Zur isoperimetrischen Ungleichung und ihrer Verallgemeinerung durch Maz'ya

Hendrik Vogt

Die isoperimetrische Ungleichung besagt, dass

$$\mathrm{vol}_n(A)^{(n-1)/n} \leqslant c_n \mathcal{H}_{n-1}(\partial A)$$

für alle messbaren Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ endlichen Volumens $\mathrm{vol}_n(A)$ gilt, wobei $\mathcal{H}_{n-1}$ das $(n-1)$-dimensionale Hausdorffmaß bezeichnet, und

$$c_n = \frac{\mathcal{H}_{n-1}(\partial B(0,1))}{\mathrm{vol}_n(B(0,1))^{(n-1)/n}}\,.$$

Eine Ungleichung von Maz'ya besagt, dass

$$\|u\|_{n/(n-1)} \leqslant c_n \bigl(\textstyle\int_\Omega |\nabla u|\, dx + \int_{\partial\Omega} |u|\, d\mathcal{H}_{n-1} \bigr)$$

für alle $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W_1^1(\Omega)$ gilt, wobei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist, mit der gleichen Konstanten c_n wie oben. Setzt man u konstant $= 1$, so ergibt sich die isoperimetrische Ungleichung für $A = \Omega$ mit endlichem Volumen. Andererseits ergibt sich für $u \in C_\mathrm{c}^1(\Omega)$ die Sobolev-Ungleichung mit der bestmöglichen Konstanten.

Der Beweis obiger Ungleichungen ist bekannt für seine Komplexität. Für viele Anwendungen, z. B. auf den Robin-Laplace-Operator, spielt jedoch der Wert der Konstanten c_n keine entscheidende Rolle. Im Vortrag wird ein einfacher Beweis der Maz'ya-Ungleichung skizziert für den Fall, dass eine schlechtere Konstante c_n zugelassen wird.