Das Geheimnis

der Kaffeetasse

Uttendorf 2005

Lutz Justen

Überblick

- Der Kaffeetasseneffekt – was ist das?
- Einige (nicht-numerische!) Experimente
- Modellierung: Lineare Elastizitätsgleichung
- Numerik: FEM
- Testrechnungen
- Untersuchung von Eigenschwingungen

Das Problem

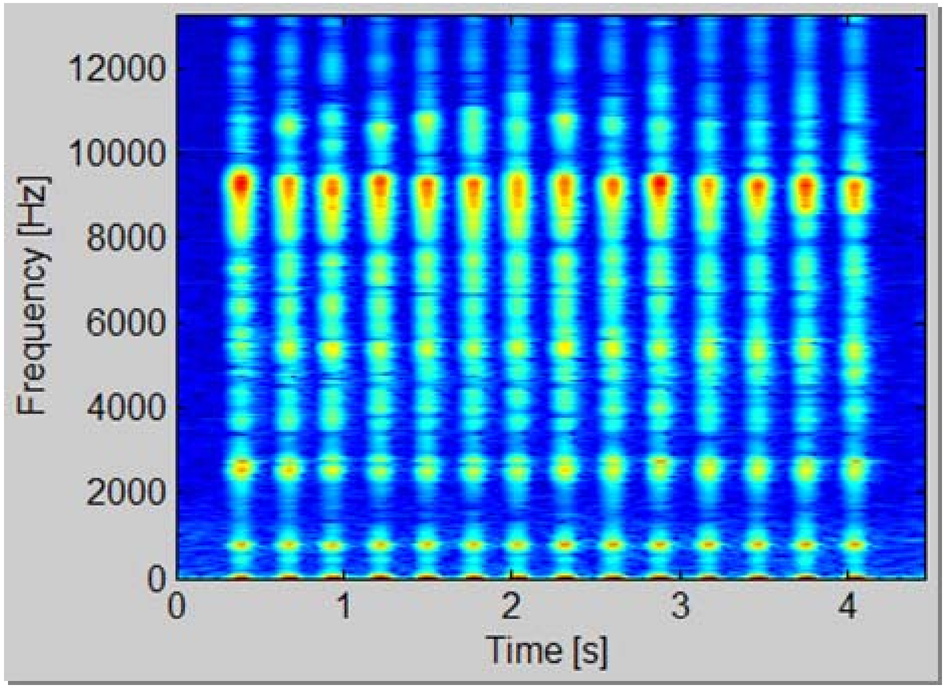
Die Versuchsreihe

Wie klingt eine Kaffeetasse mit...

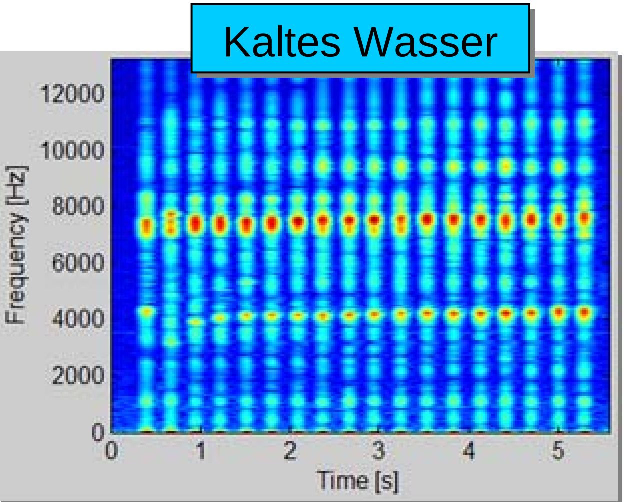
1. Nix?
2. kaltem Wasser?
3. heißem Wasser?
4. kalter Milch?
5. heißer Milch?
6. heißem Kakao?
7. Cappuccino?

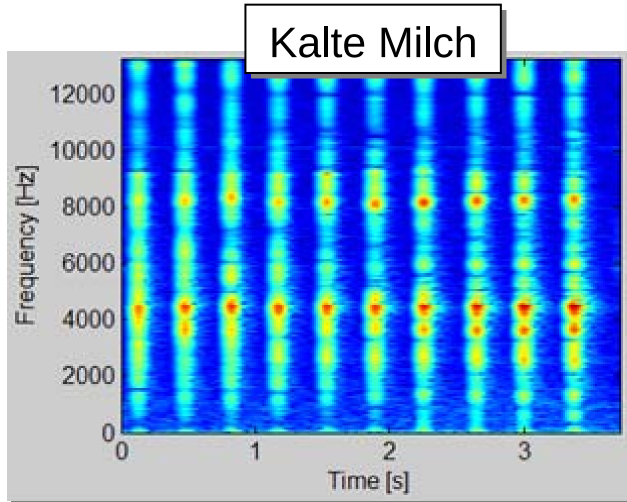
Spektrogramme

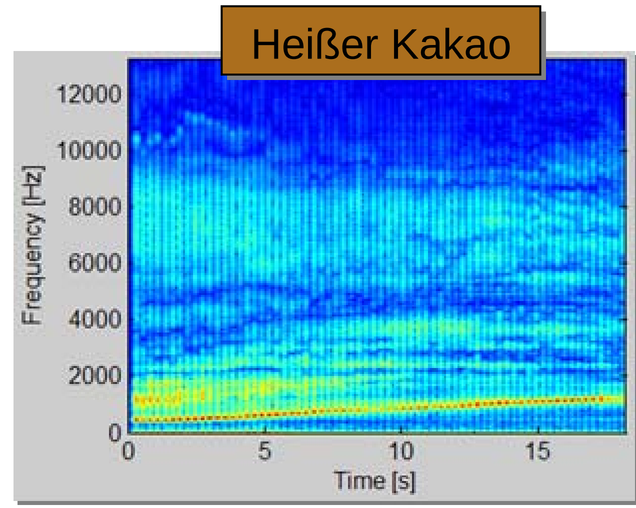
Leere Tasse

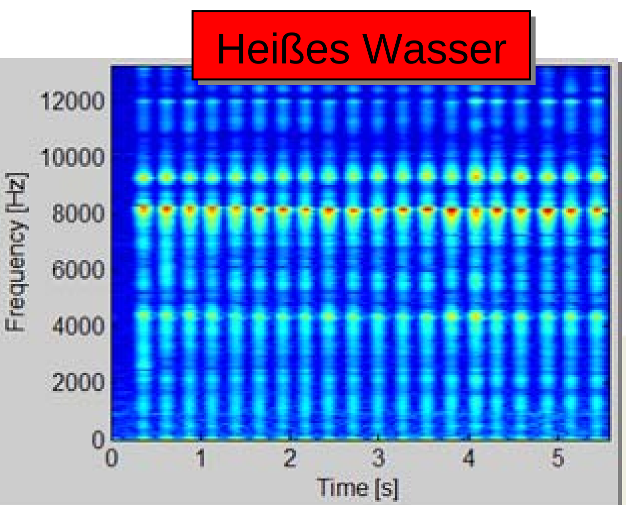


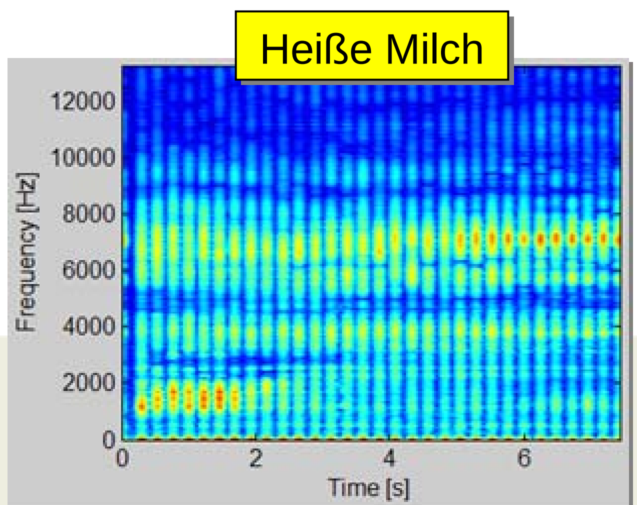
Spektrogramme

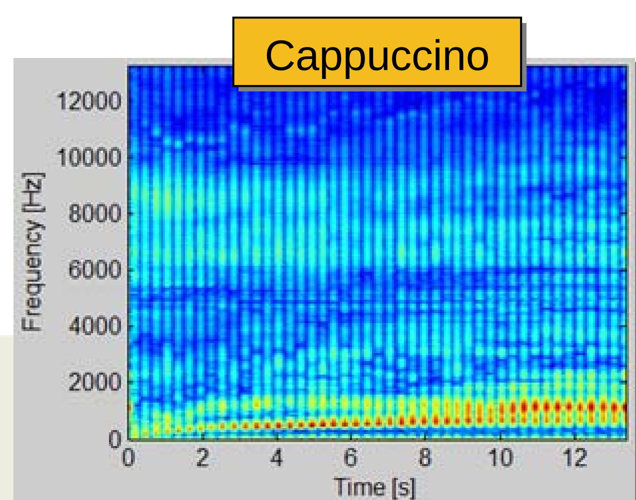












Beobachtungen

Heiße Milch, Kakao & Cappuccino: Frequenzerhöhung im Laufe der Zeit

<u>Grund für die Frequenzänderung</u>

Temperatur?

Nein! (→ Heißes Wasser zeigt keine Frequenzerhöhung)

Veränderung der Oberflächenform durch das Umrühren?

Nein! (→ Gegenversuche)

Vermutung: Veränderung der Schallgeschwindigkeit

In Milch durch Unterrühren von Luftbläschen

In Kakao/Cappuccino Effektverstärkung durch gelöste/schwebende Teilchen

Das Ziel

- Modellierung von Tasse + Flüssigkeit
  - Kartesische Koordinaten
  - Zylinderkoordinaten
- Extraktion der Eigenfrequenzen

- Untersuchung der Relation Schallgeschwindigkeit – Eigenfrequenz

Das Modell

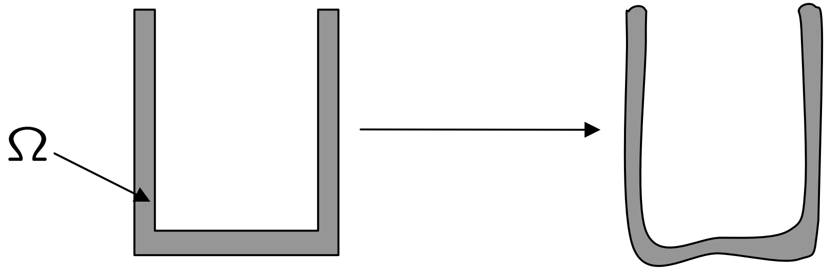
Gleichungen aufstellen...

1. Tasse
2. Cappuccino
3. Beides zusammen

Diskretisierung mit finiten Elementen

Das Modell: Tassengleichung

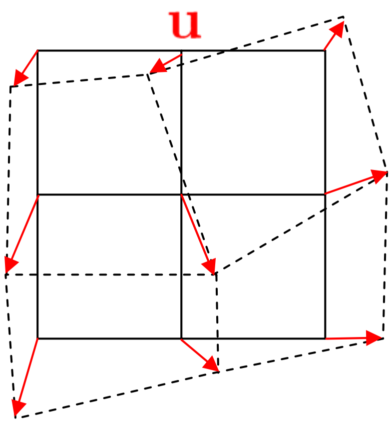
Modelliere Tasse als deformierbaren Festkörper



- In jedem Punkt $x \in \Omega$ 3 Freiheitsgrade:

  Auslenkung $\boxed{\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{r}) : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^3}$

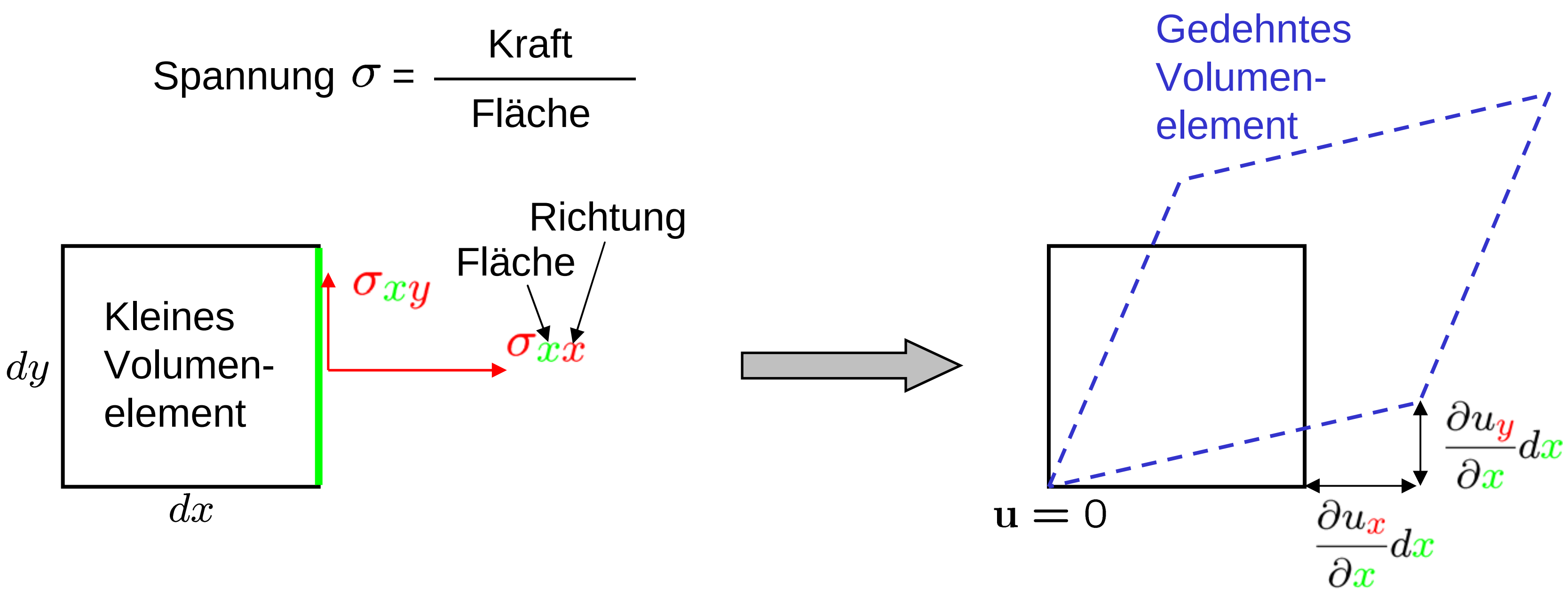
- Gesucht: Gleichung für $\mathbf{u}$
- Annahme: $\mathbf{u}$ klein



Tassengleichung II – Spannung und Dehnung

- Betrachte kleines Volumenelement in Ruhelage ($\mathbf{u} = 0$)
- „Spannung“ auf Seitenflächen ⇒ Element dehnt sich

$$\text{Spannung } \sigma = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$$



Tassengleichung III – Hooksches Gesetz

- Definiere Dehnungen $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial_i u_j + \partial_j u_i\right)$

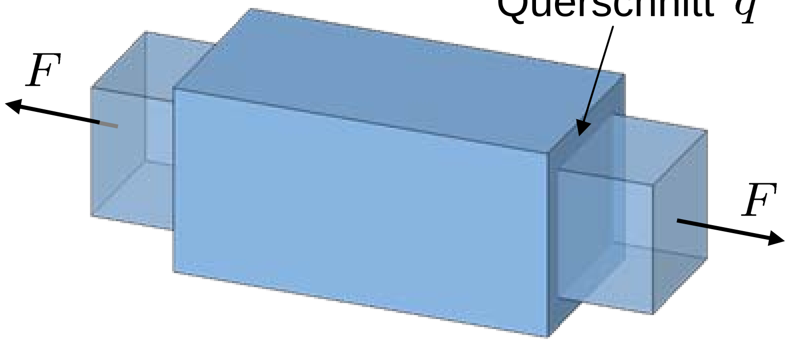
- Definiere Dehnungstensor $\underline{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T\right)$

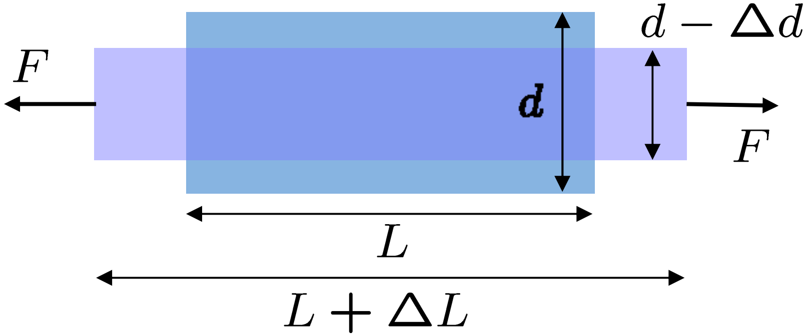
- Definiere Spannungstensor $\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$

- Hooksches Gesetz: $\boxed{\underline{\sigma} = C\underline{\epsilon}}$, $C : \mathbb{R}^{3\times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{3\times 3}$ linear

Tassengleichung IV – Elastizitätsmodul und Poissonzahl

- Porzellan ist isotrop und homogen
- Die elastischen Eigenschaften werden durch 2 Konstanten beschrieben





$$E = \frac{F/q}{\Delta L/L} = \frac{\sigma_{xx}}{\epsilon_{xx}}$$

Elastizitätsmodul

$$\mu = \frac{\Delta d/d}{\Delta L/L} = -\frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{xx}}$$

Poissonzahl
Querkontraktonszahl

Tassengleichung V – Explizite Darstellung des Hookschen Gesetzes

- Spannungstensor $\underline{\epsilon}$ und Dehnungstensor $\underline{\sigma}$ sind symmetrisch

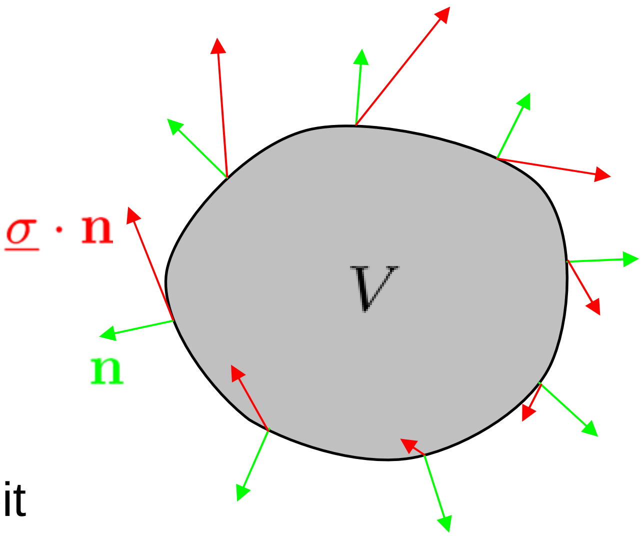
  ➡ Nur 6 unabhängige Komponenten
- „Voigt-Notation“ von Hookschem Gesetz $\underline{\sigma} = C\underline{\epsilon}$:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & & & \\ & & & 2\mu & & \\ & & & & 2\mu & \\ & & & & & 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix}$$

mit $\lambda = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ und $\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ „Lame-Koeffizienten“

Tassengleichung VI – Dynamik

Betrachte Volumen V



- Gesamtkraft auf das Volumen:

$$\int_{\partial V} \underline{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, dS(\mathbf{r}) = \int_V \operatorname{div} \underline{\sigma} \, d\mathbf{r}$$

- Gesamtimpuls des Volumens:

$$\int_V \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \, d\mathbf{r}$$

- Kraft = Ableitung des Impulses nach der Zeit

$$\int_V \operatorname{div} \underline{\sigma} \, d\mathbf{r} = \int_V \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \, d\mathbf{r}$$

- Da dies für alle Volumina gilt:

$$\boxed{\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \operatorname{div} \underline{\sigma} = \operatorname{div} (C \underline{\epsilon}) = \operatorname{div} \left(\tilde{C} \nabla \mathbf{u} \right)}$$

„Lineare Elastizitätsgleichung“

Was man damit so machen kann...

Das Modell: Capucchinogleichung

Allgemeine Gleichung für Flüssigkeiten: Navier-Stokes-Gleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} \rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p + \rho(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) &= 0 \end{aligned}}$$

$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t,\mathbf{r}) : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^3$ Geschwindigkeit

$\rho = \rho(t,\mathbf{r}) : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ Dichte

$p = p(t,\mathbf{r}) : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ Druck

Annahme: $\mathbf{v},\ p',\ \rho'$ klein, $p = p_0 + p',\ \rho = \rho_0 + \rho'$, p_0 und ρ_0 const.

Capucchinogleichung II

Einsetzen und kleine Terme vernachlässigen:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p' &= 0 \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \, \mathrm{div}(\mathbf{v}) &= 0 \end{aligned}$$

Navier-Stokes

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0 \end{aligned}$$

2. Gleichung nach t ableiten und die 1. Gleichung einsetzen:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + \Delta p' = 0$$

Weitere Linearisierung: $p' = \frac{dp}{d\rho}_{|\rho=\rho_0} \rho' = c^2 \rho'$, c „Schallgeschwindigkeit“

Somit $\boxed{\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + c^2 \Delta p' = 0}$ „Wellengleichung“

DEMO

Capucchinogleichung III

Die Wellengleichung kann auf die Elastizitätsgleichung zurückgeführt werden!

Angenommen, $\mathbf{u}$ erfüllt

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = K \nabla (\operatorname{div} \mathbf{u})$$

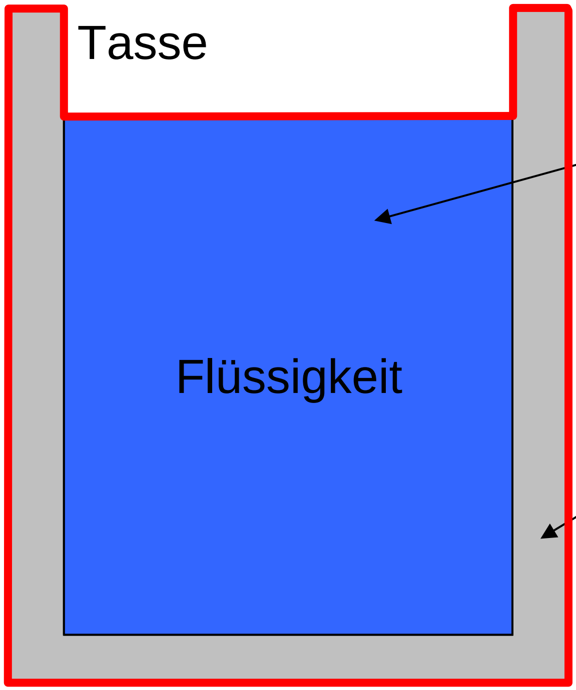
Dann erfüllt $\operatorname{div} \mathbf{u}$

$$\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\operatorname{div} \mathbf{u}) = \operatorname{div} \left(\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) = K \Delta (\operatorname{div} \mathbf{u})$$

Mit $p' = -K \operatorname{div} \mathbf{u}$ und der „Kompressibilität" $K = \rho_0 c^2$ ergibt sich

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + c^2 \Delta p' = 0$$

Zusammenfassung



$$\rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathrm{div}(C_f \nabla \mathbf{u})$$

$$\rho_c \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathrm{div}\,(C_c\, \nabla \mathbf{u})$$

Randbedingungen:

Vorgeschriebene Spannungen, (Neumann-RB)

$$(C\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g}$$

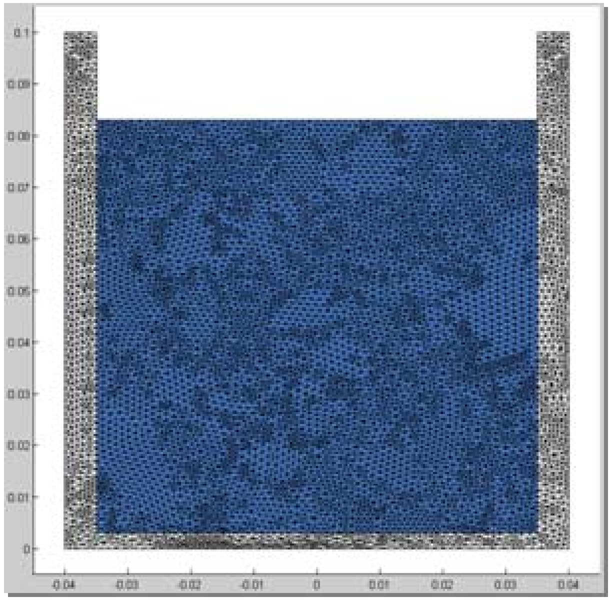
Diskretisierung

- FE-Diskretisierung im Raum

$$M\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{dt^2} = -S\mathbf{u}$$

M Massenmatrix, S Steifigkeitsmatrix

MATLAB PDE Toolbox



- Umwandlung der ODE in System 1. Ordnung

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}S & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$$

- Explizites Eulerverfahren in der Zeit

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + dt \cdot \mathbf{v}^n$$

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n - dt \cdot M^{-1}S\mathbf{u}^n$$

Testrechnungen

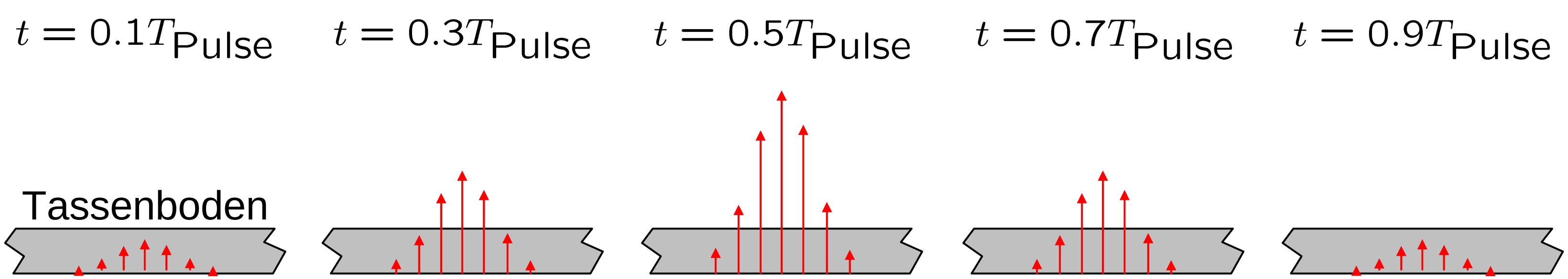
- Materialkonstanten

  Porzellan: $\rho_c = 2400 \frac{g}{m^3}\ , \quad E = 70GPa\ , \quad \nu = 0.19$

  Wasser: $\rho_f = 1000 \frac{g}{m^3}\ ,$

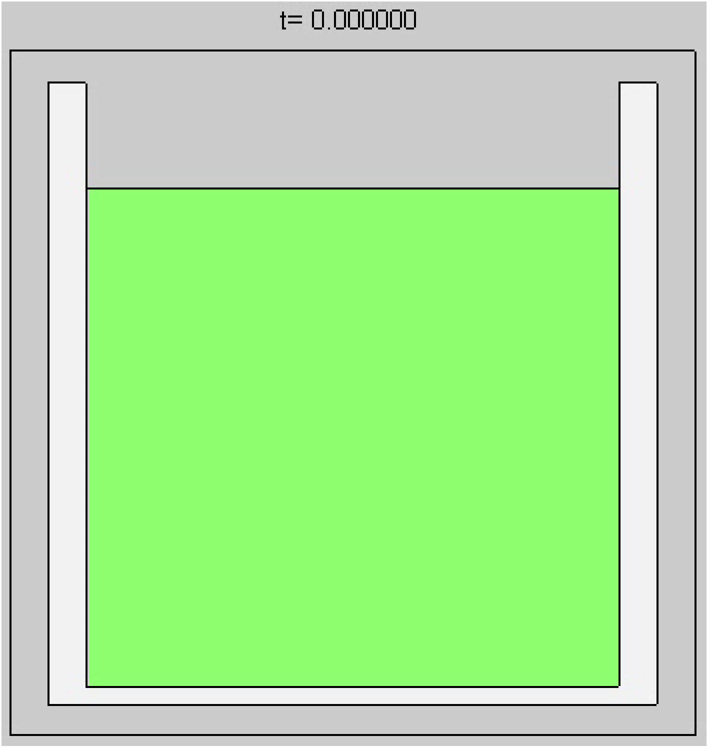
  a) $c = 1500 \frac{m}{s}$ b) $c = 500 \frac{m}{s}$

- Randbedingungen kräftefrei – bis auf einige Mikrosekunden: Gaussförmiger Impuls („Löffelklopfen“) am Tassenboden

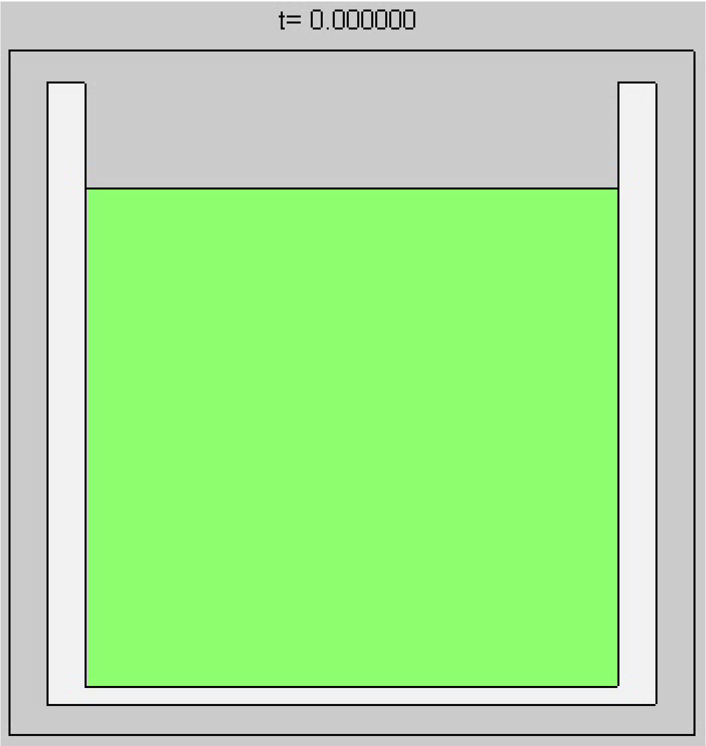


Testrechnungen

a) $c = 1500\frac{m}{s}$



b) $c = 500\frac{m}{s}$



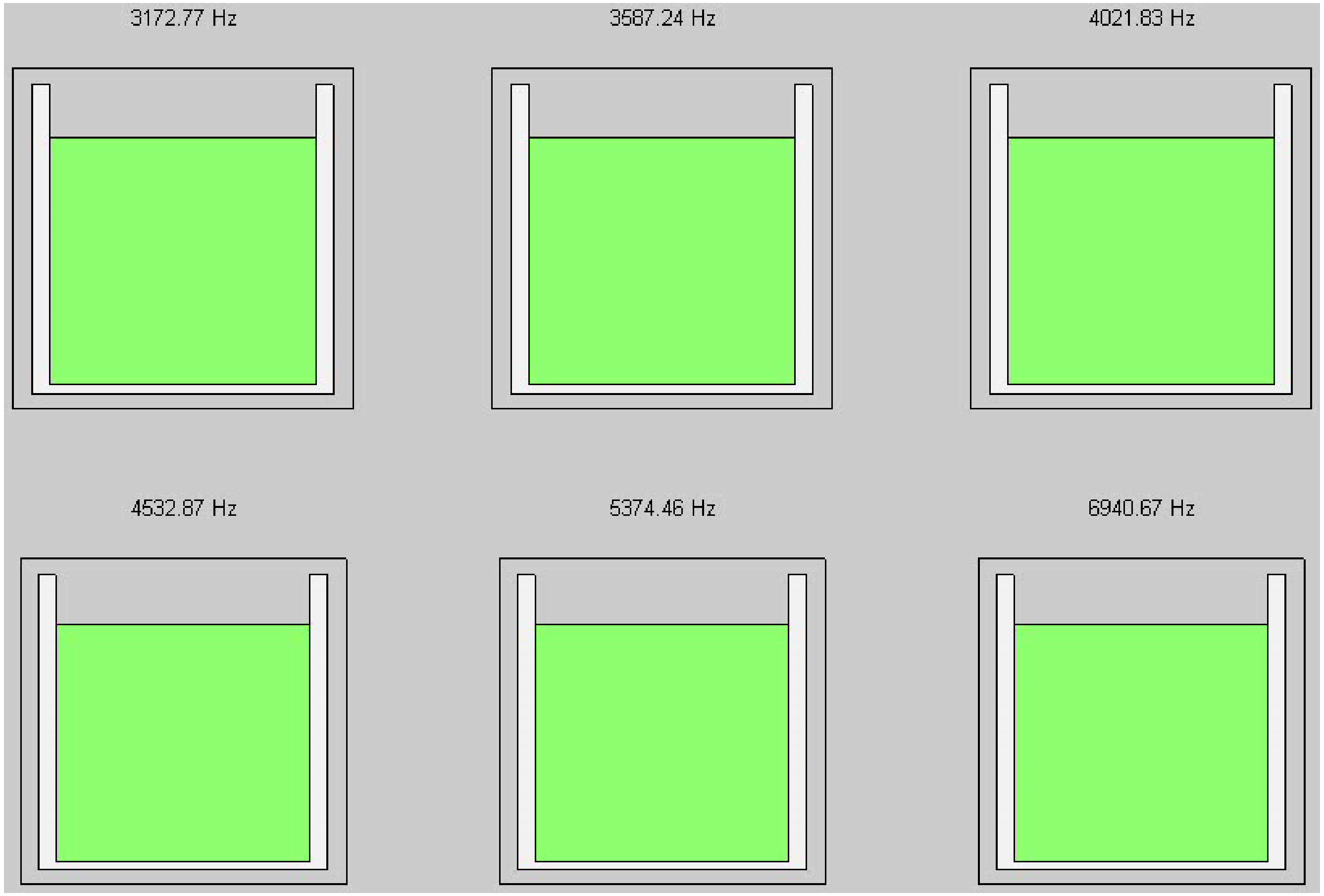
Bestimmung der Eigenfrequenzen

- Zur Erinnerung: Raum-diskrete Form $M\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{dt^2} = -S\mathbf{u}$ (1)
- Löse verallgemeinertes EW-Problem $S\mathbf{u}_n = \lambda_n M \mathbf{u}_n$
- M und S positiv definit
  → $(\mathbf{u}_n)$ bilden Orthonormalsystem und $\lambda_n > 0$
- Allgemeine Lösung des Problems (1):

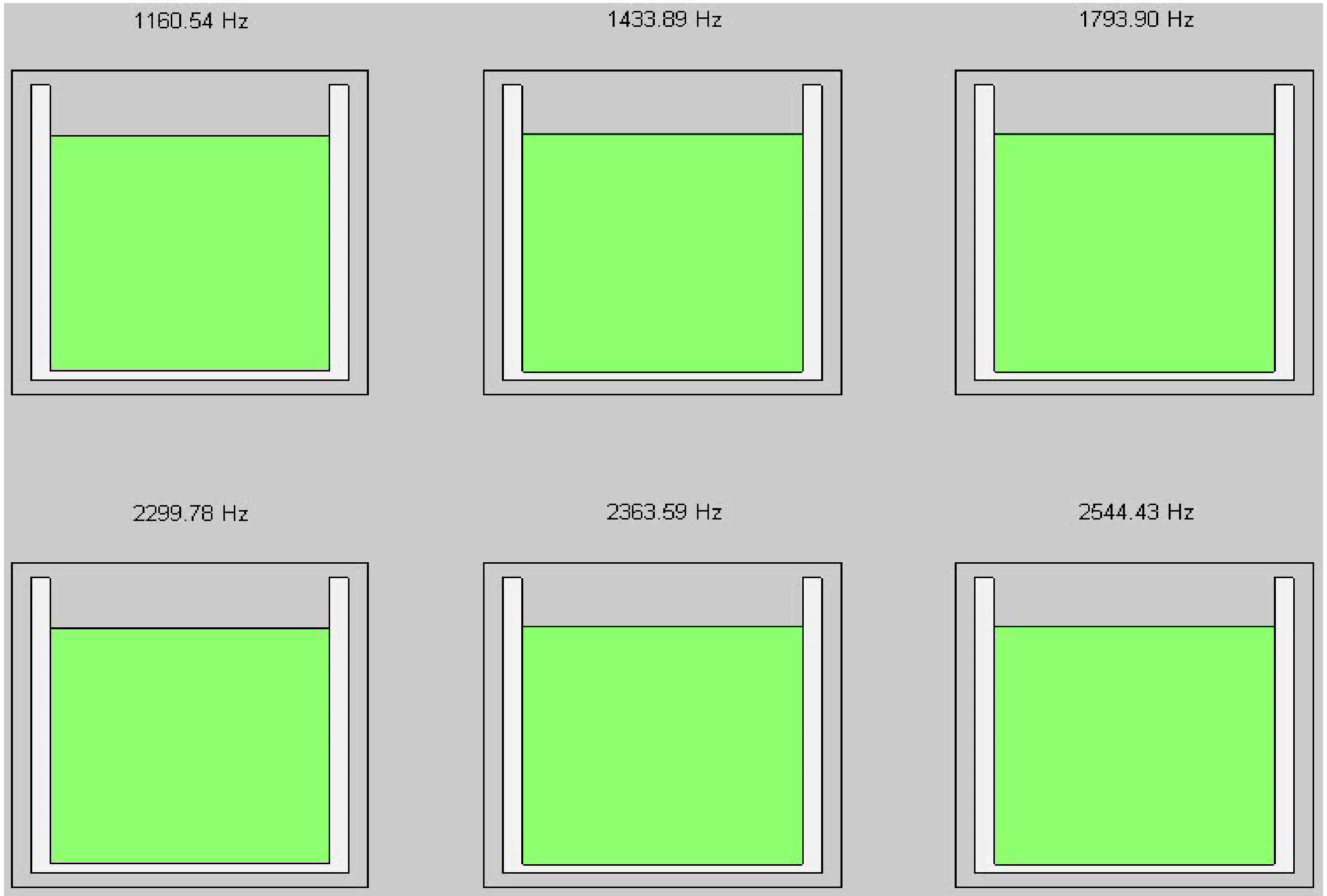
$$\boxed{\mathbf{u} = \sum_n \alpha_n \mathbf{u}_n \sin(k_n t + \varphi_n)}$$

- „Eigenfrequenzen" $k_n = \sqrt{\lambda_n}$
- „Eigenschwingungen" $\mathbf{u}_n$

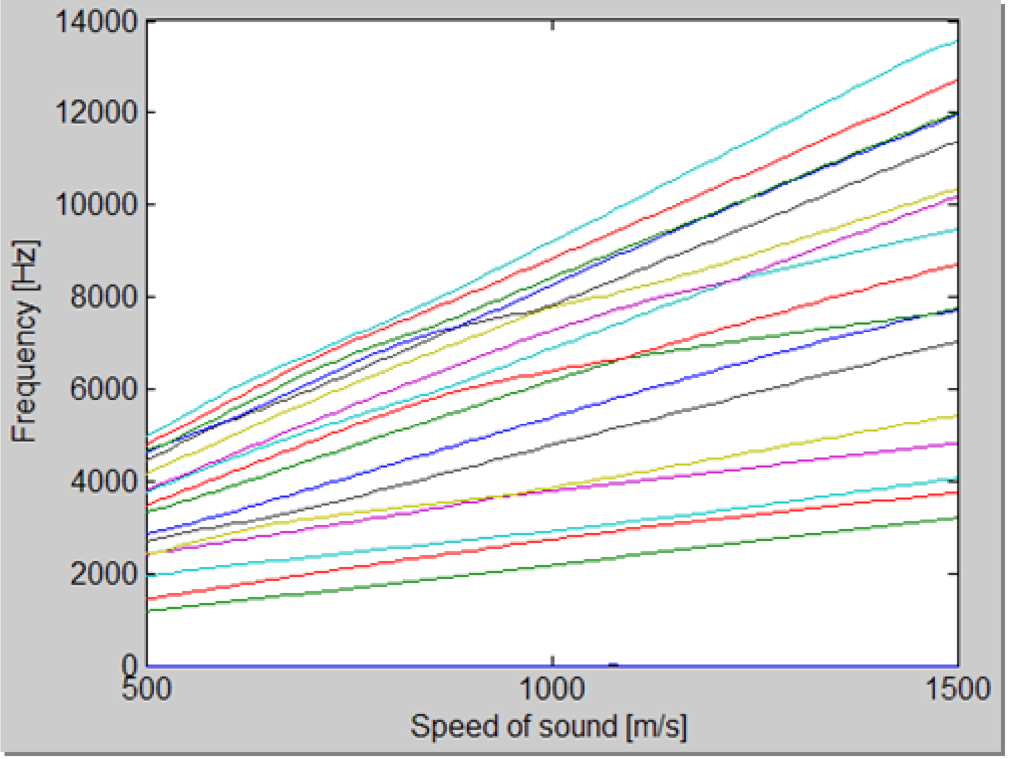
Einige Eigenschwingungen bei c=1500 m/s



Einige Eigenschwingungen bei c=500 m/s



Eigenfrequenzen in Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit



Entwicklung eines Zustands in Eigenfunktionen

Gegeben: Zustand zur Zeit $t = t_0$: $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ $\left(\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)$

Ansatz:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \sum_n \alpha_n \, u_n \, \sin(k_n t + \varphi_n) \\ \mathbf{v} &= \sum_n \alpha_n \, k_n \, u_n \, \cos(k_n t + \varphi_n) \end{aligned}$$

Mit

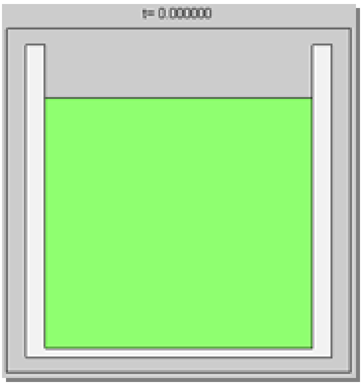
$$z_j = \langle \mathbf{u}(t_0), \mathbf{u}_j \rangle + i \frac{\langle \mathbf{v}(t_0), \mathbf{u}_j \rangle}{k_j} = \alpha_j e^{i(k_j t_0 + \varphi_j)}$$

ergibt sich

$$\alpha_j = |z_j|$$

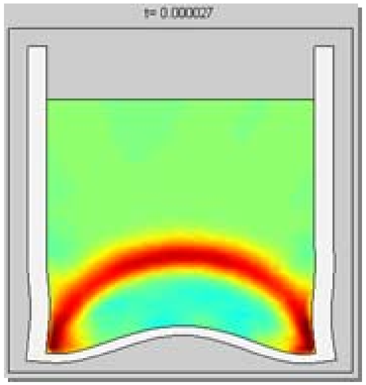
$$\varphi_j = \arg(z_j) - k_j t_0$$

Eigenschwingungen der angestoßenen Tasse



„Normale“ Simulation

bis $t = T_{\text{Pulse}}$



Entwicklung in Eigenschwingungen

$$\mathbf{u} = \sum_n \alpha_n \, \mathbf{u}_n \, \sin(k_n t + \varphi_n)$$

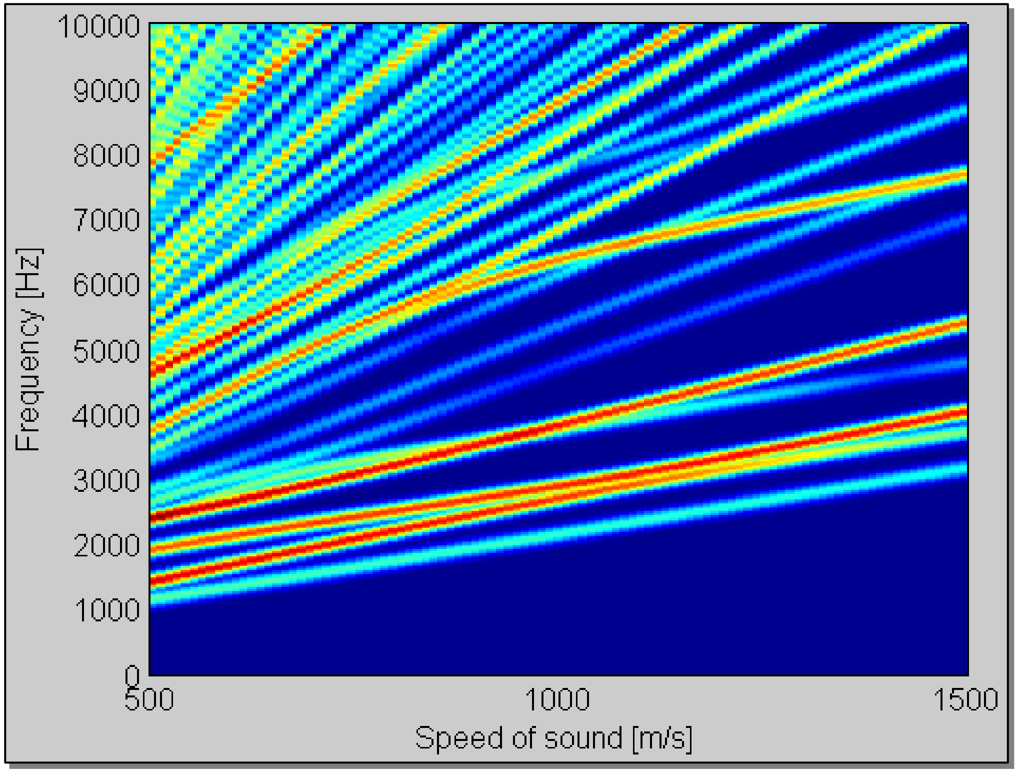
Hörbarer Ton

$$s(t) = \sum_n \alpha_n \sin(k_n t + \varphi_n)$$

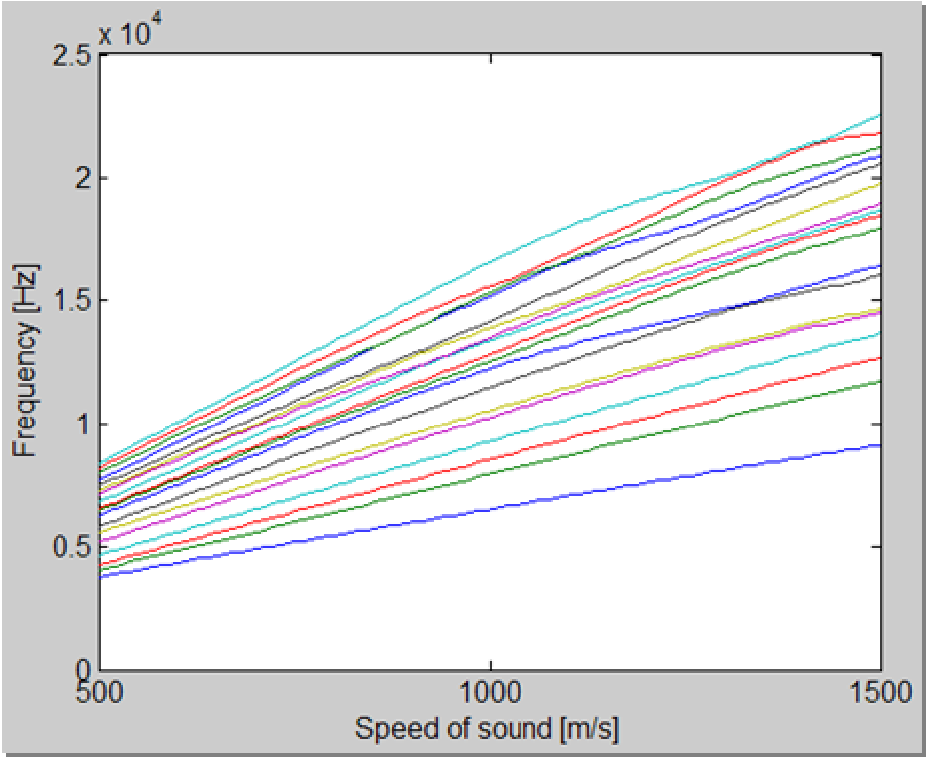
Frequenzspektrum

$$(k_n, \alpha_n)$$

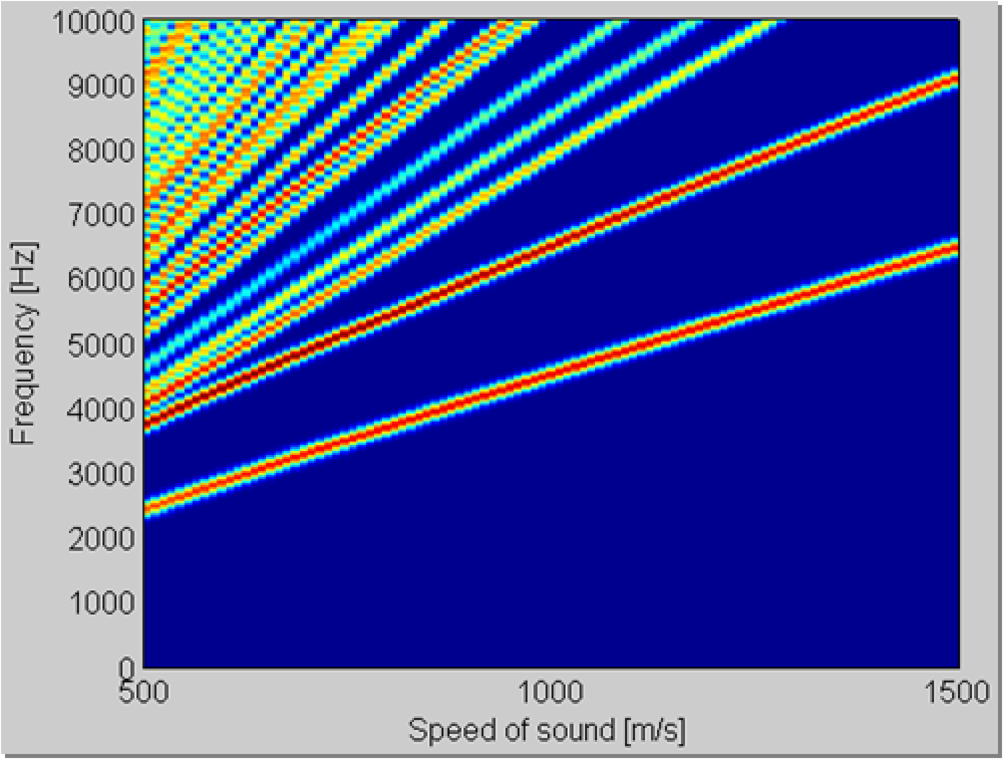
Frequenzspektrum in Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit



Eigenfrequenzen in Zylinderkoordinaten



Frequenzspektrum in Zylinderkoordinaten



Zusammenfassung

- Vermutung zur Entstehung des Kaffeetasseneffekts
  - Variationen der Schallgeschwindigkeit innerhalb der Flüssigkeit durch aufsteigende Blasen etc.
- Modellierung von Tasse und Flüssigkeit durch lineare Elastizitätsgleichungen
- Abhängigkeit der Eigenfrequenzen von der Schallgeschwindigkeit
  - Hohe Schallgeschwindigkeit → hohe Eigenfrequenzen
- Kaffeetasseneffekt qualitativ erklärt