10. Übung
Wiederholung, Verteilungen

Präsenzübungen für den 19.-21.6.

1. (*Aus einer Klassenarbeit für Klasse 9*)
   Du bist mit deiner bzw. deinem Liebsten auf der Osterwiese. An der Würfelbude gibt es aufregend rote Rosen, die man für das Werfen einer 6 bekommt. So eine willst du unbedingt haben, um sie ihm bzw. ihr zu überreichen. Jeder Wurf kostet 1 Euro. Leider hast du nur 5 Euro.
   Du würfelst so lange, bis du die Rose hast oder das Geld alle ist.
   a. Zeichne ein Baumdiagramm.
   b. Gib alle Versuchsausgänge (bezogen auf das ausgegebenen Geld) und deren Wahrscheinlichkeiten in einer Tabelle an.
   Die LehrerIn hat sich in der Aufgabe bemüht, die Begriffe „Zufallsvariable“ und „Erwartungswert“ zu vermeiden. Definieren Sie eine Zufallsvariable *X* in Bezug auf Aufgabenteil b.
   c. Berechnen Sie den Erwartungswert für *X*.
   d. Wie groß ist die W', die Rose nicht zu bekommen?

2. Schauen Sie schon einmal in die Aufgabe 6.

HAUSÜBUNGEN (Abgabe: Mo, 25.6.)

3. Schreiben Sie zu jedem Satz die Nummer auf Ihr Papier und dazu, ob er richtig oder falsch ist:
   i. Ein Ergebnis ist eine Menge von Ereignissen.
   ii. Ein Ereignis ist eine Teilmenge von Ω.
   iii. Der Ereignisraum ist ein Element von Ω.
   iv. Ω ist eine Teilmenge des Ereignisraums.
   v. Ω selbst ist ein Ereignis.
   vi. Ω selbst ist ein Ergebnis.

4. Man wirft eine 2-Cent-Münze und einen Würfel. Die Nicht-Zahl-Seite der Münze zählt als Null. Die Zufallsvariable *X* ist die Summe der beiden gezeigten Zahlen. Stellen Sie die Tabelle auf mit allen Ergebnissen für X und die zugehörige W'verteilung. Berechnen Sie E(X), V(X) und σ_X. Mit welcher W' trifft man die 2σ-Umgebung um den Erwartungswert?

5. Ableseübung für die Binomialverteilung
   Laden Sie die Datei für die Binomialverteilung herunter. Lösen Sie dann durch Verwenden dieser Datei die nachfolgenden Aufgaben

a. Lesen Sie für n = 87 und p = 0,275 P(X = 21) ab.
b. Lesen Sie für n = 33 und p = 0,13 P(X = 3) ab. Berechnen Sie den Wert ein weiteres Mal „zu Fuß“ mit Ihrem Taschenrechner.
c. Wie groß ist die W', dass man bei 53 Versuchen und einer Trefferw' von 0,62 30 bis 35 Treffer (einschließlich der Grenzen) erhält?
d. Wie groß ist die W', dass man bei 172 Versuchen und einer Trefferw' von 0,71 118 bis 135 Treffer (einschließlich der Grenzen) erhält? *(Tipp: verwenden Sie die kumulierte W'angabe)*
e. Wie groß ist die W', dass für n = 80 und p = 0,44 die Trefferzahl in der σ-Umgebung um den Erwartungswert liegt?
f. (*In Bayrischen Zentralabituraufgaben gibt es sehr oft eine „drei-mindestens-Frage“. Bayrische SchülerInnen trainieren das vor dem Abitur natürlich täglich.*)
Wie viele Versuche muss man bei einer Trefferw' von 63% mindestens machen, damit man mindestens mit einer W' von 98% mindestens 12 Treffer hat?

6. (die theoretische Aufgabe)
Bei der Wartezeitverteilung kann man die Zufallszahl so definiert, dass man die Gesamtzahl der Versuche zählt oder dass man die Zahl der Fehlversuche zählt. Dahinter steht der allgemeine Zusammenhang:
Gegeben ist eine Zufallsvariable X und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung, d.h. man kennt für alle möglichen Werte k_i, die X annehmen kann die W' $P(X= k_i)$. Dann kann man insbesondere $E(X)$ und $V(X)$ ausrechnen.
Nun definiert man eine neue Zufallsvariable Y über $Y = X-c,\ \ c\in\mathbb{R}$. Insbesondere hat Y die entsprechende W'verteilung, d.h. für alle k_i gilt: $P(Y= k_i - c) = P(X= k_i)$.
Dann gilt: $E(Y) = E(X) - c$ und $V(Y) = V(X)$.
a. Erläutern Sie die Umformungen für die Herleitung des Erwartungswertes.

$$E(Y)=\sum_i (k_i-c)\cdot P(Y=k_i-c) \qquad (1)$$
$$=\sum_i k_i\cdot P(Y=k_i-c)-\sum_i c\cdot P(Y=k_i-c) \qquad (2)$$
$$=\sum_i k_i\cdot P(X=k_i)-c\sum_i P(X=k_i) \qquad (3)$$
$$=E(X)-c \qquad (4)$$

b. Erläutern Sie die Umformungen für die Herleitung der Varianz.

$$V(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2 \qquad (1)$$
$$=\sum_i (k_i-c)^2\cdot P(Y=k_i-c)-E(Y)^2 \qquad (2)$$
$$=\sum_i k_i^2\cdot P(Y=k_i-c)-\sum_i 2k_ic\cdot P(Y=k_i-c)+\sum_i c^2\cdot P(Y=k_i-c)-E(Y)^2 \qquad (3)$$
$$=\sum_i k_i^2\cdot P(X=k_i)-\sum_i 2k_ic\cdot P(X=k_i)+\sum_i c^2\cdot P(X=k_i)-E(Y)^2 \qquad (4)$$
$$=\sum_i k_i^2\cdot P(X=k_i)-2c\sum_i k_i\cdot P(X=k_i)+c^2\sum_i P(X=k_i)-E(Y)^2 \qquad (5)$$

$$V(Y)=E(X^2)-2cE(X)+c^2-[E(X)-c]^2 \quad (6)$$

$$=E(X^2)-2cE(X)+c^2-\left[E(X)^2-2cE(X)+c^2\right] \quad (7)$$

$$=E(X^2)-E(X)^2 \quad (8)$$

$$=V(X) \quad (9)$$

c. Wenden Sie das an für die beiden verschiedenen Interpretationen bei der Wartezeitverteilung.