UNIVERSITÄT **Zentrum für Technomathematik**

BREMEN Fachbereich 3 – Mathematik und Informatik

Zur makroskopischen Modellierung von spannungsabhängigem Umwandlungsverhalten und Umwandlungsplastizität bei Stählen und ihrer experimentellen Untersuchung in einfachen Versuchen

Michael Wolff **Michael Böhm**
Serguei Dachkovski **Günther Löwisch**

Report 03-06

Berichte aus der Technomathematik

Report 03-06 **Juli 2003**

Zur makroskopischen Modellierung von spannungsabhängigem Umwandlungsverhalten und Umwandlungsplastizität bei Stählen und ihrer experimentellen Untersuchung in einfachen Versuchen

M. Wolff [1)], M. Böhm [1)], S. Dachkovski [1)], G. Löwisch [2)]

Zusammenfassung: Spannungsabhängiges Umwandlungsverhalten (SUV) und Umwandlungsplastizität (UP) bei Stählen können eine Quelle von Verzug bei Bauteilen sein. Ein detailliertes Verständnis dieser beiden Phänomene ist daher von großer Wichtigkeit. Ihre Untersuchung und Modellierung ist intensiver Forschungsgegenstand. Ziel dieser Arbeit ist es, aus makroskopischen Ansätzen zur Modellierung von SUV und UP Formeln zur Auswertung von Zug-, Druck- und Torsionsversuchen von sich umwandelnden Stahlproben abzuleiten und Schlussfolgerungen für durchzuführende Experimente zu erörtern.

Diese Arbeit entstand mit teilweiser Unterstützung durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft in Rahmen des Sonderforschungsbereiches 570 „Distortion Engineering“. Die Autoren danken den Kollegen Dr. M. Hunkel und Dr. T. Lübben vom Institut für Werkstofftechnik (IWT) Bremen für die fruchtbaren Diskussionen zum Thema.

Abstract: Stress-dependent phase transformations (SDPT) and transformation-induced plasticity (TRIP) of steels may be a reason for distortion of workpieces. Therefore a deep knowledge of this both phenomena is of great importance. Their investigation and modelling are an intensive field of research. It is the aim of this work to derive formulas of SDPT and TRIP for analysis of tensile, pressure and torsional tests starting from a macroscopic approach. Based on this we want to discus consequences for experiments.

This work has been partielly supported by the Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) via the Collaborative Research Centre SFB 570 „Distortion Engineering“. The authors are indebted to their collegues Dr. M. Hunkel and Dr. T. Lübben for fruitful discussions on the matter.

Inhalt:

1. Einführung

2. Vorbereitungen – kontinuumsmechanische Grundlagen

3. Spannungsabhängiges Umwandlungsverhalten und Umwandlungsplastizität

4. Einachsiger Zug- und Druck

4.1. Versuche mit konstanter Temperatur und Last

4.2. Versuche mit variabler Temperatur und Last

5. Umwandlungen unter isotropem Druck

6. Torsion einer dünnen Hohlprobe

7. Überlagerungen von einfachen Versuchen

7.1. Überlagerung von einachsiger Spannung und isotropem Druck

7.2. Überlagerung von einachsiger Spannung und Torsion

Appendix: Zur Berechnung der Phasendichten als Funktionen der Temperatur

[1)] Zentrum für Technomathematik, FB 3, Universität Bremen
[2)] Institut für Werkstofftechnik (IWT) Bremen

1. Einführung

Die Modellierung des thermischen, mechanischen und Umwandlungsverhaltens von Stahl ist für kompliziertere Prozesse der Wärmebehandlung und der mechanischen Bearbeitung noch nicht zu einem relativen Abschluß gelangt. Zum einen wird das Umwandlungsverhalten im nicht-isothermem Fall ohne äußere Belastung weiterhin intensiv untersucht (vgl. z.B. [Hun99], [Böh02, 03a], [Sur03], [Mio03]), zum anderen werden die Effekte der Umwandlungsplastizität (abgekürzt UP) und des spannungsabhängigen Umwandlungsverhaltens (abgekürzt SUV) studiert (vgl. die im Punkt 3 angegebenen Quellen). Die letzteren Fragestellungen benötigen Experimente, bei denen das isotherme und nicht-isotherme Umwandlungsverhalten unter Zug-, Druck- und / oder Torsionsbelastung stattfindet (vgl. [Ahr02] zur Notwendigkeit der Entwicklung und Durchführung derartiger Experimente). Gegenüber den normalen Dilatometerversuchen muss hierbei auch die Querdehnung bzw. die Verdrehung der Probe gemessen werden.

Die vorliegende Arbeit möchte einige vorhandene makroskopische Modelle referieren und aus ihnen Formeln ableiten, die eine Auswertung derartiger Experimente ermöglichen. In Auswertung konkreter Versuchsdaten – was in dieser Arbeit nicht vorgesehen ist – können dann wichtige Rückschlüsse auf die zugrunde liegenden Ansätze (zumindest für die betrachtete Situation und Stahlsorte) gezogen werden und ggf. Modifikationen der Modelle gefunden werden. Insofern versteht sich unsere Arbeit auch als Beitrag zur Modellierung von SUV und UP. Zum generellen Problem des Verzugs und des Verzugspotentials bei Stahlbauteilen sei auf [Hof02] verwiesen.

Wir bemerken, dass in dieser Arbeit nicht auf die physikalische Natur von Phasenumwandlungen, SUV und UP eingegangen wird. Hierzu sei auf [Bur65], [Gre65], [Mag66], [Chr75], [Mit87], [Leb89a, 89b], [Mac92], [Dah93], [Bes93], [Fis96, 00], [Obe99], [Ron00], [Pie00a], [Vog01], [Mit02] verwiesen.

Dieser Artikel ist in gewissem Sinne eine Fortführung unserer Arbeit [Wol03a], in der für den Dilatometerversuch – besonders bei der nicht-isothermen Umwandlung – die Formeln zur Berechnung des Volumen- und Massenanteils der sich bildenden Phase aus den kontinuumsmechanischen Grundlagen hergeleitet wurden. Es wurde dabei gezeigt, dass die maximale Differenz zwischen Massenanteilen (Massenbrüchen) und Volumenanteilen der einzelnen Phasen im Stahl kleiner als 0,005 ist. Dabei tritt der größte Unterschied etwa nach der Hälfte der Umwandlung auf, zu Beginn und Ende der Umwandlung verschwinden die Unterschiede. Diese theoretisch

begründete Aussage wurde anhand von Dilatometerdaten für den Stahl 100Cr6 in [Wol03d] bestätigt. Der Grund dafür liegt darin, dass sich die Dichten der Phasen beim Stahl nicht allzu sehr voneinander unterscheiden, obwohl diese Unterschiede eine Quelle des Verzugs, also unerwünschter Maß- und Formänderungen von Bauteilen, sein können. Somit ist in vielen Fällen bei Stahl eine Unterscheidung zwischen Massen- und Volumenanteilen nicht nötig. In der Werkstofftechnik wird bevorzugt mit Volumenanteilen gearbeitet, ebenso werden die Umwandlungsgleichungen für die Phasen in Volumenanteilen formuliert. Bei theoretischen Untersuchungen haben die Massenanteile jedoch den Vorteil, weder von der Temperatur noch von den Verzerrungen abhängig zu sein und zu einfachere Formeln zu führen (vgl. [Wol03a] für Einzelheiten).

In dieser Arbeit setzen wir für die Proben während der Versuche Homogenität (d.h., Ortsunabhängigkeit) der Spannungen, der Verzerrungen, der Temperatur und der Phasenanteile voraus. Für Dilatometerversuche mit kleinen zylindrischen Hohl- oder Vollproben ist diese Homogenität in meist hinreichender Genauigkeit gegeben. Bei Versuchen unter Belastung können in Abhängigkeit von der Probengröße und der Konstruktion der Maschinen wesentliche Abweichungen von der Homogenität auftreten. Gegebenenfalls ist bei der Modellierung diese Inhomogenität zu berücksichtigen. In dieser Arbeit wollen wir aber stets Homogenität der Proben annehmen. Bei Torsionsversuchen werden dünne Hohlproben untersucht und eine Homogenität der Vergleichsspannung angenommen.

Abschließend bemerken wir, dass die vorhandenen Modelle es gestatten, mit Hilfe der sogenannten einfachen Versuche (einachsiger Zug und Druck, Torsion usw.) die Effekte des SUV und der UP getrennt und in Abhängigkeit von den Invarianten des Spannungstensors zu untersuchen.

Verwendete Abkürzungen:

Symbole werden im Text bei ihrem ersten Erscheinen erklärt, wobei wir bestrebt sind, Standardbezeichnungen zu verwenden. Um Doppelbelegungen von einzelnen Symbolen zu vermeiden, ist das nicht immer möglich.

Einige häufig vorkommende Wortgruppen werden wie folgt abgekürzt:

SUV – spannungsabhängiges Umwandlungsverhalten,

UP – Umwandlungsplastizität,

JMA-DG – Johnson-Mehl-Avrami-Differentialgleichung.

2. Vorbereitungen – kontinuumsmechanische Grundlagen

Es sollen hier nur die für das Verständnis des Folgenden notwendigen Dinge aufgeführt werden. Für eine ausführlichere Darlegung der kontinuumsmechanischen Grundlagen, auf denen die Berechnungen für die Experimente an kleinen zylindrischen Proben beruhen, verweisen wir auf die schon zitierte Arbeit [Wol03a].

Zum einen betrachten wir Stahl als Festkörper. Im quasi-statischen Fall und ohne äußere Kräfte lautet die Bewegungsgleichung

$$(2.1) \qquad -\operatorname{div}\sigma = 0 \qquad \text{in } \Omega.$$

Dabei sind σ der (Cauchysche) Spannungstensor, Ω die Referenzkonfiguration des Körpers (bei uns z.B. die zylindrische Probe in Ausgangslage). Zur Gleichung (2.1) sind entsprechende Randbedingungen hinzuzufügen.

Zum anderen betrachten wir Stahl als koexistierende Mischung aus $n \geq 2$ Komponenten, die in der Werkstofftechnik gewöhnlich als Phasen bezeichneten werden, wie z.B. Austenit, Perlit, Martensit. Dabei wird eine Diffusion der Phasen untereinander ausgeschlossen. Die Diffusion des Kohlenstoffs wird in den von uns verwendeten Modellen nicht explizit aufgeführt.

Wie üblich werden die Volumenanteile p_i sowie die Massenanteile (auch Massenbrüche genannt) χ_i ($i = 1, ..., n$) der einzelnen Komponenten (Phasen) für jeden Raum- und Zeitpunkt definiert (s. z.B. [Wol03a]).

Bekanntlich gelten dann die folgende Bilanzen (in allen Punkten und zu allen Zeiten)

$$(2.2) \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} \chi_i = 1; \qquad \forall\, i = 1, ..., n : \qquad p_i \geq 0,\ \chi_i \geq 0.$$

und der Zusammenhang zwischen Massen- und Volumenanteilen

$$(2.3) \qquad \chi_i = \frac{\rho_i}{\rho}\, p_i,$$

sowie die Mischungsregeln für die Dichte und die reziproke Dichte

$$(2.4) \qquad \rho = \sum_{i=1}^{n} \rho_i\, p_i,$$

$$(2.5) \qquad \frac{1}{\rho} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\rho_i}\, \chi_i.$$

Wir wählen folgenden Zusammenhang zwischen Spannungen und (linearisierten) Verzerrungen, der neben der isotropen linearen Thermoelastizität die Änderungen der Dichte berücksichtigt:

(2.6) $$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}(\sigma)\,\delta_{ij} + \frac{1}{3}\frac{\rho_0 - \rho(\theta)}{\rho(\theta)}\,\delta_{ij}.$$

Der letzte Term in (2.6) berücksichtigt die thermischen und die durch Dichteänderungen infolge von Umwandlungen auftretenden Verzerrungen. Dabei ist ε der linearisierte Verzerrungstensor, ρ_0 die Dichte der Referenzkonfiguration (also bezogen auf die Referenz- oder Starttemperatur θ_0) und $\rho(\theta)$ ist die Dichte des aktuellen Phasengemischs (strenggenommen bezogen auf den spannungsfreien Zustand). E und ν sind entsprechend Young-Modul und Poisson-Zahl (i. a. temperatur- und phasenabhängig), δ ist der Einheitstensor. Die Formel (2.6) gilt unter der Annahme, dass die Referenzkonfiguration spannungsfrei ist. Die Formel (2.6) beinhaltet im letzten Term eine Linearisierung, d.h., es wurde die folgende Näherung

(2.7) $$\sqrt[3]{1 + \frac{\rho_0 - \rho}{\rho}} - 1 = \frac{1}{3}\frac{\rho_0 - \rho}{\rho}$$

benutzt (vgl. [Wol03a] für eine ausführliche Herleitung). Da sich die Dichten der Phasen beim Stahl nicht stark ändern, (2.7) also gerechtfertigt erscheint, wollen wir mit der Linearisierung der Wurzel wie in (2.6) weiterarbeiten.

Manchmal kann es nützlich sein, den letzten Term in (2.6) aufzuspalten in thermische und Umwandlungsverzerrungen, welche nur durch die durch Phasenumwandlungen hervorgerufenen Dichteänderungen erzeugt werden. Dann gilt

(2.8) $$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}(\sigma)\,\delta_{ij} + \alpha\,(\theta - \theta_0)\,\delta_{ij} + \frac{1}{3}\frac{\rho_0 - \rho(\theta_0)}{\rho(\theta_0)}\,\delta_{ij}.$$

Unter $\rho(\theta_0)$ ist jetzt die Dichte des aktuellen Phasengemischs, aber bezogen auf die Referenztemperatur θ_0, zu verstehen, und α ist der (mittlere lineare) Wärmeausdehungskoeffizient bezüglich θ_0. (Genaugenommen sind $\rho(\theta_0)$ und α auch auf den spannungsfreien Referenzzustand zu beziehen.) Für Materialien ohne Mischungskomponenten (Phasen) fällt der letzte Term in (2.8) weg, und man erhält die klassischen Duhamel-Neumann-Beziehungen der linearen Thermoelastizität.

Durch Auflösen der Gleichungen (2.6) und (2.8) nach σ erhalten wir

(2.9) $$\sigma = 2\mu\,\varepsilon + \lambda(\mathrm{tr}\,\varepsilon)\,\delta - K\frac{\rho_0 - \rho(\theta)}{\rho(\theta)}\,\delta,$$

(2.10) $$\sigma = 2\mu\,\varepsilon + \lambda(\mathrm{tr}\,\varepsilon)\,\delta - 3K\alpha\,(\theta - \theta_0)\,\delta - K\frac{\rho_0 - \rho(\theta_0)}{\rho(\theta_0)}\,\delta$$

mit den Lamé-Koeffizienten λ und μ (= G – Schubmodul), sowie dem Kompressionsmodul K gemäß

$$(2.11) \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \qquad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}.$$

Wir haben die Möglichkeit, den letzten Term in (2.6), (2.8) bis (2.10) entweder mittels (2.4) durch die Volumenanteile oder mittels (2.5) durch die Massenanteile auszudrücken. Jede einzelne Phase kann ihre individuellen, temperaturabhängigen Materialparameter (z.B. E, ν, α) besitzen. Gegebenenfalls sind für die Gesamtgrößen Mischungsregeln zu verwenden. Es gilt offenbar gemäß der Formel (2.5)

$$(2.12) \qquad \frac{\rho_0 - \rho(\theta)}{\rho(\theta)} = \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\rho_i(\theta)} \chi_i \Big) \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\rho_i(\theta_0)} \chi_{0i} \Big)^{-1} - 1,$$

wobei χ_{0i} die Anfangsmassenanteile sind. Analog zu (2.12) erhalten wir mittels (2.4) die Darstellung mittels Volumenanteilen zu

$$(2.13) \qquad \frac{\rho_0 - \rho(\theta)}{\rho(\theta)} = \Big(\sum_{i=1}^{n} \rho_i(\theta_0)\, p_{0i}(\theta) \Big) \Big(\sum_{i=1}^{n} \rho_i(\theta)\, p_i(\theta) \Big)^{-1} - 1,$$

wobei p_{0i} die Anfangsvolumenanteile sind. Die Beziehungen (2.2) werden für die Anfangswerte der Massen- bzw. Volumenanteile vorausgesetzt.

Wegen (2.2) läßt sich der Massenanteil der ersten Phase durch die der anderen Phasen ausdrücken zu

$$(2.14) \qquad \chi_1 = 1 - \sum_{i=2}^{n} \chi_i,$$

und wir können (2.12) umschreiben zu

$$(2.15) \qquad \frac{\rho_0 - \rho(\theta)}{\rho(\theta)} = \Big\{ \frac{1}{\rho_1(\theta)} - \frac{1}{\rho_1(\theta_0)} + \sum_{i=2}^{n} \Big(\frac{1}{\rho_i(\theta)} - \frac{1}{\rho_1(\theta)} \Big) \chi_i - \sum_{i=2}^{n} \Big(\frac{1}{\rho_i(\theta_0)} - \frac{1}{\rho_1(\theta_0)} \Big) \chi_{0i} \Big\} \cdot$$

$$\cdot \Big\{ \frac{1}{\rho_1(\theta_0)} + \sum_{i=2}^{n} \Big(\frac{1}{\rho_i(\theta_0)} - \frac{1}{\rho_1(\theta_0)} \Big) \chi_{0i} \Big\}^{-1}.$$

3. Spannungsabhängiges Umwandlungsverhalten und Umwandlungsplastizität

Bei Phasenumwandlungen unter mechanischen Belastungen treten beim Stahl zwei wichtige Phänomene auf. Zum einen wird die Kinetik der Umwandlungen von den anliegenden Spannungen beeinflusst. Experimente zeigen z.B., dass einachsige Spannungen (sowohl Zug- als auch Druckspannungen) die Umwandlungen beschleunigen (vgl. z.B. die Übersichtsartikel [Den97a, 02], [Gau97] und die dort

zitierten Quellen, sowie [Ino85], [Sjö85, 94], [Den87], [Ahr00, 02], [Mai02], [Shi03], [Liu98]). Dieser Effekt wird spannungsabhängiges Umwandlungsverhalten (SUV) genannt.

Desweiteren wird beobachtet, dass beim Anliegen von deviatorischen Spannungen – weit unterhalb der Fließgrenze - während der Phasenumwandlungen bleibende Verformungen stattfinden, die weder mit der klassischen Plastizität noch mit den üblichen Verformungen infolge Dichte- und Temperaturänderungen (s. (2.8)) zu erklären sind. Dieses Phänomen wird Umwandlungsplastizität (UP oder TRIP = transfomation-induced plasticity) genannt (vgl. hierzu z.B. [Mit87], [Gau87], [Leb89a, 89b], [Fis96, 00], [Den97a, 02], [Ahr00, 02], [Bes93], [Obe99], [Pie00a], [Vog01]). Wie die klassische Plastizität ist die UP volumenerhaltend.

Die allgemeine Modellierung dieser beiden Erscheinungen ist noch nicht zu einem relativen Abschluß gekommen und somit Gegenstand intensiver Untersuchungen. Wir wenden uns zuerst der Beschreibung der UP zu, der kein bestimmtes Modell für die Phasentransformationen zugrunde liegt.

Bei der Bildung einer Phase wurde folgender Zusammenhang vorgeschlagen (vgl. [Gre65], [Mit87], [Leb89a], [Bes93], [Fis96], [Obe99], [Pie00a]), der auch als Modell von Mitter / Leblond bezeichnet wird,

$$\frac{d}{dt}\varepsilon_{TRIP} = \frac{3}{2}\kappa\,\sigma^*\,\Phi'(p)\,p', \tag{3.1}$$

wobei ε_{TRIP} ein durch die UP hervorgerufener zusätzlicher (linearisierter) Verzerrungstensor ist. Weiter sind σ^* der Deviator des Cauchyschen Spannungstensors σ gemäß

$$\sigma^* := \sigma - \frac{1}{3}\,tr(\sigma)\,\delta, \tag{3.2}$$

p der Volumenanteil der sich bildenden Phase, κ ein Materialparameter („Greenwood-Johnson-Parameter“) und Φ eine monotone Funktion („Sättigungsfunktion“) auf $[0, 1]$ mit $\Phi(0) = 0$ und $\Phi(1) = 1$. Mit Φ' sei die Ableitung von Φ, mit p' die Zeitableitung von p bezeichnet.

Für die Funktion Φ werden von den einzelnen Autoren verschiedene Varianten vorgeschlagen (s. [Fis96] mit einer Auflistung und den genauen Quellen), so z.B.

$$\Phi(p) := \frac{p}{k-1}(k - p^{k-1}), \qquad k \geq 2,\ DT, MT \qquad \text{(Sjöström)}, \tag{3.3}$$

$$\Phi(p) := p(3 - 2p^{\frac{1}{2}}), \qquad MT, \qquad \text{(Abrassart)},$$

$\Phi(p) := p\,(1 - \ln(p))$	DT, MT,	(Leblond),
$\Phi(p) := p$	DT, MT,	(Tanaka),
$\Phi(p) := p\,(2 - p)$		(Denis),
$\Phi(p) := \ln(1 + \frac{p}{\alpha})^2$	für $0 \le p \le \alpha$,	
linear	für $\alpha \le p \le 1$, DT,	(Fischer).

Hierbei stehen DT für diffusionsgesteuerte, MT für martensitische Umwandlung. Die Modelle von Abrassart und Denis sind Spezialfälle des von Sjöström. Bis auf die von Tanaka vorgeschlagene Funktion sind alle anderen in (3.3) strikt konkav. Damit ist der Zusammenhang in (3.1) zwischen umwandlungsplastischer Verzerrung und wirkender deviatorischer Spannung nichtlinear und die strikte Konkavität besagt, dass die Einflüsse zu Beginn der Umwandlung (für kleine p) stärker berücksichtigt werden. Damit wird experimentellen Ergebnissen Rechnung getragen (vgl. z.B. [Gau79]).

Für martensitische Umwandlungen wurden Verallgemeinerungen vorgeschlagen (vgl. z.B. [Fis00], [Nag01]), die auch Effekte der UP beschreiben („Magee-Effekt“ [Mag66]), die bei Abwesenheit von deviatorischen Spannungen bei der martensitischen Umwandlung auftreten können. Nach [Vid96] ist das auf Greenwood / Johnson fußende Modell (3.1) der UP für die martensitische Umwandlung als erste Näherung anzusehen. Hier gibt es wesentliche offene Fragen, und eine Berücksichtigung von mikromechanischen Modellen bei der makroskopischen Modellierung erscheint ein geeigneter Weg zu sein (vgl. [Wen96], [Bru98], [Che00], [Gau00], [Den02]). In dieser Arbeit möchten wir hierauf nicht näher eingehen. So wie die Bildung des Bainits Merkmale der diffusionsgesteuerten und der martensitischen Umwandlung besitzt, so sind die Effekte des umwandlungsplastischen Verhaltens des Bainits zwischen denen der perlitischen und martensitischen Umwandlung (vgl. [Den97a], [Vea01], [Su02]).

Durch Integration folgt aus (3.1)

$$\varepsilon_{TRIP}(t) = \frac{3}{2} \int_0^t \kappa\, \sigma^*(s)\, \Phi'(p(s))\, p'(s)\, ds. \tag{3.4}$$

Dabei wurde $\varepsilon_{TRIP}(0) = 0$ benutzt. Für die Modellierung der UP mit mehr als zwei Phasen sei z.B. auf [Ino85], [Wol02a, 02b, 03c] verwiesen. Zur Modellierung der UP im Rahmen einer allgemeineren Thermoelasto-Plastizität im Kontext endlicher Deformationen sei auf die mehr theoretisch orientierten Arbeiten [Böc02], [Wol02a,

02b, 03c], [Dac02] sowie auf [Ino82, 85, 89], [Sjö85, 94], [Bes93], [Gan97], [Den97a, 97b, 02], [Obe99], [Pie00a, 00b], [Shi03] für konkrete Anwendungen und Simulationen verwiesen. Für die Berücksichtigung der chemischen Zusammensetzung, namentlich des Kohlenstoffgehaltes, bei den Effekten des SUV und der UP sei z.B. auf [Ino89], [Den97b, 99], [Fra03] verwiesen.

Wir bemerken, dass der Materialparameter κ von der Temperatur und der Spannung abhängen kann, womit er dann (für nicht-isotherme Prozesse und / oder für Prozesse mit veränderlicher Spannung) mittelbar von der Zeit abhängt.

Die Experimente zeigen, dass die Effekte der UP klein sind (etwa ein Prozent [Den97a]). Wir können daher die linearisierten Verzerrungstensoren in (3.4) und (2.6) addieren und erhalten ein Materialgesetz für eine isotrope Thermoelastizität mit Phasenumwandlungen und UP:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\,\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}(\sigma)\,\delta_{ij} + \frac{1}{3}\,\frac{\rho_0 - \rho(\theta)}{\rho(\theta)}\,\delta_{ij} + \frac{3}{2}\int_0^t \kappa\,\sigma^*(s)\,\Phi'(p(s))\,p'(s)\,ds, \tag{3.5}$$

wobei wir bei der Bezeichnung ε für den linearisierten (Gesamt-) Verzerrungstensor bleiben. Der Spannungstensor σ ist weiter durch die Formel (2.6) bzw. (2.8) bestimmt.

Die Beziehung (3.5) ist Ausgangspunkt für die Untersuchung der weiter unten angesprochenen Versuche, bei denen der Spannungstensor bekannt ist, und bei denen aus der Homogenitätsannahme über den Verzerrungstensor Aussagen über die Gesamtdehnungen der Probekörper gewonnen werden können.

Wir wenden uns nun der Beschreibung des spannungsabhängigem Umwandlungsverhaltens zu. Zuerst betrachten wir die diffusionsgesteuerte Umwandlung. Diese, so z.B. für die Umwandlung von Austenit zu Perlit, wird für isotherme Umwandlungen recht genau durch die Johnson-Mehl-Avrami-Gleichung beschrieben. Diese lautet für vollständige isotherme Umwandlungen (mit Umwandlungsbeginn bei $t = 0$)

$$p_p(t) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{\tau(\theta)}\right)^{n(\theta)}\right). \tag{3.6}$$

Hierbei sind p_p der Volumenanteil der sich bildenden Phase sowie τ, n positive Funktionen von θ. Für alle diffusionsgesteuerten Umwandlungen nehmen wir in unseren Ausführungen die Umwandlung von Austenit zu Perlit als Beispiel. Auf die Umwandlungen von Austenit zu Martensit und zu Bainit, deren SUV sich qualitativ vom vorherigen unterscheidet, gehen wir an einigen Stellen gesondert ein. Wir

setzen bei den folgenden Erörterungen voraus, dass sich die Temperaturen während der Umwandlung im Umwandlungsbereich befinden, daher verzichten wir darauf, in die Gleichungen Steuerungsschalter einzubauen (vgl. z.B. [Böh03b] für eine Übersicht über makroskopische Umwandlungsmodelle und ausführliche Darlegungen). Ebenso beschränken wir uns hier auf vollständige Umwandlungen, d.h., nach Ablauf einer hinreichend großen Zeit wird die eine Phase, hier im Beispiel Austenit, vollständig in die andere, hier Perlit, umgewandelt.

Wird (3.6) bei *konstanter* Temperatur nach t abgeleitet, so folgt die JMA-DG

(3.7) $$p_p'(t) = \left(\frac{1}{\tau(\theta)}\right)^{n(\theta)} n(\theta)\,(1 - p_p(t))\,t^{n(\theta)-1}.$$

Mit der Anfangsbedingung

(3.8) $$p_p(0) = 0$$

ist die Anfangswertaufgabe (3.7), (3.8) äquivalent zu (3.6) für *konstantes* θ. Mit Hilfe der Gleichung (3.6) läßt sich aus (3.7) eine autonome Differentialgleichung erhalten, bei der die Zeit t nicht mehr explizit auftritt:

(3.9) $$p_p'(t) = (1 - p_p(t))\,\frac{n(\theta)}{\tau(\theta)}\,[\,-\ln(1 - p_p(t))\,]^{1 - \frac{1}{n(\theta)}}.$$

Leider besitzt die Anfangswertaufgabe (3.9), (3.8) für konstantes θ neben der Lösung (3.6) auch die triviale Lösung $p_p(t) = 0$ für alle $t \geq 0$, die auch bei numerischen Verfahren erhalten wird. Bei praktischen Anwendungen wird daher statt (3.8) die Anfangsbedingung

(3.10) $$p_p(0) = 10^{-3}$$

verwendet. Wir geben trotzdem der autonomen Gleichung (3.9) den Vorzug (vgl. [Böh03b] für weitere Erörterungen).

Für nicht-isotherme Umwandlungen ist die Gleichung (3.9) zu ungenau (vgl. [Leb84], [Hun99], [Böh02, 03a]). Eine Möglichkeit (andere siehe weiter unten) der Korrektur besteht darin, die rechte Seite der Differentialgleichung (3.9) mit einem von θ und θ' abhängigen Faktor zu multiplizieren. Als solche Faktoren wurden vorgeschlagen:

(3.11) $1 + g(\theta)\theta'$ [Hun99],

$h(\theta')$ mit $h(0) = 1$ SYSWELD™ [SYS00],

wobei die Funktionen g und h aus Experimenten oder auch theoretischen Überlegungen zu bestimmen sind (vgl. [Hun99] für einen diesbezüglichen Ansatz).

Der von Hunkel et al. verwendete Faktor liefert z.B. gute Übereinstimmung für die Umwandlung von Austenit zu Perlit beim Stahl 100Cr6 oberhalb der Bainit-Bildung (vgl. [Hun99], [Böh02, 03a]) und führt zu einer modifizierten JMA-DG

$$(3.12) \qquad p_p'(t) = (1 - p_p(t)) \frac{n(\theta)}{\tau(\theta)} [- \ln(1 - p_p(t))]^{1 - \frac{1}{n(\theta)}} (1 + g(\theta)\, \theta').$$

In (3.11) müssen in beiden Fällen die Faktoren positiv sein, da eine kontinuierliche Abkühlung nicht die Richtung der Umwandlung ändert. Wie Experimente zeigen, werden die Umwandlungen von im Bauteil herrschenden Spannungen beeinflusst (vgl. [Ino85, 89], [Ahr02], [Den97, 02], [Shi03] mit weiteren Quellen). Einige der Materialparameter τ, n und g (bzw. h) müssen somit von den anliegenden Spannungen abhängen. Um dieses spannungsabhängige Umwandlungsverhalten zu modellieren, ist es möglich, jeden dieser Parameter mit einer von den Spannungen abhängigen Funktion zu multiplizieren. Eine andere Möglichkeit besteht darin, nur die JMA-DG (3.9), bzw. (3.12) für nicht-isotherme Umwandlungen, mit einem weiteren, von der Spannung abhängigen Faktor zu multiplizieren.

Wir wollen hier den zweiten einfacheren Weg beschreiten, auch um die Vorgehensweise zu verdeutlichen. Mit analogen Ansätzen lässt sich auch der erstgenannte Weg verfolgen. Der Spannungstensor σ lässt sich eindeutig zerlegen in

$$(3.13) \qquad \sigma = \sigma_m\, \delta + \sigma^* \qquad (\delta - \text{Einheitstensor})$$

mit

$$(3.14) \qquad \sigma_m := \tfrac{1}{3}\, \mathrm{tr}(\sigma) \qquad (\text{mittlere (Haupt-)Spannung})$$

und

$$(3.15) \qquad \sigma^* := \sigma - \sigma_m\, \delta \qquad (\text{Spannungs-Deviator}).$$

Aus Gründen der materiellen Objektivität darf die Abhängigkeit einer skalaren Funktion vom Spannungstensor nur über deren Invarianten erfolgen. Ein möglicher Ansatz wäre also - bei Vernachlässigung einer möglichen Abhängigkeit von der Determinante $\det \sigma$ von σ -

$$(3.16) \qquad f_s(\sigma) := \exp(a_1\, \sigma_m + a_2\, \sigma_v),$$

wobei mit

$$(3.17) \qquad \sigma_v := (\tfrac{3}{2}\, \sigma_{ij}^*\, \sigma_{ij}^*)^{\frac{1}{2}} \qquad (\text{Summenkonvention!})$$

die sogenannte Vergleichsspannung nach von Mises bezeichnet sei (vgl. z.B. [Cha00]). Wegen

(3.18) $\sigma_{ij}^* \, \sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} \, \sigma_{ij} - 3 \, \sigma_m^2$

ist σ_v eine Invariante von σ. Die Koeffizienten a_1, a_2 können von θ, σ_m, σ_v und auch von deren zeitlichen Änderungen, also von θ', σ_m', σ_v' abhängen. Genaueres müssen die Experimente erbringen. Aus (3.16) folgt

(3.19) $f_s(\sigma) > 0, \qquad f_s(0) = 1,$

was bedeutet, dass für verschwindende Spannungen (z.B. beim klassischen Dilatometerversuch ohne Belastung) keine (zusätzliche) Wirkung auftritt. Die Positivität von f_s steht in Übereinstimmung mit der Beobachtung, dass anliegende Spannungen die Umwandlung beschleunigen oder verlangsamen, aber nicht umkehren können (s. weiter unten für Einzelheiten).

Eine Berücksichtigung des Spannungseinflusses in der Art (3.16) findet sich bei verschiedenen Autoren, wobei gelegentlich nur eine Abhängigkeit von der mittleren Hauptspannung oder der Vergleichsspannung angenommen wird (vgl. z.B. [Ino85, 89], [Sjö85, 94], [Den97a], [Ron00], [Shi03])

Zusammenfassend folgt aus (3.12) und (3.16) die erweiterte JMA-DG zur Beschreibung nicht-isothermer vollständiger Umwandlungen unter Spannung

(3.20) $p_p'(t) = (1 - p_p(t)) \, \frac{n(\theta)}{\tau(\theta)} \, [- \ln(1 - p_p(t))]^{1 - \frac{1}{n(\theta)}} \, (1 + g(\theta)\theta') \, \exp(a_1 \sigma_m + a_2 \sigma_v)$

mit der Anfangsbedingung (3.10) (und einer Anfangstemperatur θ_0 unterhalb der Perlit-Starttemperatur). Dabei sind θ, σ_m und σ_v i.a. zeitabhängig. An späterer Stelle wird mit der Gleichung (3.20) bei der Untersuchung der Zug-, Druck- und Torsionsversuche weitergearbeitet.

Ein anderer Ansatz für nicht-isotherme diffusionsgesteuerte Umwandlungen wurde in [Ino85, 89] vorgeschlagen:

(3.21) $p_p'(t) = (1 - p_p(t)) \, 3 \int_0^t f_s(\sigma(s)) \, F(\theta(s)) \, (t - s)^2 \, ds.$

In [Ino85] wurde für f_s ein Ansatz verwendet, der nur die mittlere Hauptspannung berücksichtigt, nämlich

(3.22) $f_s(\sigma) := \exp(C \, \sigma_m)$

mit geeignetem C. Später wurde der Ansatz in (3.22) zu dem in (3.16) angegebenen verallgemeinert, außerdem wurde eine Abhängigkeit von der Kohlenstoffkonzentration im Austenit berücksichtigt [Ino89]. Wir bemerken, dass der Ansatz (3.21) im Gegensatz zu (3.16) die Vorgeschichte der Spannungen berücksichtigt. Es ist auch

möglich, von anderen als in (3.12) und (3.21) angeführten Modellen für die nicht-isotherme diffusionsgesteuerte Umwandlung auszugehen und den Einfluss der Spannungen zu berücksichtigen. In [Böh03b] findet sich eine größere Übersicht makroskopischer Modelle für Phasenumwandlungen.

Zu Abschluss dieses Punktes wenden wir uns dem SUV bei der martensitischen Umwandlung zu. Bei vielen Stahlsorten hängt die gebildete Martensit-Menge nur von der Temperatur ab. Nach Koistinen / Marburger [Koi59] bildet sich im spannungsfreien Zustand bei einer Temperatur θ kleiner als die Martensit-Starttemperatur θ_{m0} folgender Martensitanteil (aus angenommenen allein vorhandenem Austenit)

$$m(\theta) = 1 - \exp\left(- \frac{\theta_{m0} - \theta}{c_m} \right). \tag{3.23}$$

Dabei ist c_m ein positiver (temperatur*un*abhängiger) Materialparameter. Experimente zeigen, dass beim Vergleich verschiedener Stahlsorten dieser Parameter stark vom Kohlenstoffgehalt abhängt.

Gestützt auf Experimente wird allgemein davon ausgegangen, dass die Spannungen nur die Martensit-Starttemperatur beeinflussen. Das führt auf den Ansatz von Inoue und Wang [Ino82]

$$\theta_m(\sigma) = \theta_{m0} + a_{m1}\, \sigma_m + a_{2m}\, \sigma_v \tag{3.24}$$

mit materialabhängigen Koeffizienten a_{1m}, a_{2m} (vgl. [Den97a], [Ron00], [Shi03] für weitere Quellen).

4. Einachsiger Zug- und Druckversuch für eine zylindrische Probe

Wir betrachten eine zylindrische Probe kreisförmigen oder kreisringförmigen Querschnitts mit der Länge l und dem Durchmesser d, die längs ihrer Achse mit einer Spannung (Kraft pro Fläche) F belastet sei. In erster Näherung sei vernachlässigt, dass strenggenommen die Kraftdichte bezüglich des Querschnitts unter der Belastung zu verwenden ist. Wir vernachlässigen auch weitere äußere Kräfte, wie z.B. die Schwerkraft. In der ganzen vorliegenden Arbeit wollen wir Effekte der klassischen Plastizität ausschließen. Daher soll die anliegende Vergleichsspannung stets wesentlich unterhalb der Streckgrenze der weicheren Phase liegen.

Die folgenden Erörterungen beziehen sich - außer später bei der Torsion - gleichermaßen auf die Voll- und Hohlprobe.

Weiter sei die x_1-Achse parallel zur Zylinderachse. Dann gelten offenbar auf den beiden Seitenflächen

(4.1) $\sigma_{11} = F, \qquad \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0.$

Auf der Mantelfläche gilt

(4.2) $\sigma\, n = 0$ (n – äußere Normale an der Mantelfläche).

Da in jedem Punkt der Mantelfläche $n_1 = 0$ ist, so genügt der Spannungstensor σ mit

(4.3) $\sigma_{11} = F,$ alle anderen $\sigma_{ij} = 0$

der quasi-statischen Gleichung (2.1) und den Randbedingungen (4.1), (4.2).

Damit ist σ bekannt, und es gelten für die mittlere Hauptspannung und die von-Mises-Vergleichsspannung (vgl. (3.12), (3.15))

(4.4) $\sigma_m = \frac{1}{3} F, \qquad \sigma_v = |F|,$

(4.5) $$\sigma^* = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} F, & 0, & 0 \\ 0, & -\frac{1}{3} F, & 0 \\ 0, & 0, & -\frac{1}{3} F \end{pmatrix}.$$

Für die theoretische Erörterung betrachten wir zuerst die Situation ohne UP. Es liege also lineare isotrope Thermoelastizität mit Phasenumwandlungen vor. Aus (2.6) und (4.3) folgen dann

(4.6) $$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} F + \frac{1}{3} \frac{\rho_0 - \rho(\theta)}{\rho(\theta)},$$

(4.7) $$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \frac{-\nu}{E} F + \frac{1}{3} \frac{\rho_0 - \rho(\theta)}{\rho(\theta)}.$$

Alle anderen Komponenten von ε verschwinden. Bei angenommener Homogenität der Temperatur und der Phasenverteilung gilt dann

(4.8) $$\varepsilon_{11} = \frac{\Delta l}{l}, \qquad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \frac{\Delta d}{d}$$

Somit erhalten wir für die isotrope lineare homogene Thermoelastizität mit Phasenumwandlungen zwei Gleichungen:

(4.9) $$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} F + \frac{1}{3} \frac{\rho_0 - \rho(\theta)}{\rho(\theta)},$$

(4.10) $$\frac{\Delta d}{d} = \frac{-\nu}{E} F + \frac{1}{3} \frac{\rho_0 - \rho(\theta)}{\rho(\theta)}.$$

Hierbei dürfen F und θ von der Zeit abhängen, dabei sollten die zeitlichen Änderungen von F moderat sein, damit die Vernachlässigung des Trägheitsterms in

der Bewegungsgleichung gerechtfertigt bleibt. Außerdem nehmen wir an, dass zu Beginn die Probe spannungsfrei sei, dass also $F(0) = 0$ gelte.

Wird die Probe entlastet, also $F = 0$ gesetzt, so folgt aus (4.8), (4.9)

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta d}{d}, \tag{4.11}$$

das heißt, solange keine Effekte der UP auftreten, bewirken homogene Temperatur- und Phasenänderungen nur isotrope Dehnungen der Probe.

Wegen der auch schon bei kleineren Spannungen auftretenden UP werden die Formeln (4.9), (4.10) bei umwandelnden Proben mit wachsenden Kräften zunehmend ungenauer. Versuche zeigen, dass das spannungsabhängige Umwandlungsverhalten bei einachsigem Zug- ($F > 0$) und Druckversuch ($F < 0$) leicht unterschiedlich ist (s. weiter unten).

Im Falle $F = 0$ bewegen wir uns im Rahmen der Dilatometerversuche und die Beziehung (4.9) gestattet die Ableitung der nötigen Formeln, um für ein Zweiphasengemisch die Massen- und Volumenanteile zu berechnen (vgl. [Wol03a] für ausführliche Erörterungen).

Wir wollen jetzt die UP berücksichtigen und betrachten die Bildung einer Phase, z.B. Perlit aus Austenit gemäß unserer Verabredung, also steht jetzt $p = p_p$ für den Volumenanteil des Perlits. Aus (3.5), (4.5), (4.6) und (4.7) folgen unter Beachtung der Abhängigkeit von der Zeit t

$$\frac{\Delta l(t)}{l} = \frac{1}{E(\theta(t))} F(t) + \frac{1}{3} \frac{\rho_0 - \rho(\theta(t))}{\rho(\theta(t))} + \int_0^t \kappa F(s) \, \Phi'(p_p(s)) \, p_p'(s) \, ds, \tag{4.12}$$

$$\frac{\Delta d(t)}{d} = \frac{-\nu(\theta(t))}{E(\theta(t))} F(t) + \frac{1}{3} \frac{\rho_0 - \rho(\theta(t))}{\rho(\theta(t))} - \frac{1}{2} \int_0^t \kappa F(s) \, \Phi'(p_p(s)) \, p_p'(s) \, ds. \tag{4.13}$$

Hieraus ergibt sich leicht

$$\varepsilon_L(t) + 2 \, \varepsilon_D(t) = \gamma_F(t) + \frac{\rho_0 - \rho(\theta(t))}{\rho(\theta(t))}, \tag{4.14}$$

wobei zur Abkürzung

$$\varepsilon_L(t) := \frac{\Delta l(t)}{l}, \quad \varepsilon_D(t) := \frac{\Delta d(t)}{d}, \qquad \gamma_F(t) := \frac{1 - 2\nu(\theta(t))}{E(\theta(t))} F(t) \tag{4.15}$$

gesetzt wurde. Diese Formel (4.14) gestattet es, zuerst das spannungsabhängige Umwandlungsverhalten unabhängig von der UP zu untersuchen. Insbesondere ist an dieser Stelle keine Kenntnis des Materialparameters κ sowie der Funktion Φ nötig. (Diese Argumentation würde auch noch für etwas allgemeinere Ansätze als (3.1) bzw. (3.4) richtig sein.)

Wir bemerken, dass für die linke Seite in der Formel (4.14) näherungsweise gilt:

$$\varepsilon_V(t) := \sqrt[3]{(1 + \varepsilon_L(t))\,(1 + \varepsilon_D(t))^2} - 1 \approx \varepsilon_L(t) + 2\,\varepsilon_D(t). \tag{4.16}$$

Die linke Seite in (4.16) wird als „lineare Volumendehnung“ ε_V bezeichnet. Da die UP – wie die klassische Plastizität – volumenerhaltend ist, kann diese Größe näherungsweise zur Bestimmung des Anteils der sich bildenden Phase herangezogen werden. Wir unterstellen eine konstant wirkende Spannung, eine konstante Umwandlungstemperatur und eine vollständige Umwandlung, exemplarisch wieder von Austenit zu Perlit. Sei t_∞ die Zeit, nach der die Umwandlung als abgeschlossen gelten kann. Dann wird der Quotient

$$q_p(t) := \frac{\varepsilon_V(t)}{\varepsilon_V(t_\infty)} = \frac{\sqrt[3]{(1 + \varepsilon_L(t))\,(1 + \varepsilon_D(t))^2} - 1}{\sqrt[3]{(1 + \varepsilon_L(t_\infty))\,(1 + \varepsilon_D(t_\infty))^2} - 1} \approx \frac{\varepsilon_L(t) + 2\,\varepsilon_D(t)}{\varepsilon_L(t_\infty) + 2\,\varepsilon_D(t_\infty)} \tag{4.17}$$

als Volumenanteil des Perlits interpretiert (vgl. z.B. [Ahr00. 02]). Ist die Temperatur während der Umwandlung nicht konstant, so müssen die thermischen Volumendehnungen berücksichtigt werden. Es wird angenommen, dass die lineare Volumendehnung bei Abwesenheit von Phasenumwandlungen (und konstanter Spannung) eine temperaturabhängige, näherungsweise lineare Funktion sei. Seien $\varepsilon_V(\theta)$, $\varepsilon_{V,a}(\theta)$, $\varepsilon_{V,p}(\theta)$ die linearen Volumendehnungen für das aktuelle Phasengemisch sowie für den Austenit und den Perlit (die z.B. vor bzw. nach Ende der Umwandlung bestimmt werden können). Anstelle von (4.17) lässt sich jetzt die Größe

$$q_p(\theta) := \frac{\varepsilon_V(\theta) - \varepsilon_{V,a}(\theta)}{\varepsilon_{V,p}(\theta) - \varepsilon_{V,a}(\theta)} \tag{4.18}$$

näherungsweise als Phasenanteil des Perlits betrachten. Die Größen in (4.17) und (4.18) entsprechen dem „Umwandlungsgrad“ ([Mit92, 02]) beim Dilatometerversuch ohne äußere Belastung (vgl. hierzu [Wol03a]).

Durch Überprüfen mit konkreten Messdaten lässt sich feststellen, inwieweit die zuletzt angegebenen Näherungen gerechtfertigt sind.

Wir wollen hier allgemein von einer veränderlichen Last, d.h. Spannung, F ausgehen. Daher und aus theoretischen Überlegungen wollen wir mit der Formel (4.14) weiterarbeiten, indem wir den Term mit den Dichten auswerten.

Dazu betrachten wir ein Zweiphasenmodell (in unserer Standardsituation die Umwandlung von Austenit in Perlit). Bei der Auswertung des Terms mit den Dichten

in (4.12) bis (4.14) ist die Verwendung von Massenanteilen günstiger, da sie zu einfacheren Formeln führen (vgl. die Formeln (2.12) und (2.13) sowie [Wol03a]).

Für die spezielle Situation: $\chi_p(t) = \chi_2(t)$ – Massenanteil von Perlit, $\chi_{02} = 0$, θ_0 – Starttemperatur zu Beginn des Versuchs erhalten wir aus (2.12) (für $n = 2$)

$$(4.19) \qquad \frac{\rho_0 - \rho(\theta(t))}{\rho(\theta(t))} = \chi_p(t) \frac{\rho_a(\theta_0)}{\rho_a(\theta(t))} \frac{\rho_a(\theta(t)) - \rho_p(\theta(t))}{\rho_p(\theta(t))} + \frac{\rho_a(\theta_0)}{\rho_a(\theta(t))} - 1,$$

woraus sich aus (4.14) die Gleichung zur Bestimmung von χ_p ergibt:

$$(4.20) \qquad \varepsilon_L(t) + 2\,\varepsilon_D(t) = \gamma_F(t) + \chi_p(t) \frac{\rho_a(\theta_0)}{\rho_a(\theta(t))} \frac{\rho_a(\theta(t)) - \rho_p(\theta(t))}{\rho_p(\theta(t))} + \frac{\rho_a(\theta_0)}{\rho_a(\theta(t))} - 1.$$

An dieser Stelle eine Bemerkung im Zusammenhang mit dem Begriff „Beginn des Versuchs“. Bei der Herleitung der Formel (4.19) wurde nur verwendet, dass zum Beginn des Versuchs, also zum Zeitpunkt $t = 0$, nur eine Phase (in unserer Standardsituation also Austenit) vorliege. Die Starttemperatur $\theta_0 = \theta(0)$ kann also größer, gleich oder auch kleiner der Perlit-Starttemperatur (oft als A_{r3} bezeichnet) sein. Die Phasenumwandlung selbst muss nicht zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnen. In diesem Fall hätten wir nur thermische und elastische Dehnungen. Ein solcher Versuchsbeginn gestattet die Berechnung der Dichte des Austenits als Funktion der Temperatur (vgl. den Appendix).

Wir wollen die Gleichung (4.20) für den Fall nach χ_p umstellen, dass E und ν nur temperaturabhängig sind (bzw. dass ihre Temperaturabhängigkeit wesentlich stärker als ihre Phasenabhängigkeit ist). Aus (4.20) ergibt sich leicht

$$(4.21) \qquad \chi_p(t) = \{\, 1 + \varepsilon_L(t) + 2\,\varepsilon_D(t) - \gamma_F(t) - \frac{\rho_a(\theta_0)}{\rho_a(\theta(t))} \,\} \frac{\rho_a(\theta(t))}{\rho_a(\theta_0)} \frac{\rho_p(\theta(t))}{\rho_a(\theta(t)) - \rho_p(\theta(t))}$$

Für konstantes $\theta = \theta_0$ (isotherme Umwandlung) ergibt sich aus (4.21)

$$(4.22) \qquad \chi_p(t) = \{\varepsilon_L(t) + 2\,\varepsilon_D(t) - \gamma_F(t)\} \frac{\rho_p(\theta_0)}{\rho_a(\theta_0) - \rho_p(\theta_0)}.$$

Für isotherme vollständige Umwandlungen folgt aus (4.22) wegen der Beziehung

$$(4.23) \qquad 1 = \chi_p(t_\infty) = \{\varepsilon_L(t_\infty) + 2\,\varepsilon_D(t_\infty) - \gamma_F(t_\infty)\} \frac{\rho_p(\theta_0)}{\rho_a(\theta_0) - \rho_p(\theta_0)}$$

die leicht zu handhabende Formel zur Berechnung des Massenanteils aus den aufgenommenen Versuchsdaten

$$(4.24) \qquad \chi_p(t) = \frac{\varepsilon_L(t) + 2\,\varepsilon_D(t) - \gamma_F(t)}{\varepsilon_L(t_\infty) + 2\,\varepsilon_D(t_\infty) - \gamma_F(t_\infty)}.$$

Mit t_∞ sei wiederum die Zeit bezeichnet, bei der die Umwandlung als abgeschlossen gelten kann. Im Gegensatz zu (4.17) berücksichtigt die Formel (4.24) die anliegende

Spannung. Diese Formel ist eine Verallgemeinerung der entsprechenden Formel für den isothermen Dilatometerversuch ohne Belastung bei ebenfalls vollständiger Umwandlung. Denn für $F = 0$ folgen (4.11) und somit

$$\chi_p(t) = \frac{\varepsilon_L(t)}{\varepsilon_L(t_\infty)} \tag{4.25}$$

In diesem Falle ist der Massenanteil der sich bildenden Phase gleich dem sogenannten „Umwandlungsgrad“. Der in (4.25) stehende Quotient wird z.B. in [Mit92, 02] als Volumenanteil der sich bildenden Phase interpretiert. Nach unserer Bemerkung in der Einführung dürfen beim Stahl die Massen- und Volumenanteile näherungsweise gleich gesetzt werden (vgl. [Wol03a] für ausführliche Darlegungen und [Wol03d] für Vergleichsrechnungen). Bei einer vollständigen Umwandlung mit variabler Temperatur kann die Größe $\rho_a(\theta_0)$ aus (4.21) mittels (4.23) eliminiert werden, was zu

$$\chi_p(t) = \{\, 1 + \varepsilon_L(t) + 2\,\varepsilon_D(t) - \gamma_F(t) - \frac{\rho_p(\theta(t_\infty))}{\rho_a(\theta(t_\infty))}\,(1 + \varepsilon_L(t_\infty) + 2\,\varepsilon_D(t_\infty) - \gamma_F(t_\infty)\,)\,\} \cdot \tag{4.26}$$

$$\cdot\, \frac{\rho_a(\theta(t))\,\rho_p(\theta(t))}{\rho_a(\theta(t)) - \rho_p(\theta(t))} \cdot \frac{1}{\rho_p(\theta(t_\infty))\,(1 + \varepsilon_L(t_\infty) + 2\,\varepsilon_D(t_\infty) - \gamma_F(t_\infty))}.$$

führt. Mit Hilfe der Formeln (4.21) (bis (4.26) je nach Situation) kann der Massenanteil des Perlits zur Zeit t berechnet werden, wenn die gemessenen Werte für $\frac{\Delta l(t)}{l}$, $\frac{\Delta d(t)}{d}$, $F(t)$ sowie die Abkürzungen in (4.15) verwendet werden. Bekannt sein müssen die Dichten von Austenit und Perlit sowie E und ν als Funktionen der Temperatur. (Werden E und ν als phasenabhängig angesehen, so verläuft die Argumentation prinzipiell genauso, allerdings mit wesentlich komplizierteren Formeln.)

Die Dichten der Phasen als Funktion der Temperatur können auf der Grundlage der Formel (4.14) zu Beginn und nach abgeschlossener Umwandlung bestimmt werden (s. hierzu den Appendix).

Somit können das spannungsabhängige Umwandlungsverhalten untersucht und Modellansätze dafür getestet werden, ohne dass schon ein konkretes Modell der UP mit spezifischen Materialparametern festgelegt sein muss.

Danach können - mit bekannten, d.h. gemäß (4.21) (oder den folgenden Formeln) ermittelten Daten für $\chi_p(t)$ - die Zusammenhänge der UP untersucht, insbesondere der Greenwood-Johnson-Parameter κ in (3.4) bestimmt werden. Anschließend

können verschiedene Ansätze für die Sättigungsfunktion Φ in (3.4) (vgl. (3.3)) getestet werden. Das geschieht wie folgt:
Aus den Gleichungen (4.12), (4.13) folgt durch Subtraktion

$$\varepsilon_L(t) - \varepsilon_D(t) = \frac{1 + \nu(\theta(t))}{E(\theta(t))} F(t) + \frac{3}{2} \int_0^t \kappa F(s)\, \Phi'(p_p(s))\, p_p'(s)\, ds. \tag{4.27}$$

In (4.27) ist auch die durch F hervorgerufene rein elastische Deformation enthalten. Wird diese herausrechnet, so bleibt - im Unterschied zu (4.11) – ein umwandlungsplastischer Anteil

$$\varepsilon_{L,\,UP}(t_1) - \varepsilon_{D,UP}(t_1) = \frac{3}{2} \int_0^{t_1} \kappa F(s)\, \Phi'(p_p(s))\, p_p'(s)\, ds, \tag{4.28}$$

wobei t_1 die Zeitdauer des Versuches ist. Das heißt, der anisotrope Anteil in der Formänderung der Probe geht auf die UP zurück (vgl. hierzu auch [Ahr00, 02], [Bes93]). Die Formel (4.28) ist mit der entsprechenden in [Ahr00, 02] verträglich. Dort wird die umwandlungsplastische Dehnung in Belastungsrichtung mit

$$\varepsilon_{UP} = \frac{2}{3} (\varepsilon_{L,UP}(t_\infty) - \varepsilon_{D,UP}(t_\infty)) \tag{4.29}$$

angeben. Wegen (4.5), (4.12), (4.13) und (3.4) stimmt (4.29) mit (4.28) überein. Wir wollen jetzt für Spezialfälle weitere Schlüsse aus (4.21) und den folgenden Formeln ziehen.

4.1. Versuche unter konstanter Temperatur und Last

Wir nehmen an, dass die Last F und die Umwandlungstemperatur θ_0 während des Versuches konstant seien. Da wir den Ausgangszustand der Probe als spannungsfrei ansehen wollen, kann folgender Kompromiss getroffen werden. Nach Beginn des Versuches wird die Last von null auf den konstanten Endwert F erhöht, und zwar während einer Zeitspanne, in der die Umwandlung noch wenig angelaufen ist. Dann ist der entstehende Fehler in (4.27) sehr klein, da p' zu Beginn der Umwandlung nahe bei null liegt. Eine Alternative zu diesem Vorgehen besteht darin, von Anfang eine konstante Last anzulegen und die Längs- und Querdehnungen auf diesen nicht spannungsfreien Ausgangzustand zu beziehen und die Last nicht mehr explizit in den Formeln (z.B. in (4.21)) aufzuführen. Da die Dichten von den elastischen Dehnungen (schwach) abhängig sind, entsteht ein möglicherweise kleiner Fehler. Anhand konkreter Daten ist zu bewerten, wie groß dieser Fehler ist.

Wir wollen hier mit einem spannungsfreien Ausgangszustand arbeiten und daher den erstgenannten Weg einschlagen. Somit folgt aus (4.27) für konstantes F und θ_0 und den Eigenschaften der Funktion Φ (vgl. (3.3))

$$\varepsilon_L(t) - \varepsilon_D(t) = \frac{1 + \nu(\theta_0)}{E(\theta_0)} F + \frac{3}{2} \kappa(F, \theta_0)\, F\, \Phi(p_p(t)) \tag{4.30}$$

oder nach Abrechnung des elastischen Anteils

$$\varepsilon_{L,UP}(t) - \varepsilon_{D,UP}(t) = \frac{3}{2} \kappa(F, \theta_0)\, F\, \Phi(p_p(t)) \tag{4.31}$$

(Würde der zweitgenannte Weg – die konstante Last nicht explizit aufzuführen – gegangen, so wäre (4.30) ohne den Term mit F, also de facto (4.31), der Ausgangspunkt der weiteren Überlegungen)

Für vollständige Umwandlungen folgt wegen $\Phi(1) = 1$ aus (4.30) die Formel zur Bestimmung von κ:

$$\kappa(F, \theta_0) = \frac{2}{3F} (\varepsilon_L(t_\infty) - \varepsilon_D(t_\infty)) - \frac{2}{3} \frac{1 + \nu(\theta_0)}{E(\theta_0)} \tag{4.32}$$

bzw. aus (4.31)

$$\kappa(F, \theta_0) = \frac{2}{3F} (\varepsilon_{L,UP}(t_\infty) - \varepsilon_{D,UP}(t_\infty)) \tag{4.33}$$

Mit Hilfe von (4.32) bzw. (4.33) kann eine mögliche Abhängigkeit des Greenwood-Johnson-Parameters κ von der Last F sowie der Temperatur θ_0 untersucht werden.

In [Fis96] wird für den Stahl 42CrMo6 als Wert für κ zur Orientierung angegeben:

$$4{,}2 \cdot 10^{-11} \frac{m\, s^2}{Kg} = 4{,}2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{MPa}. \tag{4.34}$$

(In [Bes93] hat dieser Wert die gleiche Größenordnung für den 60NiCrMo103.)

Führen wir einen einachsigen Zug- und einen Druckversuch mit betragsmäßig gleicher Last F an zwei gleichen Proben durch, so erhalten wir aus (4.33)

$$\kappa(F, \theta_0) - \kappa(-F, \theta_0) = \frac{2}{3F} (\varepsilon_{L,UP}^{+}(t_\infty) - \varepsilon_{D,UP}^{+}(t_\infty) + \varepsilon_{L,UP}^{-}(t_\infty) - \varepsilon_{D,UP}^{-}(t_\infty)), \tag{4.35}$$

wobei sich die Werte mit dem Pluszeichen auf den Zug und die mit dem Minuszeichen auf den Druck beziehen. Nehmen wir in erster Näherung an, dass die Größen mit „+“ denen mit „-“ entgegengesetzt seien, so folgt aus (4.35) näherungsweise eine gerade Symmetrie von κ bezüglich der einachsigen anliegenden Spannung. Eine hieraus folgende Hypothese wäre, dass der Parameter κ von der Spannung nur über die Vergleichsspannung, in diesem Fall also gleich $|F|$, abhinge. Experimente zeigen ein merklich unterschiedliches Verhalten für Zug und Druck an

(vg. z.B. [Ahr02]), so dass κ nicht nur von der Vergleichsspannung abhängen kann. Es sind also kompliziertere Ansätze zu testen, wie etwa bei der Modellierung des SUV weiter unten. In [Fra03] wird die Abhängigkeit von κ vom Kohlenstoffgehalt des Stahls untersucht. In [Ino03] wird eine alternatives Verfahren zur Bestimmung des Parameters κ angegeben.

Nach der Bestimmung von κ ist es möglich, mit Hilfe von (4.27) verschiedene Ansätze für die Funktion Φ zu testen, da ja mit (4.21) separat der Verlauf des Massenanteils des Perlits berechnet werden kann. Wir bemerken an dieser Stelle nochmals, dass die Differenz zwischen Massen- und Volumenanteilen bei Stahl kleiner als 0,005 ist, so dass wir näherungsweise $\chi_p \approx p_p$ setzen (vgl. die Formel (2.3) für den genauen Zusammenhang). Für konstantes F ergibt sich aus (4.15)

$$\gamma_F(t) = \gamma_F(t_\infty) = \frac{1 + \nu(\theta_0)}{E(\theta_0)} F, \tag{4.36}$$

und somit aus (4.24)

$$\chi_p(t) = \frac{E(\theta_0)\,(\,\varepsilon_L(t) + 2\,\varepsilon_D(t)\,) - F\,(1 + 2\nu(\theta_0))}{E(\theta_0)\,(\,\varepsilon_L(t_\infty) + 2\,\varepsilon_D(t_\infty)\,) - F\,(1 + 2\nu(\theta_0))} \tag{4.37}$$

Aus (4.30) folgt leicht

$$\Phi(p_p(t)) = \frac{2}{3\,\kappa(F,\,\theta_0)}\,\Big(\frac{\varepsilon_L(t) - \varepsilon_D(t)}{F} - \frac{1 + \nu(\theta_0)}{E(\theta_0)}\Big). \tag{4.38}$$

Wenn wir jetzt einen konkreten Ansatz für Φ wählen, z.B. aus der Auflistung in (3.3), so erhalten wir aus (4.37)

$$\Phi(\chi_p(t)) = \Phi\Big(\frac{E(\theta_0)\,(\,\varepsilon_L(t) + 2\,\varepsilon_D(t)\,) - F\,(1 + 2\nu(\theta_0))}{E(\theta_0)\,(\,\varepsilon_L(t_\infty) + 2\,\varepsilon_D(t_\infty)\,) - F\,(1 + 2\nu(\theta_0))}\Big). \tag{4.39}$$

Jetzt kann getestet werden, unter welchen Bedingungen welches Φ die beste Übereinstimmung von (4.38) und (4.39) liefert.

Da wir in diesem Punkt den isothermen Fall (mit konstanter Last) betrachten, können wir uns auf der Grundlage der JMA-DG (3.7) nebst Anfangsbedingung (3.8) der Untersuchung des spannungsabhängigen Umwandlungsverhaltens widmen. Für den (einachsigen) Zug- bzw. Druckversuch folgen aus (3.16) und (4.4)

$$f_s(\sigma) = \exp(\tfrac{1}{3}\,a_1\,F + a_2\,|F|). \tag{4.40}$$

Nach den Experimenten (vgl. z.B. [Ahr00, 02]) bewirken sowohl (einachsiger) Druck als auch (einachsiger) Zug eine Beschleunigung der Umwandlung. Die Unterschiede sind nicht sehr groß, aber bei Zug verläuft die Umwandlung schneller als bei Druck.

Damit der Wert der Exponentialfunktion in (4.40) in beiden Fällen größer als eins ist, muss

(4.41) $$a_2 > \frac{1}{3} a_1 > 0$$

gelten. Damit ist bei einachsigem Druck ($F < 0$) der Wert $f_s(\sigma)$ in der Tat kleiner als bei einachsigem Zug ($F > 0$) gleichen Betrages. Bei konstantem F setzen wir vollständige Umwandlung voraus, also folgt aus (3.7) und (4.40)

(4.42) $$p_p'(t) = (1 - p_p(t)) \left(\frac{1}{\tau(\theta_0)}\right)^{n(\theta_0)} n(\theta_0)\, t^{n(\theta_0) - 1} \exp\left(a_1 \frac{1}{3} F + a_2 |F|\right).$$

Für die Anfangsbedingung $p(0) = 0$ ist die Lösung von (4.42) offenbar

(4.43) $$p_p(t) = 1 - \exp\left(- \left(\frac{1}{\tau(\theta_0)}\right)^{n(\theta_0)} \exp\left(a_1 \frac{1}{3} F + a_2 |F|\right) \right).$$

Die Umwandlungskurve wird also schneller durchlaufen, was mit den Experimenten übereinstimmt ([Ahr00, 02], [Den97a]). Ein Umstellen der Gleichung (4.43) ergibt

(4.44) $$a_1 \frac{1}{3} F + a_2 |F| = \ln \left\{- \left(\frac{1}{\tau(\theta_0)}\right)^{-n(\theta_0)} \ln(1 - p_p(t)) \right\}.$$

Aus dem Ansatz „Korrektur von JMA (3.7) mit spannungsabhängigen Faktor“ folgt, dass für konstante Temperatur und Spannung der Ausdruck unter dem Logarithmus bezüglich der Zeit konstant sein muss. Wird das nicht durch die gemessenen Werte in hinreichender Genauigkeit bestätigt, so ist dieser Ansatz zu ungenau. Er ist gleichbedeutend mit der Annahme, dass τ, nicht jedoch n von den Spannungen abhängt, was z.B. in [Den87, 97] zu finden ist..

Wird (4.44) für $F > 0$ (Zug) und $F < 0$ (Druck) betrachtet, so erhalten wir

(4.45) $$a_1 = \frac{3}{2\,|F|} \frac{1}{n(\theta_0)} \left\{\ln\left\{- \left(\frac{1}{\tau(\theta_0)}\right)^{-n(\theta_0)} \ln(1 - p_p(t))\right\}_{Zug} - \ln\left\{- \left(\frac{1}{\tau(\theta_0)}\right)^{-n(\theta_0)} \ln(1 - p_p(t)) \right\}_{Druck} \right\},$$

(4.46) $$a_2 = \frac{1}{2\,|F|} \frac{1}{n(\theta_0)} \left\{\ln\left\{- \left(\frac{1}{\tau(\theta_0)}\right)^{-n(\theta_0)} \ln(1 - p_p(t))\right\}_{Zug} + \ln\left\{- \left(\frac{1}{\tau(\theta_0)}\right)^{-n(\theta_0)} \ln(1 - p_p(t)) \right\}_{Druck} \right\}$$

zur Berechnung von a_1 und a_2. Wir können die Formel (4.44) vereinfachen, indem wir die Formel (4.37) benutzen, um $\chi_p(t) \approx p_p(t)$ zu berechnen. Damit ergeben sich

(4.47) $$a_1 \frac{1}{3} F + a_2 |F| = \ln \left\{- \left(\frac{t}{\tau(\theta_0)} \right)^{-n(\theta_0)} \ln\left(1 - \frac{E(\theta_0)\,(\varepsilon_L(t) + 2\, \varepsilon_D(t)) - F\,(1 + 2\nu(\theta))}{E(\theta_0)\,(\varepsilon_L(t_\infty) + 2\, \varepsilon_D(t_\infty)) - F\,(1 + 2\nu(\theta))} \right) \right\}$$

sowie analog zu (4.45), (4.46) Formeln zur Bestimmung von a_1 und a_2 in Abhängigkeit von θ_0 und F.

4.2. Versuche unter variabler Temperatur und Last

Bei Umwandlungen unter variabler Temperatur und Last gehen wir vom Ansatz für eine modifizierte JMA-DG (3.20) (für diffusionsgesteuerte Umwandlungen) sowie von der Formel (4.21) für die Berechnung des Massenanteils (≈ Volumenanteil) anhand der aufgenommenen Versuchsdaten aus. Die Last sollte sich nicht zu schnell ändern, damit wir es nicht mit Schwingungen zu tun bekommen. In diesem Falle wäre die Annahme einer quasi-statischen Gleichung (2.1) nicht mehr gerechtfertigt.

Für den Fall einer *konstanten* Umwandlungstemperatur und einer variablen Last können wir (im Falle vollständiger Umwandlungen) statt mit (4.21) mit der Gleichung (4.23) die Massenanteile (≈ Volumenanteile) des Perlits aus den Versuchsdaten berechnen.

Wir wenden uns zuerst der UP zu. Wir gehen dabei zuerst von der Arbeitshypothese aus, dass im Falle konstanter Temperatur θ_0 die Funktion κ nur von F selbst, nicht jedoch von F' abhängt, also $\kappa = \kappa(F, \theta_0)$. Das heißt, wir verwenden die Gleichung (4.27) und gelangen zum Ansatz:

$$(4.48) \qquad \varepsilon_L(t) - \varepsilon_D(t) = \frac{1 + \nu(\theta_0)}{E(\theta_0)} F(t) + \frac{3}{2} \int_0^t \kappa(F(s), \theta_0)\, F(s)\, \Phi'(p_p(s))\, p_p'(s)\, ds.$$

Wir wollen zeigen, wie in diesem Fall das Modell, genauer die Arbeitshypothese, getestet werden kann. Wir gehen von der Zerlegung des Zeitintervalls $[0, t_\infty]$ aus, wobei wiederum t_∞ so groß zu wählen ist, dass die Umwandlung als abgeschlossen gelten kann. Sei also

$$(4.49) \qquad 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = t_\infty.$$

Wegen der Versuchsanordnung gilt dann

$$(4.50) \qquad \varepsilon_L(t_0) = \varepsilon_D(t_0) = F(t_0) = p_p(t_0) = 0.$$

Aus (4.48) folgen die sukzessive zu lösenden Diskretisierungsgleichungen:

$$(4.51) \qquad \varepsilon_L(t_i) - \varepsilon_D(t_i) = \frac{1 + \nu(\theta_0)}{E(\theta_0)} F(t_i) + \frac{3}{2} \int_0^{t_i} \kappa(F(s), \theta_0)\, F(s)\, \Phi'(p_p(s))\, p_p'(s)\, ds$$

für $i = 1, \ldots, N$.

Als nächstes wählen wir die Funktion Φ, die im Falle konstanter Temperatur und Last die besten Ergebnisse lieferte (s. Punkt 4.1).

Das Integral J_i in (4.51) lässt sich näherungsweise wie folgt berechnen:

(4.52) $$J_i = \sum_{j=1}^{i} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \kappa(F(s), \theta_0)\, F(s)\, \Phi'(p_p(s)) \frac{p_p(t_j) - p_p(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}}\, ds \qquad \text{für } i = 1, ..., N.$$

Der noch von s abhängige Teil des Integranden kann z.B. durch sein arithmetisches Mittel über dem Intervall $[t_{j-1}, t_j]$ ersetzt werden. Das ergibt dann für $i = 1, ..., N$

(4.53) $$\varepsilon_L(t_i) - \varepsilon_D(t_i) = \frac{1 + \nu(\theta_0)}{E(\theta_0)} F(t_i) +$$

$$+ \frac{3}{4} \sum_{j=1}^{i} \{\kappa(F(t_j), \theta_0)\, F(t_j)\, \Phi'(p_p(t_j)) + \kappa(F(t_{j-1}), \theta_0)\, F(t_{j-1})\, \Phi'(p_p(t_{j-1}))\}\, (p_p(t_j) - p_p(t_{j-1}))$$

Aus den Gleichungen in (4.53) lassen sich sukzessive die Werte $p_p(t_i)$ für $i = 1, ..., N$ berechnen. Falls das Modell der UP, insbesondere die Wahl von Φ, und die getroffene Arbeitshypothese gut sind, dann dürfen die so berechneten Werte der Volumenanteile nicht allzusehr von denen nach Formel (4.24) berechneten abweichen.

Wir wenden uns nun dem SUV zu. Da wir zuerst den isothermen Fall betrachten, können wir als Arbeitshypothese die Umwandlungsgleichung (4.42) mit variablem F annehmen, also gilt

(4.54) $$p_p'(t) = (1 - p_p(t)) \left(\frac{1}{\tau(\theta_0)}\right)^{n(\theta_0)} n(\theta_0)\, t^{n(\theta_0) - 1} \exp\left(a_1(\theta_0) \frac{1}{3} F(t) + a_2(\theta_0) |F(t)| \right).$$

Zur Anfangsbedingung $p_p(0) = 0$ besitzt (4.54) die einzige Lösung

(4.55) $$p_p(t) = \int_0^t \left(\frac{1}{\tau(\theta_0)}\right)^{n(\theta_0)} n(\theta_0)\, s^{n(\theta_0) - 1} \exp\left(a_1(\theta_0) \frac{1}{3} F(s) + a_2(\theta_0) |F(s)| \right) \cdot$$

$$\cdot \exp\left(\int_r^t \left(\frac{1}{\tau(\theta_0)}\right)^{n(\theta_0)} n(\theta_0)\, r^{n(\theta_0) - 1} \exp\left(a_1(\theta_0) \frac{1}{3} F(r) + a_2(\theta_0) |F(r)| \right) dr \right) ds.$$

Als weitere Arbeitshypothese nehmen wir an, dass die Parameter a_1 und a_2 vom (während des Versuchs konstanten) Wert θ_0, jedoch nicht von der Spannung abhängen. Die Integrale in der Formel (4.55) sind wieder – ähnlich wie in (4.52), (4.53) - zu diskretisieren.

Durch Vergleich der nach (4.24) berechneten Werte des Volumenanteils mit denen nach (4.55) berechneten lässt sich testen, ob die Lösung (4.55) der modifizierten JMA-DG (4.54) hinreichend genaue Werte liefert. Falls keine befriedigenden Ergebnisse erzielt werden, muss ein komplizierteres Modell getestet werden, z.B. mit spannungsabhängigen Parametern a_1 und a_2.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, als Ausgangspunkt für eine Gleichung wie in (4.54) nicht die lineare JMA-DG (3.7), sondern die autonome JMA-DG (3.9) zu wählen. Das führt anstelle von (4.54) zu

$$(4.56)\quad p_p'(t) = (1 - p_p(t)) \frac{n(\theta_0)}{\tau(\theta_0)} [- \ln(1 - p_p(t))]^{1 - \frac{1}{n(\theta_0)}} \exp(a_1(\theta_0) \frac{1}{3} F(t) + a_2(\theta_0) |F(t)|)$$

mit der nicht-trivialen Lösung (zur Anfangsbedingung $p_p(0) = 0$)

$$(4.57)\quad p_p(t) = 1 - \exp\{ (\frac{1}{\tau(\theta_0)})^{n(\theta_0)} (\int_0^t \exp(a_1(\theta_0) \frac{1}{3} F(s) + a_2(\theta_0) |F(s)|) \, ds)^{n(\theta_0)} \}.$$

Nur durch Testen anhand aufgenommener Messdaten lässt sich entscheiden, welchem Ansatz – (4.54) oder (4.56) – der Vorzug für die betreffende Situation und Stahlsorte zu geben ist.

Nach der Untersuchung des Falles mit konstanter Temperatur kann der Fall *variabler* Temperatur (und variabler Last) in ähnlicher Weise behandelt werden. Anhand der aufgenommenen Messdaten wird gemäß (4.21) der Phasenanteil berechnet. Wir benutzen die modifizierte JMA-DG (3.20), also

$$(4.58)\quad p_p'(t) = (1 - p_p(t)) (\frac{1}{\tau(\theta(t))})^{n(\theta(t))} n(\theta(t)) \, t^{n(\theta(t)) - 1} \cdot$$

$$\cdot (1 + g(\theta(t))\theta'(t)) \exp(a_1(\theta(t)) \frac{1}{3} F(t) + a_2(\theta(t)) |F(t)|),$$

was die Arbeitshypothese beinhaltet, dass die für konstante Temperaturen ermittelten Parameter a_1 und a_2 jetzt für variables θ verwendet werden können.
In der obigen Darlegung wurde zuerst der Fall einer konstanten Temperatur und einer variablen Last untersucht. Dafür spricht, dass das isotherme Umwandlungsverhalten besser bekannt ist als das nicht-isotherme. Aber es ist natürlich auch möglich, zuerst die Last konstant zu halten und nicht-isotherm umzuwandeln.
Bei nicht-isothermem Umwandeln unter variabler oder auch konstanter Last kann auch die Umwandlungsgleichung (3.21) als Arbeitshypothese gewählt werden. Dann ist ähnlich zu verfahren. Ebenso ist es möglich, für die Umwandlungen spezielle Iterationsverfahren, so z.B. nach Hougardy [Hou86] oder Denis [Den92], [Fer85] zu verwenden (vgl. auch [Böh03b] für eine Übersicht und ausführliche Erläuterungen).

5. Umwandlungen unter isotropem Druck

Wir nehmen nun an, dass die zylindrische Probe nur einem isotropen Druck unterworfen sei. Wiederum sei die Schwerkraft vernachlässigt. Dann hat der Spannungstensor die Gestalt

(5.1) $\sigma = F\,\delta$ mit $F \in \mathbb{R}$,

für $F > 0$ sprechen wir vom Unter-, für $F < 0$ vom Überdruck. Gemäß (3.12) und (3.13), (3.15) erhalten wir

(5.2) $\sigma_m = F$,

(5.3) $\sigma^* = \sigma_v = 0$.

Aus (5.3) folgt, dass – zumindest nach dem von uns benutztem Modell (3.1) - keine UP auftritt. Aus (2.6) folgt dann leicht für den homogenen Verzerrungstensor

(5.4) $$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \frac{1 - 2\nu}{E} F + \frac{1}{3}\frac{\rho_0 - \rho(\theta)}{\rho(\theta)}, \qquad \varepsilon_{ij} = 0 \quad \text{für } i \neq j.$$

Somit erhalten wir

(5.5) $$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta d}{d}.$$

Bei der Umwandlung unter isotropem Druck genügt es somit, nur die Längenänderung der Probe aufzunehmen, wie beim Dilatometer ohne Belastung.

Unter Verwendung von (4.19) gelangen wir von (5.4) zur Formel für den Massenanteil der sich bildenden Phase: (Wir bleiben wieder bei unserer Situation der Umwandlung von Austenit zu Perlit.)

(5.6) $$\chi_p(t) = \{\, 1 + 3\,\varepsilon_L(t) - \gamma_F(t) - \frac{\rho_a(\theta_0)}{\rho_a(\theta(t))} \,\} \frac{\rho_a(\theta(t))}{\rho_a(\theta_0)} \frac{\rho_p(\theta(t))}{\rho_a(\theta(t)) - \rho_p(\theta(t))}.$$

Dabei werden wiederum die Abkürzungen

(5.7) $$\varepsilon_L(t) := \frac{\Delta l(t)}{l}, \quad \gamma_F(t) := \frac{1 - 2\nu(\theta(t))}{E(\theta(t))} F(t).$$

verwendet. Für eine konstante Umwandlungstemperatur $\theta = \theta_0$ folgt aus (5.6)

(5.8) $$\chi_p(t) = (3\,\varepsilon_L(t) - \gamma_F(t)) \frac{\rho_p(\theta_0)}{\rho_a(\theta_0) - \rho_p(\theta_0)},$$

für isotherme vollständige Umwandlungen

(5.9) $$\chi_p(t) = \frac{3\,\varepsilon_L(t) - \gamma_F(t)}{3\,\varepsilon_L(t_\infty) - \gamma_F(t_\infty)}$$

(vgl. (4.24), (4.25)). Hier besteht dasselbe Problem wie im Punkt 4.1. Die Last muss zu Beginn gleich null sein.

Die modifizierte JMA-DG (für variable Temperatur und Last) lautet für den isotropen Druck (vgl. (3.20))

$$(5.10) \qquad p_p'(t) = (1 - p_p(t)) \frac{n(\theta)}{\tau(\theta)} [- \ln(1 - p_p(t))]^{1 - \frac{1}{n(\theta)}} (1 + g(\theta)\theta') \exp(a_1 F(t)).$$

Die Formel (5.10) stimmt qualitativ mit der Aussage „isotroper Überdruck verlangsamt die Umwandlung“ (vgl. z.B. [Den97a], [Gau97]) überein. Nach (4.41) ist a_1 positiv, für $F(t) < 0$ ist damit der letzte Faktor in (5.10) kleiner als eins. Zum Erhalt quantitativer Ergebnisse ist so zu verfahren wie im vorigen Punkt, zuerst mit Versuchen unter konstanter Temperatur und Last, danach unter variabler. Insbesondere ist wichtig, zu testen, ob einachsige Belastung und isotroper Druck den selben Wert für den Parameter a_1 liefern. Eine solche Übereinstimmung würde den Ansatz in (3.20) wesentlich stützen. Im negativen Fall ist das Modell zu modifizieren, indem z.B. a_1 als abhängig von σ_m und σ_v angenommen werden.
Zur Beeinflussung der mechanischen Eigenschaften von Stahl durch isotropen (hydrostatischen) Druck und zur Entwicklung der Hochdrucktechnik sei auf [Zwi76] verwiesen.

6. Torsion einer dünnen Hohlprobe

Die Probe habe wiederum die Länge l, ihre Achse falle mit der Richtung der x_1-Achse überein, ihr Innenradius sei a, ihr Außenradius sei b. Weiter liege ein zeitabhängiges Drehmoment in Richtung der Längsachse an, das den Betrag $M = M(t)$ besitzt. In Längsrichtung wirke zunächst keine äußere Kraft. Dadurch wird die Probe verdreht. Der Drehwinkel pro Längeneinheit in Längsrichtung sei $\omega = \omega(t)$ (O.B.d.A. seien M und ω nicht-negativ). Wird elastisches Verhalten angenommen, so lässt sich zeigen (z.B. [Cha94]):

$$(6.1) \qquad \omega = \frac{2 M}{\mu \pi (b^4 - a^4)} \left(= \frac{4 M (1 + \nu)}{E \pi (b^4 - a^4)} \right),$$

wobei mit $\mu = \frac{E}{2 (1 + \nu)}$ der Schubmodul bezeichnet sei. Weiter läßt sich zeigen, dass der Spannungstensor σ mit

$$(6.2) \qquad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = 0,$$

$$(6.3) \qquad \sigma_{12} = - \mu \omega x_3, \qquad \sigma_{13} = \mu \omega x_2$$

der statischen Gleichung (2.1) und den Randbedingungen (spannungsfrei auf Mantelfläche und Momentenbeziehung auf Grund- und Deckfläche) genügt.

Aus (6.2) folgen (vgl. (3.14), (3.15))

(6.4) $\sigma_m = 0,$

(6.5) $$\sigma^* = \sigma = \begin{pmatrix} 0, & -\mu\omega x_3, & \mu\omega x_2 \\ -\mu\omega x_3, & 0, & 0 \\ \mu\omega x_2, & 0, & 0 \end{pmatrix},$$

(6.6) $$\sigma_v = \sqrt{3}\ \omega(t)\ \mu\ \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$$

Für dünne Rohrproben können wir

(6.7) $$R := \tfrac{1}{2}\,(a + b)$$

setzen und näherungsweise eine (örtlich) homogene Vergleichsspannung

(6.8) $$\sigma_v = \sqrt{3}\ \omega(t)\ \mu\ R = \sqrt{3}\ \frac{2\ M(t)}{\pi\ (b^4 - a^4)}\ R$$

annehmen. Wir benutzen den Ansatz (3.5) (isotrope Thermoelastizität mit Phasenumwandlungen und UP) und erhalten für den Verzerrungstensor

(6.9) $$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \frac{1}{3}\,\frac{\rho_0 - \rho(\theta)}{\rho(\theta)}, \qquad \varepsilon_{23} = 0,$$

$$\varepsilon_{12} = -\frac{1}{2}\,\omega(t)\,x_3 - \frac{3}{2}\,\mu\,x_3 \int_0^t \kappa\ \omega(s)\ \Phi'(p_p(s))\ p_p'(s)\ ds$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\,\omega(t)\,x_2 + \frac{3}{2}\,\mu\,x_2 \int_0^t \kappa\ \omega(s)\ \Phi'(p_p(s))\ p_p'(s)\ ds$$

Wir bleiben wiederum bei unserer Standardsituation der Umwandlung von Austenit zu Perlit. Aus der ersten Zeile in (6.9) folgt (unter der Annahme einer örtlich homogenen Temperatur)

(6.10) $$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta d}{d}.$$

Das bedeutet, dass im Falle der Torsion sich die UP nur in einer inelastischen Verdrehung der Probe bemerkbar macht. Da die relative Längs- und Querdehnung gleich sind, ist es auch nur erforderlich, die Längsdehnung während des Versuchs aufzunehmen. (Die Querdehnung kann natürlich zur Überprüfung dienen.) Somit erhalten wir aus (6.9) und (6.10)

(6.11) $$\chi_p(t) = \{\ 1 + 3\ \varepsilon_L(t) - \frac{\rho_a(\theta_0)}{\rho_a(\theta(t))}\ \}\ \frac{\rho_a(\theta(t))}{\rho_a(\theta_0)}\ \frac{\rho_p(\theta(t))}{\rho_a(\theta(t)) - \rho_p(\theta(t))},$$

wobei wir wiederum die Abkürzung (vgl. (4.15))

(6.12) $$\varepsilon_L(t) := \frac{\Delta l(t)}{l}$$

verwenden. Für konstantes $\theta = \theta_0$ (isotherme Umwandlung) ergibt sich aus (6.12)

(6.13) $$\chi_p(t) = 3\varepsilon_L(t)\,\frac{\rho_p(\theta_0)}{\rho_a(\theta_0) - \rho_p(\theta_0)},$$

und für isotherme vollständige Umwandlungen

(6.14) $$\chi_p(t) = \frac{\varepsilon_L(t)}{\varepsilon_L(t_\infty)}.$$

Wir haben bezüglich der Längsdehnung die selbe Situation wie beim Dilatometer ohne Belastung (vgl. z.B. [Wol03a]).

Wie im Punkt 4 kann über den Ansatz (3.16) das SUV (für die verschiedenen Spezialfälle wie z.B. konstante Umwandlungstemperatur) untersucht werden, wobei diesmal die Hauptspannung gleich null ist. Bei einer dünnen Rohrprobe erscheint über (6.6), (6.7) eine homogene Vergleichsspannung und somit eine homogene Phasenverteilung gerechtfertigt.

Wir wenden uns nun der Untersuchung der UP zu. Für den aus elastischem Verhalten und UP resultierenden messbaren Drehwinkel über die Länge der Probe l gilt

(6.15) $$\omega_{ges}(t) = -\frac{2\,\varepsilon_{12}}{x_3}\,l.$$

Zusammen mit (6.9) und (6.1) folgt hieraus:

(6.16) $$\omega_{ges}(t) = \frac{2\,l}{\pi\,(b^4 - a^4)}\left\{\frac{2\,M(t)\,(1 + \nu(\theta(t)))}{E(\theta(t))} + 3\int_0^t \kappa\,M(s)\,\Phi'(p_p(s))\,p_p'(s)\,ds\right\}.$$

Die letzte Formel ist wieder Ausgangspunkt für den Test des Modells. Wir verfahren analog wie im Punkt 4. Zuerst kann für vollständige Umwandlungen bei konstanter Umwandlungstemperatur θ_0 und konstantem Drehmoment M der (i.A. von θ_0 und M abhängige) Parameter κ zu

(6.17) $$\kappa = \omega_{ges}(t)\,\frac{\pi\,(b^4 - a^4)}{6\,M\,l} - \frac{2}{3}\,\frac{1 + \nu(\theta_0)}{E(\theta_0)}$$

bestimmt werden. Der letzte Term in (6.17) stimmt mit dem in (4.32) überein. Für einen einachsigen Zug- oder Druckversuch mit der anliegenden Last (d.h., mit einer Spannung) von

(6.18) $$|F| := \sqrt{3}\,\frac{2\,M}{\pi\,(b^4 - a^4)}\,R$$

stimmen die Vergleichsspannungen überein. Unter der oben geäußerten Hypothese, dass (bei konstanter Temperatur) der Parameter κ nur von der Vergleichsspannung abhänge, müssten die Formeln (6.17) und (4.32) annähernd gleiche Werte liefern.

7. Überlagerung von einfachen Versuchen

Interessante Möglichkeiten zum Testen der Modelle für SUV und UP ergeben sich durch Überlagerungen der in den Punkten 4, 5 und 6 beschriebenen Versuche, da damit unterschiedliche Spannungszustände sowohl mit konstanter Vergleichs- als auch mit konstanter Hauptspannung erzeugt werden können. Das ist besonders wichtig, um die Materialparameter a_1 und a_2 (im Ansatz für SUV (3.16), (3.20)) sowie κ (in Ansatz der UP (3.4)) auf allgemeinere Spannungsabhängigkeit zu untersuchen. Da es sich um kleine Deformationen handelt, ist eine lineare Überlagerung von zwei oder mehreren der oben aufgeführten Versuche zulässig. Wir wollen uns darauf beschränken, für einige dieser Überlagerungen die Haupt- und Vergleichsspannungen zu notieren und einige Arbeitshypothesen zu erörtern.

7.1. Überlagerung von einachsiger Spannung und isotropem Druck

Wir bezeichnen mit F_z die auf die (zylindrische) Probe in Längsrichtung wirkende einachsige Spannung (Zug oder Druck) und mit F_i den auf die Probe wirkenden isotropen Druck. Damit gelten für den Spannungstensor innerhalb der Probe

$$\sigma = \begin{pmatrix} F_z + F_i, & 0, & 0 \\ 0, & F_i, & 0 \\ 0, & 0, & F_i \end{pmatrix}, \tag{7.1}$$

$$\sigma_m = F_i + \tfrac{1}{3} F_z, \tag{7.2}$$

$$\sigma^* = \begin{pmatrix} \tfrac{2}{3} F_z, & 0, & 0 \\ 0, & -\tfrac{1}{3} F_z, & 0 \\ 0, & 0, & -\tfrac{1}{3} F_z \end{pmatrix}, \tag{7.3}$$

$$\sigma_v = |F_z|. \tag{7.4}$$

Durch voneinander unabhängige Variation von F_z und F_i können spezielle Spannungszustände erzeugt werden. Wird z.B. F_z dem Betrage nach konstant gelassen und nur F_i variiert, so bleibt die Vergleichsspannung σ_v konstant, während sich die mittlere Hauptspannung σ_m ändert. Somit sind im Vergleich mit dem Punkt 4, wo wir nur zwischen einachsigen Zug und Druck (also zwischen den Vorzeichen von σ_m) variieren konnten, wesentlich mehr Möglichkeiten zum Testen der Modelle für UP und SUV gegeben.

Wird speziell

$$F_i = -\tfrac{1}{3} F_z \quad \text{bei positivem } F_z \text{ (d.h. Zug)} \tag{7.5}$$

gewählt, so erhalten wir eine verschwindende mittlere Hauptspannung wie beim Torsionsversuch.

Wird ein paralleler Torsionsversuch mit gleicher Vergleichsspannung durchgeführt, kann getestet werden, ob die Umwandlungen gemäß dem Ansatz (3.16) für das SUV wirklich gleich ablaufen. Ebenso wäre zu testen, ob die UP in beiden Versuchen (bei sonst gleichen Bedingungen) gleich ist.

7.2. Überlagerung von einachsiger Spannung und Torsion

Wie bezeichnen mit F_z die auf die Probe in Längsrichtung wirkende einachsige Spannung (Zug oder Druck) und mit M den Betrag eines in Richtung der Längsachse wirkenden Drehmoment. Die Bezeichnungen für die Abmessungen der (dünnen) zylindrischen Hohlprobe seien wie im Punkt 6. Damit gelten für den Spannungstensor innerhalb der Probe (vgl. (6.1) – (6.8))

(7.6) $$\sigma = \begin{pmatrix} F_z, & -\frac{2M}{\pi(b^4 - a^4)} x_3, & \frac{2M}{\pi(b^4 - a^4)} x_2 \\ -\frac{2M}{\pi(b^4 - a^4)} x_3, & 0, & 0 \\ \frac{2M}{\pi(b^4 - a^4)} x_2, & 0, & 0 \end{pmatrix},$$

(7.2) $$\sigma_m = \frac{1}{3} F_z,$$

(7.3) $$\sigma^* = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} F_z, & -\frac{2M}{\pi(b^4 - a^4)} x_3, & \frac{2M}{\pi(b^4 - a^4)} x_2 \\ -\frac{2M}{\pi(b^4 - a^4)} x_3, & -\frac{1}{3} F_z, & 0 \\ \frac{2M}{\pi(b^4 - a^4)} x_2, & 0, & -\frac{1}{3} F_z \end{pmatrix}$$

(7.4) $$\sigma_v \approx \left(F_z^2 + \frac{12 M^2 R^2}{\pi^2 (b^4 - a^4)^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Jetzt ist es möglich, die Vergleichsspannung konstant zu halten und die Größen F_z und $F_T := \frac{2\sqrt{3} M R}{\pi (b^4 - a^4)}$ zwischen 0 und σ_v geeignet zu variieren, d.h., zwischen einachsigem Zug und Torsion bei konstanter Vergleichsspannung. Ebenso könnte von F_z das Vorzeichen gewechselt werden.

Desweiteren können Spannungszustände gemäß der Punkte 7.1 und 7.2 miteinander verglichen werden, bei denen σ_m und σ_v übereinstimmen. Nach den in dieser Arbeit vorgestellten Modellen müssten sich dabei die gleichen Materialparameter ergeben.

Appendix: Zur Berechnung der Phasendichten als Funktionen der Temperatur

Bei nicht-isothermen Umwandlungen gehen in die Formeln (z.B. in (4.21)) zur Berechnung der Phasenanteile aus den Versuchsdaten die Dichten der beteiligten Phasen als Funktionen der Temperatur ein. Sind diese Dichten nicht aus anderen Quellen bekannt, müssen sie – ggf. unter Zuhilfenahme weiterer Daten – aus den Versuchsdaten errechnet werden. Das praktische Problem besteht darin, dass in der Formel (4.21) im Nenner die sehr kleine Differenz $\rho_a(\theta(t)) - \rho_p(\theta(t))$ steht. Aus diesem Grunde hängt die Genauigkeit der Ergebnisse stark davon ab, wie genau die Dichten bekannt sind oder berechnet wurden. Hinzu kommt bei Versuchen unter äußerer Belastung noch der Einfluss der elastischen Dehnung auf die Dichten. Bei einer angenommenen elastischen Längenänderung von einem Prozent und einer Poisson-Zahl von 0,35 ergibt sich eine Dichteänderung von 0,3 Prozent. In Anbetracht des vorher Gesagten sollte geprüft werden, ob diese Abweichung nicht doch wesentlich sein kann. Gegebenenfalls muss in den folgenden Darlegungen diese Dichteabweichung mit eingerechnet werden. Eventuell besteht auch die Möglichkeit, vor Beginn und nach Ende der Umwandlungen die Versuchsdaten ohne anliegende Last aufzunehmen.

Wir bleiben bei der Situation der vollständigen Umwandlung des Austenits in den Perlit. Aus (4.6) mit $F = 0$ sowie der Beziehung (2.7) ergibt sich der Zusammenhang zwischen Dichten und Längen zu den entsprechenden Temperaturen

$$\text{(A.1)} \qquad \rho(\theta) = \rho(\theta_0)\,(1 + \varepsilon_L(\theta))^{-3} = \rho(\theta_0)\,\left(\frac{l(\theta_0)}{l(\theta)}\right)^3,$$

wobei $\varepsilon_L(\theta)$ die relative Längenänderung ist, die der Temperatur θ entspricht und auf $l(\theta_0)$ bezogen ist. Anstelle von (A.1) kann auch die aus (A.1) durch Linearisierung entstehende Formel

$$\text{(A.2)} \qquad \rho(\theta) = \rho(\theta_0)\,(1 + 3\,\varepsilon_L(\theta))^{-1}$$

verwandt werden, wobei im Einzelfall zu prüfen ist, ob die erzielte Genauigkeit ausreichend ist. Die Formeln (A.1) und (A.2) gelten für die ganze zylindrische Voll- oder Hohlprobe, unabhängig von möglichen Phasenumwandlungen. Solange nur Austenit vorhanden ist, ist in (A.1) $\rho(\theta)$ die Dichte des Austenits, nach Abschluss der Umwandlung die des Perlits. Insofern ist es günstig, einen Abkühlverlauf zu wählen, bei dem die Umwandlung nicht zu schnell erfolgt, oder bei dem die Anfangstemperatur über der Perlit-Starttemperatur A_{r3} liegt, um hinreichend viele Messwerte für den Austenit zu erhalten Es muss nur eine Dichte $\rho(\theta_0)$ zu einer

bestimmten Temperatur θ_0 und Länge l_0 bekannt sein. Danach kann für den Austenit durch lineare oder polynomiale Extrapolation eine Formel für die Dichte als Funktion der Temperatur über den ganzen relevanten Temperaturbereich (bis zum Ende der Umwandlung) gewonnen werden (vgl. z.B. [Ric73, 83]).

Zur Bestimmung der Dichte des Perlits verfahren wir analog, nur zum Ende der Umwandlung hin, wenn kein Austenit mehr vorhanden ist, und sich der Perlit bei weiterer Abkühlung nur noch thermisch dehnt. Durch Extrapolation wird die Perlit-Dichte als Funktion der Temperatur über den ganzen Umwandlungsbereich erhalten. Wie schon erwähnt, ist es vorteilhaft, die Messungen zu Anfang und Ende ohne Belastung der Probe aufzunehmen.

Die Dichte $\rho(\theta_0)$ (z.B. für die „Zimmertemperatur“ $\theta_0 = 20$ °C) kann entweder durch Ausmessen der Masse und der Geometrie oder mit dem Archimedischen Prinzip bestimmt werden.

Literatur

[Ahr00] Ahrens, U., Besserdich, G., Maier, H. J.: Spannungsabhängiges bainitisches und martensitisches Umwandlungsverhalten eines niedrig legierten Stahl, HTM 55, 329-338, (2000).

[Ahr02] Ahrens, U., Besserdich, G., Maier, H. J.: Sind aufwändige Experimente zur Beschreibung der Phasenumwandlungen von Stählen noch zeitgemäß? HTM, 57, 99-105, (2002).

[Bes93] Besserdich, G.: Untersuchungen zur Eigenspannungs- und Verzugsbildung beim Abschrecken von Zylindern aus den Stählen 42CrMo4 und Ck45 unter Berücksichtigung der Umwandlungsplastizität, Universität Karlsruhe, Dissertation, (1993).

[Böc02] Böck, N., Holzapfel, G. A.: A large strain continuum and numerical method for transformation induced plasticity (TRIP), in WCCM V 5. World Congress on Computorial Mechanics, 2002, Wien, (Hrg. Mang, H. A., Rammerstorfer, F. G., Eberhardsteiner, J.), (2002).

[Böh02] Böhm, M., Hunkel, M., Schmidt, A., Wolff, M.: Evaluation of various phase-transition models for 100Cr6 for application in commercial FEM programs, Berichte aus der Technomathematik, FB 3, Universität Bremen, Report 02-14, (2002).

[Böh03a] Böhm, M., Hunkel, M., Schmidt, A., Wolff, M.: Evaluation of various phase-transition models for 100Cr6 for application in commercial FEM programs, eingereicht zu den Proceedings of the 2nd Intern. Conf. on Thermal Process Modelling and Computer Simulation, Nancy, France, (2003).

[Böh03b] Böhm, M., Dachkovski, S., Hunkel, M., Lübben, T., Wolff, M.: Phasen-umwandlungen im Stahl – Übersicht über einige makroskopische Modelle, erscheint in Berichte aus der Technomathematik, FB 3, Universität Bremen, Report 03-xx, 2003.

[Bru98] Bruhns, O. T., Stein, E. (Herausgeber): Micro- and macrostructural aspects of thermoplasticity, Proc. des IUTAM Symposiums, Bochum, 1997, Kluwer Academic Publishers, (1998).

[Bur65] Burke, J.: The kinetics of phase transformations in metals, Pergamon Press Oxford, (1965).

[Cha00] Chakrabarty, J.: Applied plasticity, Springer-Verlag, New York, (2000).

[Cha94] Chandrasekharaiah, D. S., Debnath, L.: Continuum mechanics, Academic Press, Boston, (1994).

[Che00] Cherkaoui, M., Berveiller, M., Lemoine, X.: Couplings between plasticity and martensitic transformation: overall behavior of polycrystalline TRIP steels, Int. J. of Plast., 16, pp. 1215-1241, (2000).

[Chr75] Christian, J. W.: The theory of transformations in metals and alloys, Part 1, Pergamon Press, Oxford, (1975).

[Dac02] Dachkovski, S., Böhm, M.: Objective modelling of some elastoplastic materials with phase changes, eingereicht zu den Proceedings der 2nd Intern. Conference Thermal Process Modelling and Computer Simulation, Nancy, France, (2002).

[Dah93] Dahl, W. (Herausgeber): Eigenschaften und Anwendungen von Stählen, Bd 1: Grundlagen, Verlag der Augustinus Buchhandlung, Aachen, (1993).

[Den87] Denis, S., Gautier, E., Sjöström, S., Simon, A.: Influence of stresses on the kinetics of pearlitic transformation during continuous cooling, Acta metall., 35 (7), pp.1621-1632, (1987).

[Den92] Denis, S., Farias, D., Simon, A.: Mathematical model coupling phase transformations and temperature in steels, ISIJ International, 32, pp. 316-325, (1992).

[Den97a] Denis, S.: Considering stress-phase transformation interactions in the calculation of heat treatment residual stresses, in: CISM courses and lectures – No 368, Mechanics of solids with phase changes, ed. Bergveiller, M., Fischer, F. D., Springer-Verlag, (1997).

[Den97b] Denis, S.: Prévision des contraintes résiduelles induites par traitment thermique et thermochimique, La Revue de Metallurgie-CIT/Science et Génie des Materiaux, Februar 1997.

[Den99] Denis, S., Archambault, P., Aubry, C., Mey, A., Louin, J. C., Simon, A.: Modelling of phase transformation kinetics in steels and coupling with heat treatment residuel stress predictions, J. Phys. IV France 9, pp. Pr9-323-Pr9-332, (1999).

[Den02] Denis, S., Archambault, P., Gautier, E., Simon, A., Beck, G.: Precdiction of residual stress and distortion of ferrous and non-ferrous metals: current status and future developments, J. of Materials Eng. and Performance, 11, (1), pp. 92-102, (2002).

[Fer85] Fernandes, F. M. B., Denis, S., Simon, A.:Mathematical model coupling phase transformation and temperature evolution during quenching of steel, Materials Schience and Technology, (1985).

[Fis96] Fischer, F. D., Sun, Q. P., Tanaka, K.: Transformation-induced plasticity, (TRIP) Appl. Mech. Rev. 49, pp. 317 – 364, (1996).

[Fis00] Fischer, F. D., Reisner, G., Werner, E., Tanaka, K., Cailletaud, G., Antretter, T.: A new view on transformation induced plasticity (TRIP), Int. J. of Plasticity, 16, pp. 723-748, (2000).

[Fra03] Franz, C., Besserdich, G., Schulze, V., Müller, H., Löhe, D.: Influence of transformation plasticity on residual stresses and distortions due to the heat treatment of steels with different carbon contents, eingereicht zu den Proceedings zur Konferenz „Thermal Process Modelling and Computer Simulation (ICTPMCS), Nancy, Frankreich, (2003).

[Gan97] Ganghoffer, J. F., Denis, S., Gautier, E., Sjöström, S.: Micromechanical of the finite element calculation of a diffusional Transformation, J. of Mat. Science 32, pp. 4941-4955, (1997).

[Gau79] Gautier, E., Simon, A., Beck, G.: Deformation of eutectoid steel during pearlitic transformation under tensile stress, in: Proc. 5th Int. Conf. on Stregth of Metals and Alloys, Aachen, Germany, edited by: Haasen, P., Gerold, V., Kostorz, G., vol2, p. 867, Pergamon Press, Oxford, (1979).

[Gau87] Gautier, E., Simon, A., Beck, G.: Plasticite de transformation durant la transformation perlitique d'un acier eutectoide, Acta metall. 35 (6), pp. 1367-1375, (1987).

[Gau97] Gautier, E.: Interactions between stresses and diffusive phase transformations with plsticity, in: CISM courses and lectures – No 368, Mechanics of solids with phase changes, ed. Bergveiller, M., Fischer, F. D., Springer-Verlag, (1997).

[Gau00] Gautier, E., Zhang, J., Wen, Y., Denis, S.: Effects of stress on martensitic transformation in ferrous alloys. Experiments and numerical simulations, in: Phase transformations and evolution in materials, (Ed.: Turchi, P. E. A., Gonis, A.) the Minerals, Metals and Materials Society, (2000).

[Gre65] Greenwood, G. W., Johnson, R. H.: the deformation of metals under small stresses during phase transformations, Proc. Royal Society, 283 A, pp. 183-192, (1965).

[Hof02] Hoffmann, F., Keßler, O., Lübben, T., Mayr, P.: „Distortion Engineering" – Verzugsbeherrschung in der Fertigung, HTM 57, 3, 213-217, (2002).

[Höm02] Hömberg, D.: Induction hardening of steel – modeling, analysis, and optimal design of inductors, Habilitationsschrift, Technische Universität Berlin, (2002).

[Hou86] Hougardy, H. P., Yamazaki, K.: An improved calculation of the transformations in steels, Steel Research 57, No 9, (1986).

[Hun99] Hunkel, M., Lübben, T., Hoffmann, F., Mayr, P.: Modellierung der bainitischen und perlitischen Umwandlung bei Stählen, HTM 54, 6, pp. 365-372, (1999).

[Ino82] Inoue, T., Wang, Z.: Finite element analysis of coupled thermoinelastic problem with phase transformation, in: Int. Conf. Num. Meth. in Industrial Forming Processes, edited by: Pittmann, J. F. T., Wood, H., Dand Alexander, J. H., Pineridge Press, (1982).

[Ino85] Inoue, T., Wang, Z.: Coupling between stress, temperature, and metallic structures during processes involving phase transformations, Mat. Sci. Tech. 1 pp. 845 – 850, (1985).

[Ino89] Inoue, T., Wang, Z., Miyao, K.: Quenching stress of carburized steel gear wheel, ICRS2 Beck, G., Denis, S., Simon, A.(eds) Elsevier Appl. Sci., London, New York, pp. 606 – 611, (1989).

[Ino03] Inoue, T., Otsuka, T.: Simple method to identify transformation plastic coefficient, Poster-Beitrag zur Konferenz „Thermal Process Modelling and Computer Simulation (ICTPMCS), Nancy, Frankreich, 2003.

[Koi59] Koistinen, D. P., Marburger, R. E.: A general equation prescribing the extent of the austenite-martensite transformation in pure iron-carbon and plain carbon steels, Acta metall. 7 (1), pp. 59 – 60, (1959).

[Leb84] Leblond, J. B., Devaux, J.: A new kinetic model for anisothermal metallurgical transformations in steels including effect of austenite grain size, Acta Met. 32, pp. 137 – 146, (1984).

[Leb89a] Leblond, J. B., Devaux, J., Devaux, J. C.: Mathematical modelling of transformation plasticity in steels. I: Case of ideal-plastic Phases. Int. J. Plasticity, 5, 551-572, (1989).

[Leb89b] Leblond, J. B.: Mathematical modelling of transformation plasticity in steels. II: Coupling with strain hardening phenomena. Int. J. Plasticity, 5, 573-591 , (1989).

[Liu98] Liu, C. C., Liu, Z., Xu, X. J., Chen, G. X., Wu, J. Z.: Effect of stress on transformation and prediction of residual stresses, Mat. Science and Tech., 14, pp. 747-750.

[Mac92] Macherauch, E.: Praktikum in Werkstoffkunde, 10. Auflage, Vieweg & Sohn, Braunschweig, (1992).

[Mag66] Magee, C. L.: Transformation kinetics, microplasticity and aging of martensite in Fe-31 Ni, Ph. D. Dissertation, Carnegie Mellon University, Pittsburg (USA), (1966).

[Mai02] Maier, H. J., Ahrens, U.: Isothermal bainitic transformation in alloy steels: factors limiting prediction of the resulting material's properties, Z. Metallkd., 93, 7, pp. 712-718, (2002).

[Mit87] Mitter, W.: Umwandlungsplastizität und ihre Berücksichtigung bei der Berechnung von Eigenspannungen, Materialkundlich-technische Reihe 7, Gebr. Borntraeger, Berlin, Stuttgart, (1987).

[Mit92] Mittemeijer, E. J.: Review – Analysis of the kinetics of phase transformations, Journal of Materials science 27, pp. 3977-3987, (1992).

[Mit02] Mittemeijer, E. J., Sommer, F.: Solid state phase transformation kinetics: a modular transformation model, Z. Metallkunde 93, 5, pp. 352-361, (2002).

[Nag01] Nagayama, K., Terasaki, T., Tanaka, K., Fischer, F. D., Antretter, T., Cailletaud, G., Azzouz, F.: Mechanical properties of a Cr-Ni-Mo-Al-Ti maraging steel in the process of martensitic transformation, Mat. Science and Eng. A 308, pp. 25-37, (2001).

[Obe99] Oberste-Brandenburg, C.: Ein Materialgesetz zur Beschreibung der Austenit-Martensit Phasentransformation unter Berücksichtigung der transformationsinduzierten Plastizität, Ruhr-Universität Bochum, Dissertation, (1999).

[Pie00a] Pietzsch, R.: Simulation und Minimierung des Verzuges von Stahlprofilen bei der Abkühlung, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Dissertation, (2000).

[Pie00b] Pietzsch, R.: Simulation des Abkühlverzuges von Stahlprofilen, Technische Mechanik, Bd. 20, Heft 3, pp. 265-274, (2000).

[Rét97] Réti, T., Horváth, L., Felde, I.: A comparative study of methods used for the prediction of nonisothermal austenite decomposition, J. of Mat. Eng. and Performance, 6 (4), pp. 433-442, (1997).

[Ric73] Richter, F.: Die wichtigsten physikalischen Eigenschaften von 52 Eisenwerkstoffen, Verlag Stahleisen, Düsseldorf, (1973).

[Ric83] Richter, F.: Physikalische Eigenschaften von Stählen und ihre Temperaturabhängigkeit, Verlag Stahleisen, Düsseldorf, (1983).

[Ron00] Ronda, J., Oliver, G. J.: Consistent thermo-mechano-metallurgical model of welded steel with unified approach to derivation of phase evolution laws and transformation-induced plasticity, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 189, 361-417, (2000).

[Shi03] Shi, W., Zhang X., Liu, Z.: Model of stress-induced phase transformation and prediction of internal stresses of large steel workpieces during quenching, eingereicht zu den Proceedings, 2nd Intern. Conf. Thermal Process Modelling and Computer Simulation, Nancy, France, (2003).

[Sjö85] Sjöström, S.: Interactions and constitutive models for calculating quench stresses in steel, Mat. Sci. Tech. 1, pp. 823 – 829, (1985).

[Sjö94] Sjöström, S.: Physical, mathematical and numerical modeling for calculation of residual stress, fundamentals and applications. in Proc. 4th Int. Conf. on Residual Stresses, Ed. Society of Experimental Mechanics, pp. 484-497, (1994).

[Su02] Su, T. J., Veaux, M., Aeby-Gautier, E., Denis, S., Brien, V., Archambault, P.: Effect of tensile stresses on bainitic isothermal transformation, Int. Conf. on Martensitic Transf., Juni 2002, Helsinki, eingereicht zum J. de Physique, (2002).

[Sur03] Surm, H., Kessler, O., Hunkel, M., Hoffmann, F., Mayr, P.: Modelling the Ferrite/Carbide to austenite Transformation of Hypoeutectoid and Hypereutectoid Steels, 2nd Intern. Conf. on Thermal Process Modelling and Computer Simulation, Nancy, France, (2003).

[SYS00] SYSWELD™, (2000).

[Vea01] Veaux, M., Louin, J. C., Houin, J. P., Denis, S., Archambault, P.: Bainitic transformation under stress in medium alloyed steels, J. de Phys. IV, 11, pp. Pr4-181-Pr4-188, (2001).

[Vid96] Videau, J. C., Cailletaud, G., Pineau, A.: Experimental study of the transformation induced plasticity in a Cr-Ni-Mo-Al-Ti steel, J. de Physique IV, Coll. C1, Supp. J. de Phys. III, 6, pp. 465-474, (1996).

[Vog01] Vogelsang, H.: Parameteridentifikation für ein selbstkonsistentes Stoffmodell unter Berücksichtigung von Phasentransfomationen, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 129, Ruhr-Universität Bochum, (2001).

[Wen96] Wen, Y. H., Denis, S., Gautier, E.: Computer simulation of martensitic transformation under stress, J. de Physique IV, Coll. C1, suppl. au J. de Phys. III, vol. 6, pp. C1-475-C1-483, (1996).

[Wol02a] Wolff, M., Böhm, M.: Zur Modellierung der Thermoelasto-Platizität mit Phasenumwandlungen bei Stählen sowie der Umwandlungsplastizität, Berichte aus der Technomathematik, FB 3, Universität Bremen, Report 02-01, (2002).

[Wol02b] Wolff, M., Böhm, M.: Phasenumwandlungen und Umwandlungsplastizität bei Stählen im Konzept der Thermoelasto-Plastizität, Berichte aus der Technomathematik, FB 3, Universität Bremen, Report 02-05, (2002).

[Wol03a] Wolff, M., Dachkovski, S., Böhm, M.: Volumenanteile versus Massenanteile – der Dilatometerversuch aus der Sicht der Kontinuumsmechanik, Berichte aus der Technomathematik, FB 3, Universität Bremen, Report 03-01, (2003).

[Wol03b] Wolff, M., Schmidt, A., Böhm, M.: Phase transitions and transformation-induced plasticity of steel in the framework of continuum mechanics, eingereicht zu den Proceedings, 2nd Intern. Conf. Thermal Process Modelling and Computer Simulation, Nancy, France, (2003).

[Wol03c] Wolff, M., Böhm, M.: Umwandlungsplastizität bei Stählen im Konzept der Thermoelasto-Plastizität – modelliert mit dem Ansatz einer Zwischenkonfiguration, Technische Mechanik, 23 (1), pp. 29-48, (2003)

[Wol03d] Wolff, M., Surm, H., Suhr, B.: Zum Vergleich von Massen- und Volumenanteilen bei der perlitischen Umwandlung des Stahls 100Cr6, Berichte aus der Technomathematik, FB 3, Universität Bremen, Report 03-xx, 2003.

[Zwi76] Zwirlein, O.: Die Beeinflussung der mechanischen Eigenschaften von gehärtetem Wälzlagerstahl 100Cr6 durch hydrostatischen Druck, Dissertation, TH Darmstadt (1976).

Adressen der Autoren

Dr. Michael Wolff, Zentrum für Technomathematik, FB3, Universität Bremen, Postfach 330440, D-28334 Bremen, mwolff@math.uni-bremen.de,

Prof. Dr. Michael Böhm, Zentrum für Technomathematik, FB3, Universität Bremen, Postfach 330440, D-28334 Bremen, mbohm@math.uni-bremen.de,

Dr. Sergej Dachkovski, Zentrum für Technomathematik, FB3, Universität Bremen, Postfach 330440, D-28334 Bremen, dsn@math.uni-bremen.de,

Dr.-Ing. Günther Löwisch, Stiftung Institut für Werkstofftechnik (IWT), Badgasteiner Str. 3, D-28359 Bremen, loewisch@mpa-bremen.de

Berichte aus der Technomathematik ISSN 1435-7968

http://www.math.uni-bremen.de/zetem/berichte.html
- Vertrieb durch den Autor –

Reports **Stand: 09. Juli 2003**

98-01. Peter Benner, Heike Faßbender:
An Implicitly Restarted Symplectic Lanczos Method for the Symplectic Eigenvalue Problem, Juli 1998.

98-02. Heike Faßbender:
Sliding Window Schemes for Discrete Least-Squares Approximation by Trigonometric Polynomials, Juli 1998.

98-03. Peter Benner, Maribel Castillo, Enrique S. Quintana Ortí:
Parallel Partial Stabilizing Algorithms for Large Linear Control Systems, Juli 1998.

98-04. Peter Benner:
Computational Methods for Linear-Quadratic Optimization, August 1998.

98-05. Peter Benner, Ralph Byers, Enrique S. Quintana Ortí, Gregorio Quintana Ortí:
Solving Algebraic Riccati Equations on Parallel Computers Using Newton's Method with Exact Line Search, August 1998.

98-06. Lars Grüne, Fabian Wirth:
On the rate of convergence of infinite horizon discounted optimal value functions, November 1998.

98-07. Peter Benner, Volker Mehrmann, Hongguo Xu:
A Note on the Numerical Solution of Complex Hamiltonian and Skew-Hamiltonian Eigenvalue Problems, November 1998.

98-08. Eberhard Bänsch, Burkhard Höhn:
Numerical simulation of a silicon floating zone with a free capillary surface, Dezember 1998.

99-01. Heike Faßbender:
The Parameterized SR Algorithm for Symplectic (Butterfly) Matrices, Februar 1999.

99-02. Heike Faßbender:
Error Analysis of the symplectic Lanczos Method for the symplectic Eigenvalue Problem, März 1999.

99-03. Eberhard Bänsch, Alfred Schmidt:
Simulation of dendritic crystal growth with thermal convection, März 1999.

99-04. Eberhard Bänsch:
Finite element discretization of the Navier-Stokes equations with a free capillary surface, März 1999.

99-05. Peter Benner:
Mathematik in der Berufspraxis, Juli 1999.

99-06. Andrew D.B. Paice, Fabian R. Wirth:
Robustness of nonlinear systems and their domains of attraction, August 1999.

99-07. Peter Benner, Enrique S. Quintana Ortí, Gregorio Quintana Ortí:
Balanced Truncation Model Reduction of Large-Scale Dense Systems on Parallel Computers, September 1999.

99-08. Ronald Stöver:
Collocation methods for solving linear differential-algebraic boundary value problems, September 1999.

99-09. Huseyin Akcay:
Modelling with Orthonormal Basis Functions, September 1999.

99-10. Heike Faßbender, D. Steven Mackey, Niloufer Mackey:
Hamilton and Jacobi come full circle: Jacobi algorithms for structured Hamiltonian eigenproblems, Oktober 1999.

99-11. Peter Benner, Vincente Hernández, Antonio Pastor:
On the Kleinman Iteration for Nonstabilizable System, Oktober 1999.

99-12. Peter Benner, Heike Faßbender:
A Hybrid Method for the Numerical Solution of Discrete-Time Algebraic Riccati Equations, November 1999.

99-13. Peter Benner, Enrique S. Quintana Ortí, Gregorio Quintana Ortí:
Numerical Solution of Schur Stable Linear Matrix Equations on Multicomputers, November 1999.

99-14. Eberhard Bänsch, Karol Mikula:
Adaptivity in 3D Image Processing, Dezember 1999.

00-01. Peter Benner, Volker Mehrmann, Hongguo Xu:
Perturbation Analysis for the Eigenvalue Problem of a Formal Product of Matrices, Januar 2000.

00-02. Ziping Huang:
Finite Element Method for Mixed Problems with Penalty, Januar 2000.

00-03. Gianfrancesco Martinico:
Recursive mesh refinement in 3D, Februar 2000.

00-04. Eberhard Bänsch, Christoph Egbers, Oliver Meincke, Nicoleta Scurtu:
Taylor-Couette System with Asymmetric Boundary Conditions, Februar 2000.

00-05. Peter Benner:
Symplectic Balancing of Hamiltonian Matrices, Februar 2000.

00-06. Fabio Camilli, Lars Grüne, Fabian Wirth:
A regularization of Zubov's equation for robust domains of attraction,, März 2000.

00-07. Michael Wolff, Eberhard Bänsch, Michael Böhm, Dominic Davis:
Modellierung der Abkühlung von Stahlbrammen, März 2000.

00-08. Stephan Dahlke, Peter Maaß, Gerd Teschke:
Interpolating Scaling Functions with Duals, April 2000.

00-09. Jochen Behrens, Fabian Wirth:
A globalization procedure for locally stabilizing controllers, Mai 2000.

00-10. Peter Maaß, Gerd Teschke, Werner Willmann, Günter Wollmann:
Detection and Classification of Material Attributes -- A Practical Application of Wavelet Analysis, Mai 2000.

00-11. Stefan Boschert, Alfred Schmidt, Kunibert G. Siebert, Eberhard Bänsch, Klaus-Werner Benz, Gerhard Dziuk, Thomas Kaiser:
Simulation of Industrial Crystal Growth by the Vertical Bridgman Method, Mai 2000.

00-12. Volker Lehmann, Gerd Teschke:
Wavelet Based Methods for Improved Wind Profiler Signal Processing, Mai 2000.

00-13. Stephan Dahlke, Peter Maaß:
A Note on Interpolating Scaling Functions, August 2000.

00-14. Ronny Ramlau, Rolf Clackdoyle, Frédéric Noo, Girish Bal:
Accurate Attenuation Correction in SPECT Imaging using Optimization of Bilinear Functions and Assuming an Unknown Spatially-Varying Attenuation Distribution, September 2000.

00-15. Peter Kunkel, Ronald Stöver:
Symmetric collocation methods for linear differential-algebraic boundary value problems, September 2000.

00-16. Fabian Wirth:
The generalized spectral radius and extremal norms, Oktober 2000.

00-17. Frank Stenger, Ahmad Reza Naghsh-Nilchi, Jenny Niebsch, Ronny Ramlau:
A unified approach to the approximate solution of PDE, November 2000.

00-18. Peter Benner, Enrique S. Quintana-Ortí, Gregorio Quintana-Ortí:
Parallel algorithms for model reduction of discrete-time systems, Dezember 2000.

00-19. Ronny Ramlau:
A steepest descent algorithm for the global minimization of Tikhonov-Phillips functional, Dezember 2000.

01-01. Torsten Köhler, Peter Maaß, Peter Wust, Martin Seebass:
Efficient methods in hyperthermia treatment planning, Januar 2001.

01-02. Peter Benner, Ralph Byers, Rafael Mayo, Enrique S. Quintana-Ortí, Vicente Hernández:
Parallel Algorithms for LQ Optimal Control of Discrete-Time Periodic Linear Systems, Februar 2001.

01-03. Peter Benner, Enrique S. Quintana-Ortí, Gregorio Quintana-Ortí:
Efficient Numerical Algorithms for Balanced Stochastic Truncation, März 2001.

01-04. Peter Benner, Maribel Castillo, Enrique S. Quintana-Ortí:
Partial Stabilization of Large-Scale Discrete-Time Linear Control Systems, März 2001.

01-05. Stephan Dahlke:
Besov Regularity for Edge Singularities in Polyhedral Domains, Mai 2001.

01-06. Fabian Wirth:
A linearization principle for robustness with respect to time-varying perturbations, Mai 2001.

01-07. Stephan Dahlke, Wolfgang Dahmen, Karsten Urban:
Adaptive Wavelet Methods for Saddle Point Problems - Optimal Convergence Rates, Juli 2001.

01-08. Ronny Ramlau:
Morozov's Discrepancy Principle for Tikhonov regularization of nonlinear operators, Juli 2001.

01-09. Michael Wolff:
Einführung des Drucks für die instationären Stokes-Gleichungen mittels der Methode von Kaplan, Juli 2001.

01-10. Stephan Dahlke, Peter Maaß, Gerd Teschke:
Reconstruction of Reflectivity Desities by Wavelet Transforms, August 2001.

01-11. Stephan Dahlke:
Besov Regularity for the Neumann Problem, August 2001.

01-12. Bernard Haasdonk, Mario Ohlberger, Martin Rumpf, Alfred Schmidt, Kunibert G. Siebert:
h-p-Multiresolution Visualization of Adaptive Finite Element Simulations, Oktober 2001.

01-13. Stephan Dahlke, Gabriele Steidl, Gerd Teschke:
Coorbit Spaces and Banach Frames on Homogeneous Spaces with Applications to Analyzing Functions on Spheres, August 2001.

02-01. Michael Wolff, Michael Böhm:
Zur Modellierung der Thermoelasto-Plastizität mit Phasenumwandlungen bei Stählen sowie der Umwandlungsplastizität, Februar 2002.

02-02. Stephan Dahlke, Peter Maaß:
An Outline of Adaptive Wavelet Galerkin Methods for Tikhonov Regularization of Inverse Parabolic Problems, April 2002.

02-03. Alfred Schmidt:
A Multi-Mesh Finite Element Method for Phase Field Simulations, April 2002.

02-04. Sergey N. Dachkovski, Michael Böhm:
A Note on Finite Thermoplasticity with Phase Changes, July 2002.

02-05. Michael Wolff, Michael Böhm:
Phasenumwandlungen und Umwandlungsplastizität bei Stählen im Konzept der Thermoelasto-Plastizität*,* July 2002.

02-06. Gerd Teschke:
Construction of Generalized Uncertainty Principles and Wavelets in Anisotropic Sobolev Spaces, August 2002.

02-07. Ronny Ramlau:
TIGRA - an iterative algorithm for regularizing nonlinear ill-posed problems, August 2002.

02-08. Michael Lukaschewitsch, Peter Maaß, Michael Pidcock:
Tikhonov regularization for Electrical Impedance Tomography on unbounded domains, October 2002.

02-09. Volker Dicken, Peter Maaß, Ingo Menz, Jenny Niebsch, Ronny Ramlau:
Inverse Unwuchtidentifikation an Flugtriebwerken mit Quetschöldämpfern, October 2002.

02-10. Torsten Köhler, Peter Maaß, Jan Kalden:
Time-series forecasting for total volume data an charge back data, November 2002

02-11. Angelika Bunse-Gerstner:
A Short Introduction to Iterative Methods for Large Linear Systems, November 2002.

02-12. Peter Kunkel, Volker Mehrmann, Ronald Stöver:
Symmetric Collocation for Unstructured Nonlinear Differential-Algebraic Equations of Arbitrary Index, November 2002.

02-13. Michael Wolff:
Ringvorlesung:Distortion Engineering 2
Kontinuumsmechanische Modellierung des Materialverhaltens von Stahl unter Berücksichtigung von Phasenumwandlungen, Dezember 2002.

03-01. Michael Wolff, Michael Böhm, Serguei Dachkovski:
Volumenanteile versus Massenanteile – der Dilatometerversuch aus der Sicht der Kontinuumsmechanik, Januar 2003.

03-02 Daniel Kessler, Ricardo H. Nochetto, Alfred Schmidt*:*
A posteriori error control for the Allen-Cahn Problem: circumventing Gronwall's inequality, March 2003.

03-03 Michael Böhm, Jörg Kropp, Adrian Muntean:
On a Prediction Model for Concrete Carbonation based on Moving Interfaces - Interface concentrated Reactions, April 2003*.*

03-04 Michael Böhm, Jörg Kropp, Adrian Muntean:
A Two-Reaction-Zones Moving-Interface Model for Predicting Ca(OH)_2-Carbonation in Concrete, April 2003.

03-05 Vladimir L. Kharitonov, Diederich Hinrichsen:
Exponential estimates for time delay systems, May 2003.

03-06 Michael Wolff, Michael Böhm, Serguei Dachkovski, Günther Löwisch*:*
Zur makroskopischen Modellierung von spannungsabhängigem Umwandlungsverhalten und Umwandlungsplastizität bei Stählen und ihrer experimentellen Untersuchung in einfachen Versuchen, Juli 2003.