie gibt ebene Figuren.

Erweiterung: Falten und Schneiden

Beobachtung

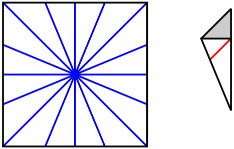
Zusammenfalten eines Blattes Papier *und* anschließendes Durchschneiden entlang einer Linie gibt ebene Figuren.



Erweiterung: Falten und Schneiden

Beobachtung

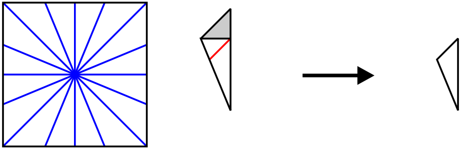
Zusammenfalten eines Blattes Papier *und* anschließendes Durchschneiden entlang einer Linie gibt ebene Figuren.



Erweiterung: Falten und Schneiden

Beobachtung

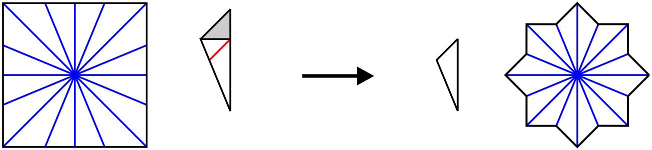
Zusammenfalten eines Blattes Papier *und* anschließendes Durchschneiden entlang einer Linie gibt ebene Figuren.



Erweiterung: Falten und Schneiden

Beobachtung

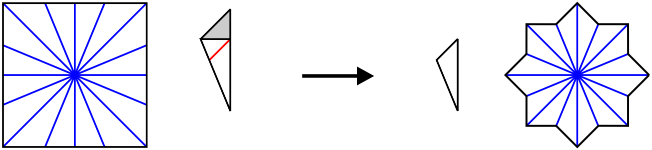
Zusammenfalten eines Blattes Papier *und* anschließendes Durchschneiden entlang einer Linie gibt ebene Figuren.



Erweiterung: Falten und Schneiden

Beobachtung

Zusammenfalten eines Blattes Papier *und* anschließendes Durchschneiden entlang einer Linie gibt ebene Figuren.



Frage

Lassen sich auf diese Weise beliebige polygonale Figuren erzeugen?

Mathematische Analyse

Origami läßt sich mathematisch auf verschiedenen Ebenen untersuchen. Zum Beispiel:

Mathematische Analyse

Origami läßt sich mathematisch auf verschiedenen Ebenen untersuchen. Zum Beispiel:

- Geometrische Konstruktion durch Papierfalten.
  - Formalisierung des Papierfaltens durch Huzitas Axiome; Lösung von Gleichungen dritten Grades damit möglich (Winkeldrittelung, Verdoppelung des Würfelinhalts) [Huzita 1992]

Mathematische Analyse

Origami läßt sich mathematisch auf verschiedenen Ebenen untersuchen. Zum Beispiel:

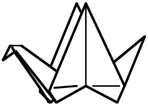
- Geometrische Konstruktion durch Papierfalten.
  - Formalisierung des Papierfaltens durch Huzitas Axiome; Lösung von Gleichungen dritten Grades damit möglich (Winkeldrittelung, Verdoppelung des Würfelinhalts) [Huzita 1992]
- Graphentheoretische Untersuchung der Faltmuster.
  - Untersuchung der Faltmuster (Lokale Eigenschaften, Faltbarkeit); Origamidesign durch Bäume. [Hull 1994, Lang 1996]

Mathematische Beschreibung

Praktische Annahme

Wenn man das Faltmuster einer Figur kennt, kann man sie auch falten.

- Identifizierung von fertig gefalteten Figuren mit deren Faltmuster.

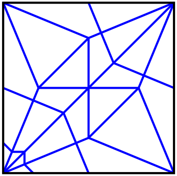


Mathematische Beschreibung

Praktische Annahme

Wenn man das Faltmuster einer Figur kennt, kann man sie auch falten.

- Identifizierung von fertig gefalteten Figuren mit deren Faltmuster.

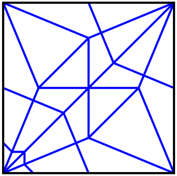


Mathematische Beschreibung

Praktische Annahme

Wenn man das Faltmuster einer Figur kennt, kann man sie auch falten.

- Identifizierung von fertig gefalteten Figuren mit deren Faltmuster.

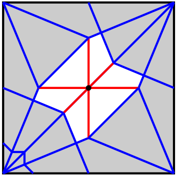


Definition

Ein *Faltmuster* (N, E, φ) sei gegeben durch einen endlichen planaren Graphen (N, E) in $[0, 1]^2$ und eine Winkelfunktion $\varphi : E \to [-\pi, \pi]$. Ist das Faltmuster faltbar, so definiert es ein *Origami*. Nimmt φ nur die Werte $\pm\pi$ an, so ist das Origami *flach*.

Lokale Eigenschaften

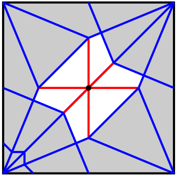
Sei (N, E, φ) ein flaches Origami. Wähle ein $n \in N$ im Inneren von $[0,1]^2$ und betrachte alle Kanten $K \subset E$, die mit n verbunden sind.



Lokale Eigenschaften

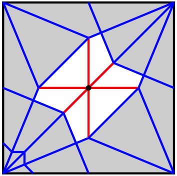
Sei (N, E, φ) ein flaches Origami. Wähle ein $n \in N$ im Inneren von $[0,1]^2$ und betrachte alle Kanten $K \subset E$, die mit n verbunden sind.

Eine *Talfalte* ist eine Kante k, mit $\varphi(k) = \pi$, eine *Bergfalte* eine Kante k mit $\varphi(k) = -\pi$.



Lokale Eigenschaften

Sei (N, E, φ) ein flaches Origami. Wähle ein $n \in N$ im Inneren von $[0,1]^2$ und betrachte alle Kanten $K \subset E$, die mit n verbunden sind.



Eine *Talfalte* ist eine Kante k, mit $\varphi(k) = \pi$, eine *Bergfalte* eine Kante k mit $\varphi(k) = -\pi$.

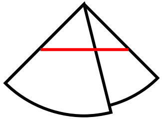
Satz von Maekawa

Sei V die Anzahl der Talfalten und M die Anzahl der Bergfalten. Dann gilt:

$$|M - V| = 2 .$$

Der Satz von Maekawa – Beweis

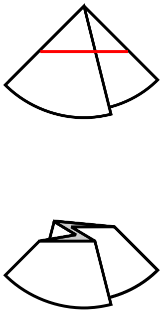
Betrachte einen “hochgeklappten” Knoten im zusammengefaltetem Origami.



Der Satz von Maekawa – Beweis

Betrachte einen “hochgeklappten” Knoten im zusammengefaltetem Origami.

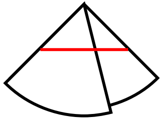
- Das Wegschneiden des Knotens enthüllt ein zusammengefaltetes Polygon.

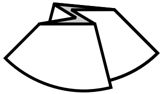


Der Satz von Maekawa – Beweis

Betrachte einen “hochgeklappten” Knoten im zusammengefaltetem Origami.

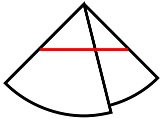
- Das Wegschneiden des Knotens enthüllt ein zusammengefaltetes Polygon.
- Tal- bzw. Bergfalten entsprechen inneren Winkel 2π bzw. 0, also ist der Gesamtwinkel $2\pi V$.



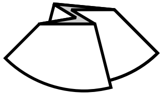


Der Satz von Maekawa – Beweis

Betrachte einen “hochgeklappten” Knoten im zusammengefaltetem Origami.



- Das Wegschneiden des Knotens enthüllt ein zusammengefaltetes Polygon.
- Tal- bzw. Bergfalten entsprechen inneren Winkel 2π bzw. 0, also ist der Gesamtwinkel $2\pi V$.

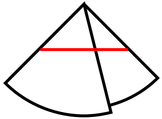


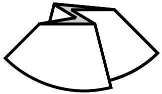
- Das Polygon ist ein $M + V = n$–Eck, d.h. der Gesamtwinkel ist $(n - 2)\pi$. Also folgt $M - V = 2$.

Der Satz von Maekawa – Beweis

Betrachte einen "hochgeklappten" Knoten im zusammengefaltetem Origami.

- Das Wegschneiden des Knotens enthüllt ein zusammengefaltetes Polygon.
- Tal- bzw. Bergfalten entsprechen inneren Winkel 2π bzw. 0, also ist der Gesamtwinkel $2\pi V$.
- Das Polygon ist ein $M + V = n$–Eck, d.h. der Gesamtwinkel ist $(n-2)\pi$. Also folgt $M - V = 2$.





Analog folgt bei "heruntergeklappten" Knoten $V - M = 2$.

Der Satz von Maekawa – Folgerungen

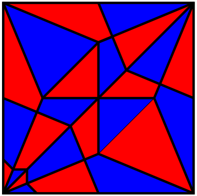
- Jeder innere Knoten hat eine gerade Anzahl von Kanten.
  Betrachtet man alle Randknoten als einen Knoten, so gilt das auch für diesen.

Der Satz von Maekawa – Folgerungen

- Jeder innere Knoten hat eine gerade Anzahl von Kanten.
  Betrachtet man alle Randknoten als einen Knoten, so gilt das auch für diesen.
- Damit ist der Graph ein Euler-Graph.
  Also kann man die Flächen des Graphen zweifärben.

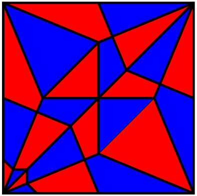
Der Satz von Maekawa – Folgerungen

- Jeder innere Knoten hat eine gerade Anzahl von Kanten.
  Betrachtet man alle Randknoten als einen Knoten, so gilt das auch für diesen.
- Damit ist der Graph ein Euler-Graph.
  Also kann man die Flächen des Graphen zweifärben.



Der Satz von Maekawa – Folgerungen

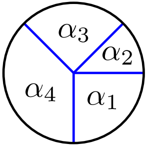
- Jeder innere Knoten hat eine gerade Anzahl von Kanten.
  Betrachtet man alle Randknoten als einen Knoten, so gilt das auch für diesen.
- Damit ist der Graph ein Euler-Graph. Also kann man die Flächen des Graphen zweifärben.



An einer Zweifärbung lassen sich die Seiten im gefalteten Origami identifizieren.

Der Satz von Kawasaki

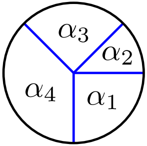
Bezeichne $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$ die sortierten Winkel zwischen den Kanten. Dann gilt



$$\alpha_1 + \alpha_3 + \ldots \alpha_{2n-1} = \alpha_2 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{2n} = \pi \ .$$

Der Satz von Kawasaki

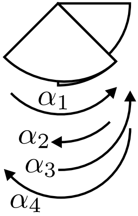
Bezeichne $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$ die sortierten Winkel zwischen den Kanten. Dann gilt



$$\alpha_1 + \alpha_3 + \ldots \alpha_{2n-1} = \alpha_2 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{2n} = \pi\ .$$

Beweis.

Im zusammengefalteten Origami wechselt bei jeder Falte das Vorzeichen im Winkel, also



$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \ldots - \alpha_{2n} = 0 \quad \text{und natürlich}$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2n} = 2\pi\ .$$

Daraus folgt das Obige.

Faltbarkeit

- Man kann zeigen, daß die Aussage vom Satz von Kawasaki hinreichend für lokale Faltbarkeit ist.

Faltbarkeit

- Man kann zeigen, daß die Aussage vom Satz von Kawasaki hinreichend für lokale Faltbarkeit ist.
- Es existieren jedoch Faltmuster, die den Sätzen von Maekawa und Kawasaki genügen und nicht global faltbar sind.

Faltbarkeit

- Man kann zeigen, daß die Aussage vom Satz von Kawasaki hinreichend für lokale Faltbarkeit ist.
- Es existieren jedoch Faltmuster, die den Sätzen von Maekawa und Kawasaki genügen und nicht global faltbar sind.
- Für Spezialfälle existieren Aussagen bezüglich globaler Faltbarkeit, der allgemeine Fall ist jedoch offen.

Zurück zum Falten-und-Schneiden Problem

Es existieren zwei Strategien für die Lösung des Problems.

Zurück zum Falten-und-Schneiden Problem

Es existieren zwei Strategien für die Lösung des Problems.

1. “Strichmännchenkonstruktion”, erlaubt das Ausschneiden baumartiger Figuren. [Demaine, 1998]

Zurück zum Falten-und-Schneiden Problem

Es existieren zwei Strategien für die Lösung des Problems.

1. “Strichmännchenkonstruktion”, erlaubt das Ausschneiden baumartiger Figuren. [Demaine, 1998]
2. Konstruktion durch Scheibenpackung, allgemeine Lösung. [Demaine et. al, 2001]

Zurück zum Falten-und-Schneiden Problem

Es existieren zwei Strategien für die Lösung des Problems.

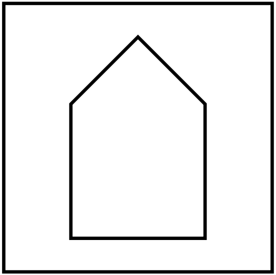
1. "Strichmännchenkonstruktion", erlaubt das Ausschneiden baumartiger Figuren. [Demaine, 1998]
2. Konstruktion durch Scheibenpackung, allgemeine Lösung. [Demaine et. al, 2001]

Scheibenpackungsalgorithmus

- Erstellen eines Drei- und Vierecksgitters
- Konstruktion von lokalen Faltmustern
- Zuweisen der Berg- und Talfalten
- Verbreitern des Polygons

Das Drei- und Vierecksgitter

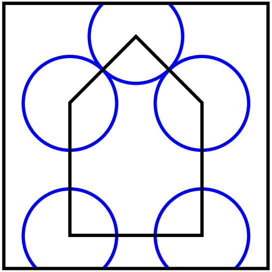
Bezeichne R den Rand des Papiers und P das auszuschneidene Polygon.



Das Drei- und Vierecksgitter

Bezeichne R den Rand des Papiers und P das auszuschneidene Polygon.

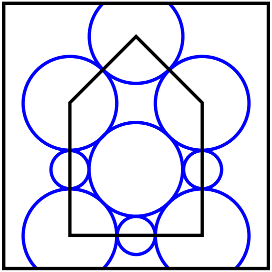
- Setze in jeden Eckpunkt von P (und R) eine Kreisscheibe, so daß sich keine Scheiben überschneiden.



Das Drei- und Vierecksgitter

Bezeichne R den Rand des Papiers und P das auszuschneidene Polygon.

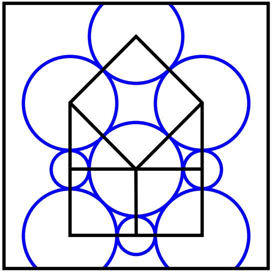
- Setze in jeden Eckpunkt von P (und R) eine Kreisscheibe, so daß sich keine Scheiben überschneiden.
- Fülle die Lücken so auf, daß sie 3 oder 4 Kreisscheiben berühren.



Das Drei- und Vierecksgitter

Bezeichne R den Rand des Papiers und P das auszuschneidene Polygon.

- Setze in jeden Eckpunkt von P (und R) eine Kreisscheibe, so daß sich keine Scheiben überschneiden.
- Fülle die Lücken so auf, daß sie 3 oder 4 Kreisscheiben berühren.
- Erstelle daraus ein Drei- und Vierecksgitter.



Konstruktion lokaler Faltmuster

Idee

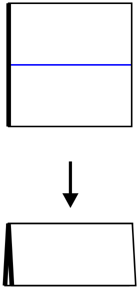
Falte jedes Drei- und Viereck so, daß deren Rand auf einer Linie liegt.

Konstruktion lokaler Faltmuster

Idee

Falte jedes Drei- und Viereck so, daß deren Rand auf einer Linie liegt.

- Jede entsprechende Falte muß senkrecht auf dem Rand stehen.

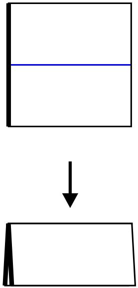


Konstruktion lokaler Faltmuster

Idee

Falte jedes Drei- und Viereck so, daß deren Rand auf einer Linie liegt.

- Jede entsprechende Falte muß senkrecht auf dem Rand stehen.
- Randknoten müssen zum Gitter passen.

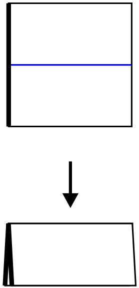


Konstruktion lokaler Faltmuster

Idee

Falte jedes Drei- und Viereck so, daß deren Rand auf einer Linie liegt.

- Jede entsprechende Falte muß senkrecht auf dem Rand stehen.
- Randknoten müssen zum Gitter passen.
- Der Satz von Kawasaki soll erfüllt sein.

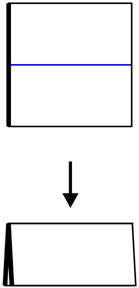


Konstruktion lokaler Faltmuster

Idee

Falte jedes Drei- und Viereck so, daß deren Rand auf einer Linie liegt.

- Jede entsprechende Falte muß senkrecht auf dem Rand stehen.
- Randknoten müssen zum Gitter passen.
- Der Satz von Kawasaki soll erfüllt sein.

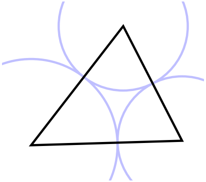


Ergibt sich durch die Schnitte der Kreise mit P.

Lokale Faltmuster

Konstruktion anhand der Kreise

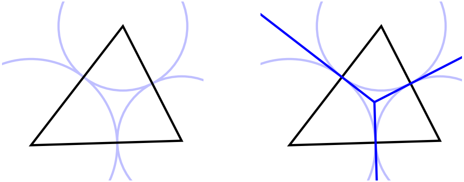
Dreiecke:



Lokale Faltmuster

Konstruktion anhand der Kreise

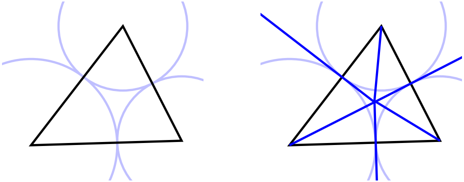
Dreiecke:



Lokale Faltmuster

Konstruktion anhand der Kreise

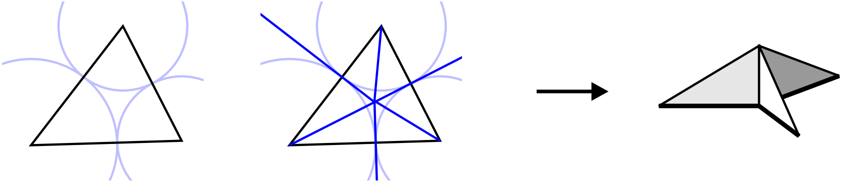
Dreiecke:



Lokale Faltmuster

Konstruktion anhand der Kreise

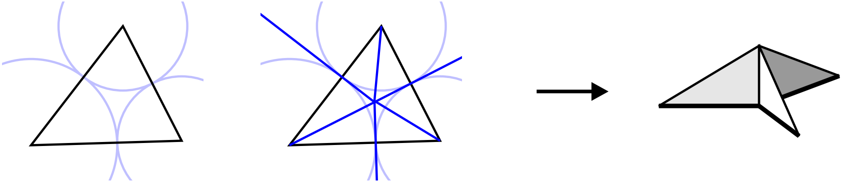
Dreiecke:



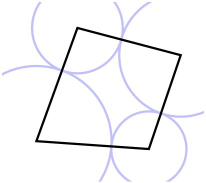
Lokale Faltmuster

Konstruktion anhand der Kreise

Dreiecke:



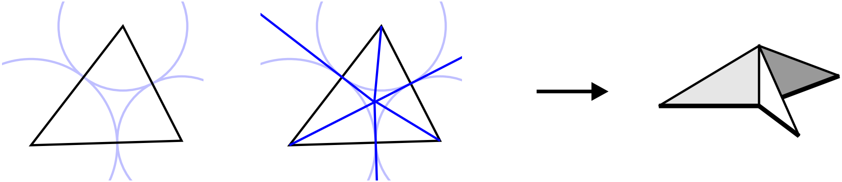
Vierecke:



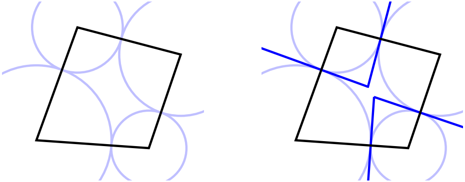
Lokale Faltmuster

Konstruktion anhand der Kreise

Dreiecke:



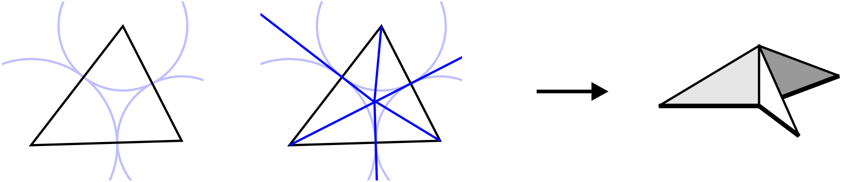
Vierecke:



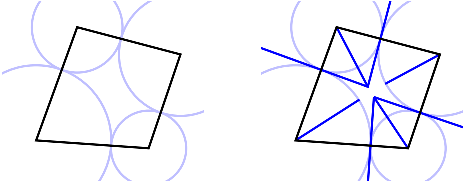
Lokale Faltmuster

Konstruktion anhand der Kreise

Dreiecke:



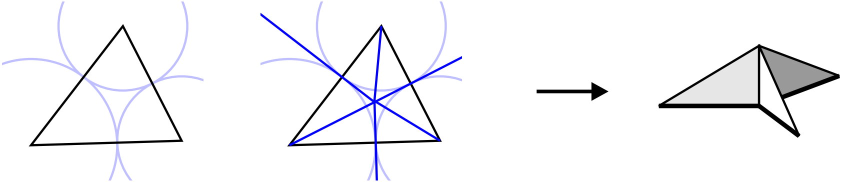
Vierecke:



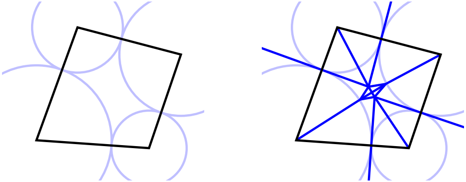
Lokale Faltmuster

Konstruktion anhand der Kreise

Dreiecke:



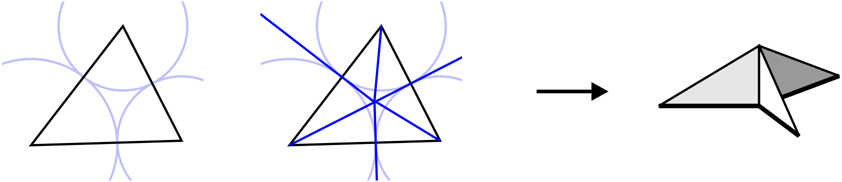
Vierecke:



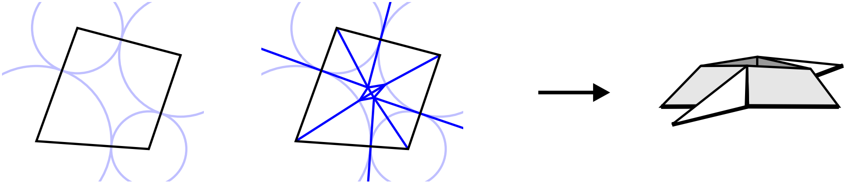
Lokale Faltmuster

Konstruktion anhand der Kreise

Dreiecke:

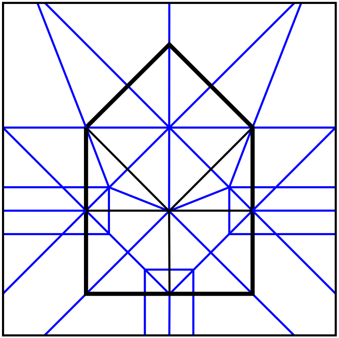


Vierecke:



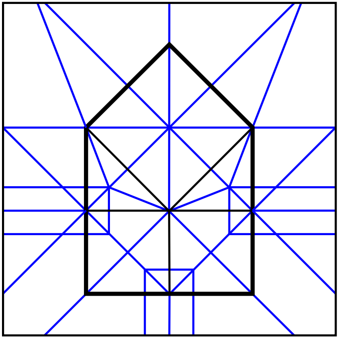
Wie ergibt dies das Gewünschte?

- Die “Moleküle” lassen sich nach oben oder unten falten.



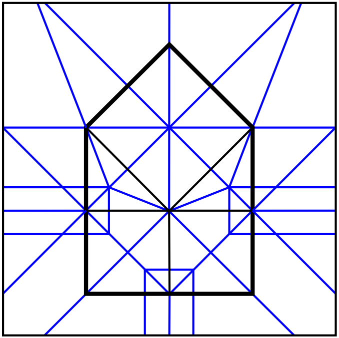
Wie ergibt dies das Gewünschte?

- Die “Moleküle” lassen sich nach oben oder unten falten.
- Falte sie also so, daß:
  - Innerhalb von P zeigt nach oben
  - Außerhalb von P zeigt nach unten



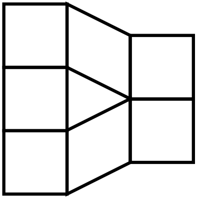
Wie ergibt dies das Gewünschte?

- Die “Moleküle” lassen sich nach oben oder unten falten.
- Falte sie also so, daß:
  - Innerhalb von P zeigt nach oben
  - Außerhalb von P zeigt nach unten
- P selbst wird nicht gefaltet und ergibt eine Linie.



Kann man dies überhaupt falten?

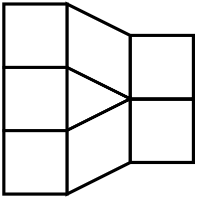
Faltungsalgorithmus:



Kann man dies überhaupt falten?

Faltungsalgorithmus:

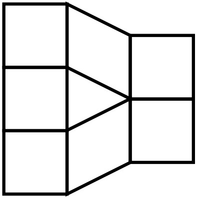
- Erstelle Kantenbaum T_E
  - Jeder inneren Knoten erreichbar
  - Keine Kanten aus P
  - Wurzel auf dem Rand



Kann man dies überhaupt falten?

Faltungsalgorithmus:

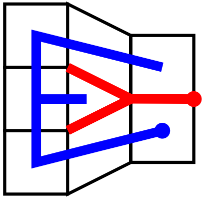
- Erstelle Kantenbaum T_E
  - Jeder inneren Knoten erreichbar
  - Keine Kanten aus P
  - Wurzel auf dem Rand
- Konstruiere dualen Molekülbaum T_M



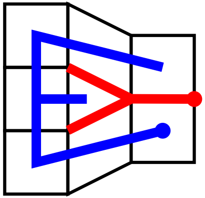
Kann man dies überhaupt falten?

Faltungsalgorithmus:

- Erstelle Kantenbaum T_E
  - Jeder inneren Knoten erreichbar
  - Keine Kanten aus P
  - Wurzel auf dem Rand
- Konstruiere dualen Molekülbaum T_M



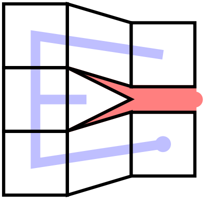
Kann man dies überhaupt falten?



Faltungsalgorithmus:

- Erstelle Kantenbaum T_E
  - Jeder inneren Knoten erreichbar
  - Keine Kanten aus P
  - Wurzel auf dem Rand
- Konstruiere dualen Molekülbaum T_M
- Schneide entlang T_E

Kann man dies überhaupt falten?



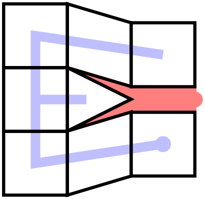
Faltungsalgorithmus:

- Erstelle Kantenbaum T_E
  - Jeder inneren Knoten erreichbar
  - Keine Kanten aus P
  - Wurzel auf dem Rand
- Konstruiere dualen Molekülbaum T_M
- Schneide entlang T_E

Kann man dies überhaupt falten?

Faltungsalgorithmus:

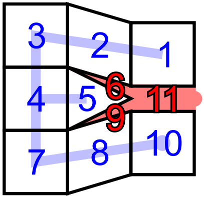
- Erstelle Kantenbaum T_E
  - Jeder inneren Knoten erreichbar
  - Keine Kanten aus P
  - Wurzel auf dem Rand
- Konstruiere dualen Molekülbaum T_M
- Schneide entlang T_E
- Falte entlang T_M (vorwärts) und klebe entlang T_E (rückwärts) wieder zusammen



Kann man dies überhaupt falten?

Faltungsalgorithmus:

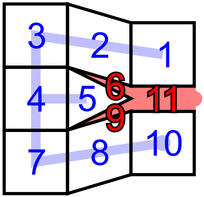
- Erstelle Kantenbaum T_E
  - Jeder inneren Knoten erreichbar
  - Keine Kanten aus P
  - Wurzel auf dem Rand
- Konstruiere dualen Molekülbaum T_M
- Schneide entlang T_E
- Falte entlang T_M (vorwärts) und klebe entlang T_E (rückwärts) wieder zusammen

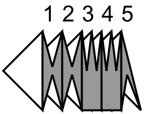


Kann man dies überhaupt falten?

Faltungsalgorithmus:

- Erstelle Kantenbaum T_E
  - Jeder inneren Knoten erreichbar
  - Keine Kanten aus P
  - Wurzel auf dem Rand
- Konstruiere dualen Molekülbaum T_M
- Schneide entlang T_E
- Falte entlang T_M (vorwärts) und klebe entlang T_E (rückwärts) wieder zusammen

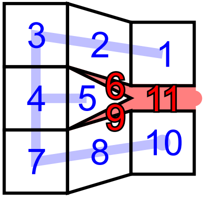


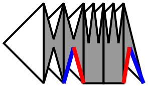


Kann man dies überhaupt falten?

Faltungsalgorithmus:

- Erstelle Kantenbaum T_E
  - Jeder inneren Knoten erreichbar
  - Keine Kanten aus P
  - Wurzel auf dem Rand
- Konstruiere dualen Molekülbaum T_M
- Schneide entlang T_E
- Falte entlang T_M (vorwärts) und klebe entlang T_E (rückwärts) wieder zusammen





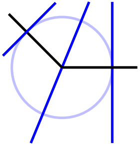
Der letzte Schliff

Bei dem jetzigen Muster landet P zwar auf einer Linie, alle inneren Kanten berühren sie jedoch.

Der letzte Schliff

Bei dem jetzigen Muster landet P zwar auf einer Linie, alle inneren Kanten berühren sie jedoch.

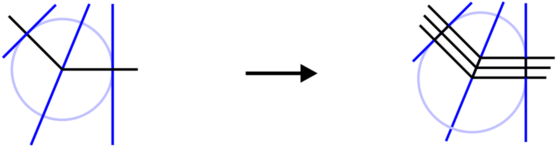
- Verbreitert man P so, daß alle Merkmale erhalten bleiben, dann landen die inneren Kanten wirklich ober- und unterhalb der Schnittlinie.



Der letzte Schliff

Bei dem jetzigen Muster landet P zwar auf einer Linie, alle inneren Kanten berühren sie jedoch.

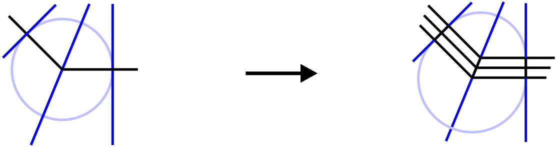
- Verbreitert man P so, daß alle Merkmale erhalten bleiben, dann landen die inneren Kanten wirklich ober- und unterhalb der Schnittlinie.



Der letzte Schliff

Bei dem jetzigen Muster landet P zwar auf einer Linie, alle inneren Kanten berühren sie jedoch.

- Verbreitert man P so, daß alle Merkmale erhalten bleiben, dann landen die inneren Kanten wirklich ober- und unterhalb der Schnittlinie.



Jetzt kann man Falten und Schneiden.

Literatur

- Thomas Hull. On the mathematics of flat origamis. *Congressus Numerantium 100 (1994) 215–224.*
- Marshall Bern, Erik Demaine, David Eppstein and Barry Hayes. A disk-packing algorithm for an origami magic trick. *Proc. 3rd Int. Meet. Origami Science (2001).*
- Robert Lang. A computational algorithm for origami design. *Proc. 12th ACM Symp. Comp. Geometry (1996) 98–105.*