

## 7. Binomialverteilung

Die Binomial-Verteilung ist eine der wichtigsten diskreten Verteilungen. Auch hier betrachten wir ein Bernoulli-Experiment als Grundexperiment (s. auch 6.b. Wartezeitverteilung). D.h. wir interessieren uns für ein spezielles Ziel-Ereignis A (typischerweise als Treffer oder Erfolg bezeichnet) und unterscheiden somit „Treffer“ und „Nichttreffer“. Für den Treffer hat man die Wahrscheinlichkeit  $p$ . Also ist die Wahrscheinlichkeit für den Nichttreffer  $1-p = q$ . Dieses Experiment wird  $n$  Mal unverändert wiederholt (Bernoulli-Kette).

Als Zufallsvariable  $X$  betrachtet man nun die Anzahl  $k$  der Treffer. Dann ist

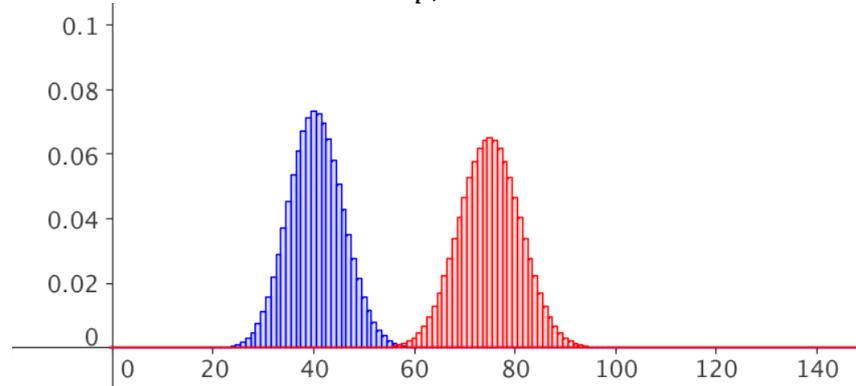
$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}. \text{ Oder mit der Abkürzung } q = 1-p \text{ } P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

Als konkretes Beispiel betrachten wir den fünffachen Würfelwurf. Wir wollen die Wahrscheinlichkeit für 3 Sechsen herausfinden.

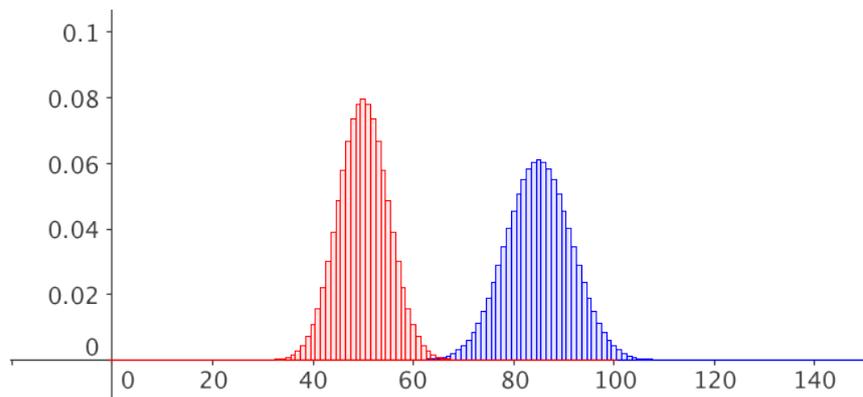
Dann haben wir die Größen:  $p = \frac{1}{6}$ ,  $q = \frac{5}{6}$ ,  $n = 5$ ,  $k = 3$ . Wir setzen die Werte ein:

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{1}{216} \cdot \frac{25}{36} = \frac{250}{216 \cdot 36} \approx 0,0323.$$

Stellt man die Binomialverteilung in einer Grafik dar ( $p$ - $k$ -Diagramm), ergibt sich ein „Berg“. Verändert man die Parameter  $n$  und  $p$ , so erhält man:



Bei festem  $n$ : Mit wachsendem  $p$  wandert der „Berg“ nach rechts. In der Abbildung ist für beide Verteilungen  $n = 150$ . Der linke „Berg“ ist die Verteilung für  $p = 0,27$ , der rechte für  $p = 0,5$ .



Bei festem  $p$ : Mit wachsendem  $n$  wird der „Berg“ flacher und breiter. In der Abbildung ist für beide Verteilungen  $p = 0,5$  fest. Der linke „Berg“ ist die Verteilung für  $n = 100$ , der rechte für  $n = 170$ .

Beispiel:

Ein Lehrer ist mit der Pünktlichkeit seiner Klasse unzufrieden und bietet ihnen folgende Belohnung an: Wenn in der (kritischen) Montagmorgenstunde nur 0 oder 1 SchülerIn verspätet sind, dann will er 2 € in die Klassenkasse zahlen.

In der Klasse sind 25 Schülerinnen und Schüler, jeder einzelne von ihnen ist zu 95% pünktlich (also gar nicht so schlecht, wie der Lehrer denkt). Ein Schuljahr hat 40 Schulwochen, also gehen 40 kritische Montage in die Wette ein.

Überschlagsmäßig rechnen die Schüler: 95% von 40 Stunden sind 38 Stunden. Also muss der Lehrer voraussichtlich 76€ zahlen.

Für die „Klassenpünktlichkeit“ sieht die Rechnung allerdings deutlich ungünstiger aus. Die Klassenpünktlichkeit berechnet sich mit der Binomialverteilung und folgenden

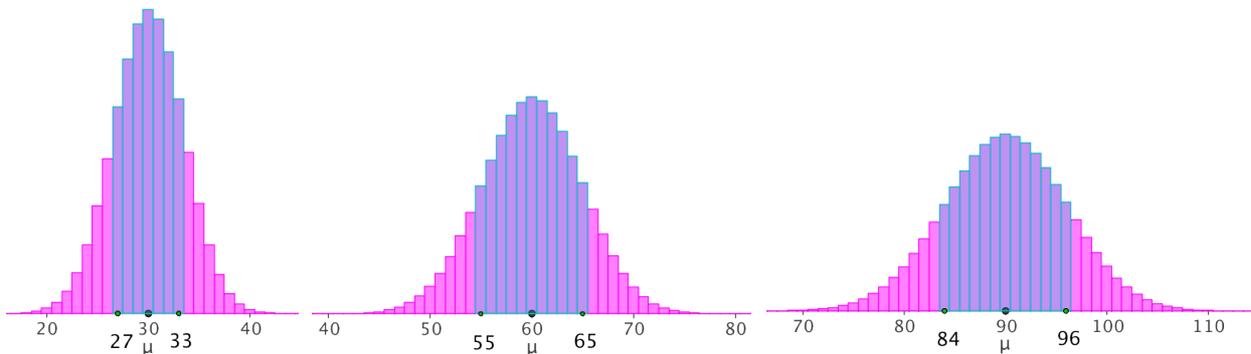
Parametern:  $p = 0,95$ ,  $n = 25$ ,  $k = 25$  oder  $k = 24$

$P(X = 25) + P(X = 24) \approx 0,2774 + 0,3650 = 0,6424$ . Das bedeutet, dass die Lehrkraft in ~64% der 40 Stunden 2€ bezahlen müsste. Das sind ca. 26 Stunden, also 52 €.

Für die Binomialverteilung gelten folgende Formeln für die charakteristischen Größen:

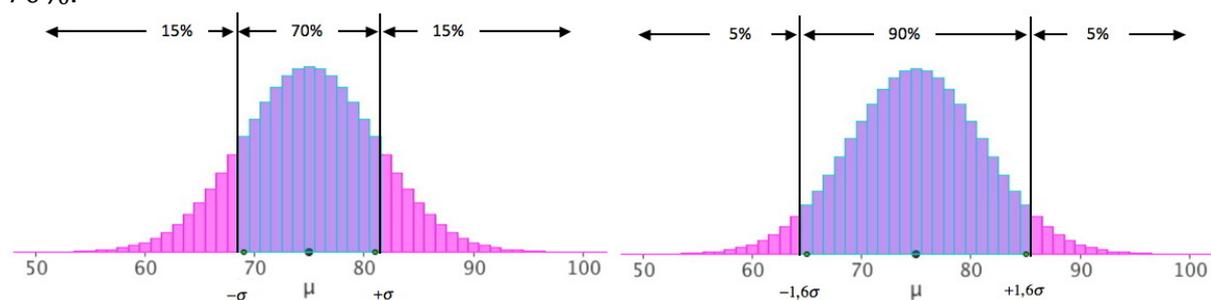
$$E(X) = n \cdot p, \quad V(X) = n \cdot p \cdot q, \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}.$$

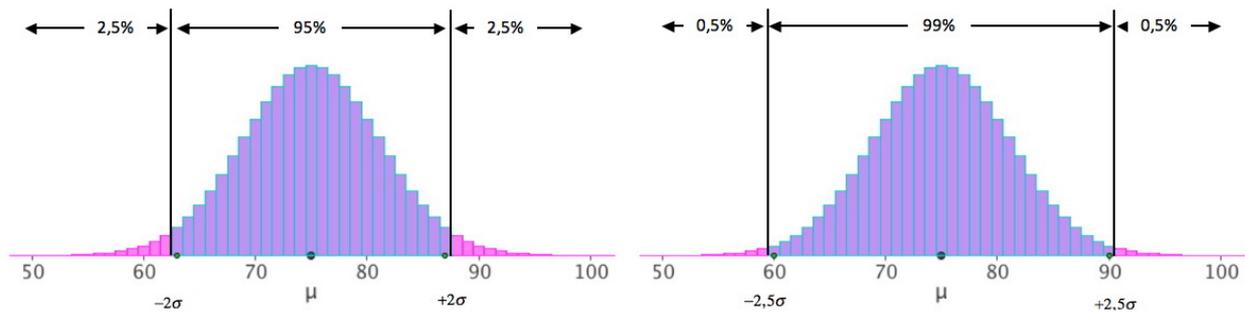
Diese charakteristischen Größen findet man in der grafischen Darstellung folgendermaßen wieder: der „Berg“ hat sein Maximum bei  $E(X)$ . Die Breite des Berges wird in  $\sigma$  gemessen.



In allen drei Beispielen ( $n = 50$ ,  $n = 100$ ,  $n = 150$ , stets  $p = 0,6$ ) stellt der dunklere, zentrale Bereich das Intervall  $[E(X) - \sigma, E(X) + \sigma]$  dar ( $E(X)$  wird hier, wie häufig, mit  $\mu$  bezeichnet). Man erkennt recht gut die Eigenschaft, dass der „Berg“ mit wachsendem  $n$  auch breiter wird.

Im Intervall  $[E(X) - \sigma, E(X) + \sigma]$  liegt die Trefferzahl mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 70%.





Wie in den obigen Abbildungen dargestellt, kann man für Binomialverteilungen ungefähr die folgenden Werte angeben:

Im Intervall  $[E(X) - \sigma, E(X) + \sigma]$  liegt die Trefferzahl mit einer  $W'$  von ca. 70%.

Im Intervall  $[E(X) - 1,6\sigma, E(X) + 1,6\sigma]$  liegt die Trefferzahl mit einer  $W'$  von ca. 90%.

Im Intervall  $[E(X) - 2\sigma, E(X) + 2\sigma]$  liegt die Trefferzahl mit einer  $W'$  von ca. 95%.

Im Intervall  $[E(X) - 2,5\sigma, E(X) + 2,5\sigma]$  liegt die Trefferzahl mit einer  $W'$  von ca. 99%.

Die Kenngrößen Erwartungswert  $E(X)$  und Standardabweichung  $\sigma$  wachsen beide mit zunehmender Versuchszahl  $n$ . Jedoch nicht in gleicher Weise. Das wollen wir kurz analysieren und damit die Frage beantworten: **Warum lohnt es sich, so viele Versuche wie möglich zu machen?**

Wir betrachten die Kenngrößen und ihre Abhängigkeit von der Versuchszahl  $n$ :

$E(X) = n \cdot p$  Der Erwartungswert wächst linear mit  $n$ .

Bsp.:  $n = 60, p = \frac{1}{6}, E(X) = 10 \rightarrow n = 240, p = \frac{1}{6}, E(X) = 40$

Also: Eine Vervierfachung der Versuchszahl  $n$  führt zu einer Vervierfachung des Erwartungswerts  $E(X)$ .

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{n} \cdot \sqrt{p \cdot q}$  Die Standardabweichung wächst, aber nur mit  $\sqrt{n}$ .

Bsp.:  $n = 60, p = \frac{1}{6}, \sigma = \sqrt{60 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \approx 2,887 \rightarrow n = 240, p = \frac{1}{6}, \sigma = \sqrt{240 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \approx 5,774$

Eine Vervierfachung der Versuchszahl  $n$  führt aber nur zu einer Verdoppelung der Standardabweichung  $\sigma$ .

D.h. relativ zur Versuchszahl wird die Standardabweichung schmaler und damit der „Berg“ schmaler.

Diese oben dargestellten Dinge sind die Grundlage für die Beurteilung statistischer Daten.

Betrachten wir auch dazu zwei Beispiele:

1. Bei dem herkömmlichen Unterricht gibt es eine Testaufgabe, die zu 45% richtig beantwortet wird. Eine neue Lehrkraft behauptet, die Didaktik verbessert zu haben, so dass der Unterricht besser wird. Die neue Lehrkraft lässt, die Klasse die sie angeblich „besser“ unterrichtet hat, dieselbe Testaufgabe machen. Die Klasse besteht aus 25 SchülerInnen, von denen 14 die Testaufgabe dann richtig beantworten. In wie fern ist dieses Ergebnis wirklich besser?

Die Daten für die zugrunde liegende Binomialverteilung sind:

$p = 0,45, n = 25$  Wir haben  $k = 14$  Treffer

$\Rightarrow \mu = 25 \cdot 0,45 = 11,25$

$\Rightarrow \sigma = \sqrt{25 \cdot 0,45 \cdot 0,55} \approx 2,5$

$$\underbrace{14 - 11,25}_{k - \mu} = \underbrace{2,75}_{\text{absolute Abweichung}} \approx \underbrace{1,1}_{\text{relative Abweichung bezogen auf Sigma}} \sigma$$

Die Behauptung: „14 Richtige von 25 weist auf einen besseren Unterricht hin“ ist richtig mit einer *Unsicherheit* von ca. 10%. Denn in der  $1,1\sigma$ -Umgebung um den Erwartungswert liegen ca. 80% der Werte, so dass jeweils 10% zu beiden Seiten außerhalb liegen.

**In der (didaktischen) Forschung** arbeitet man üblicherweise mit einer Unsicherheit von **ca. 5 %**. D.h. die „normalen“ Werte liegen in einer  $1,6\sigma$ -Umgebung. Das bedeutet in unserem Fall:  $p = 0,45$ ,  $n = 25$ , also  $\sigma \approx 2,5$ . Dann ist  $1,6 \cdot \sigma = 4$   $\mu + 1,6\sigma = 11,25 + 4 = 15,25$ . D.h. 15, besser noch 16, richtige Antworten (bei 25 Schülerinnen und Schülern) weisen einen „signifikant“ besseren Unterricht nach, auf dem „Signifikanzniveau“ von 5%. (Anmerkung: In dem vorliegenden Beispiel mit kleinen Zahlen könnten alle Wahrscheinlichkeiten direkt ausgerechnet werden. Die hier angewandte Vorgehensweise ist vor allem bei deutlich größeren Werten angebracht und hat dann auch deutlich kleinere Ungenauigkeiten.)

## 2. Lottospiel

Bei den Lottoziehungen werden natürlich nicht alle Zahlen stets gleich häufig gezogen. Es gibt dabei „statistische Schwankungen“. Wie sind diese einzuschätzen? Die hier abgebildete Tabelle zeigt die häufigsten und seltensten Zahlen für alle 4970 Ziehungen seit 1955 (Stand 18.06.2011).

Wir betrachten zunächst die Ziehungen der 6 Gewinnzahlen ohne die Zusatzzahl (oberer Teil der Tabelle)

$$n = 4970 \cdot 6 = 29820$$

$$p = \frac{1}{49} \quad \left. \vphantom{p = \frac{1}{49}} \right\} \mu = np \approx 608,6 \quad \sigma \approx 24,4$$

Für die Zahl 13 beträgt dann die Abweichung:  $552 - 608,6 = -56,6 \approx -2,3 \cdot \sigma$

Das liegt deutlich außerhalb der  $2\sigma$ -

Umgebung, so dass die Behauptung: „Die Lottomaschine benachteiligt die 13 auf Grund ihrer Konstruktion“ mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 99% richtig ist.

Ähnliche Aussagen kann man auch für die Bevorzugung der häufigsten Zahlen aufstellen, sowohl ohne als auch mit Berücksichtigung der Zusatzzahl.

Abweichung für die 43:  $651 - 608,6 = 43,4 \approx +1,7 \cdot \sigma$

Mit Berücksichtigung der Zusatzzahl:

Abweichung für die 13:  $652 - 710 = 58,0 \approx -2,2 \cdot \sigma$

Abweichung für die 38:  $759 - 710 = 49 \approx +1,9 \cdot \sigma$

Die häufigsten und seltensten Lottozahlen  
Auswertung ohne Zusatzzahl

häufigste Zahl:	wie oft:	seltenste Zahl:	wie oft:
43	651 mal	13	552 mal
26	649 mal	45	564 mal
38	648 mal	28	570 mal
25	643 mal	15	577 mal
31	641 mal	20	578 mal
49	639 mal	29	581 mal
6	635 mal	8	584 mal
27	635 mal	21	587 mal
41	631 mal	46	587 mal
9	630 mal	10	592 mal

» Gesamtauflistung

Auswertung mit Zusatzzahl

häufigste Zahl:	wie oft:	seltenste Zahl:	wie oft:
38	759 mal	13	652 mal
31	749 mal	20	658 mal
25	744 mal	28	664 mal
26	744 mal	45	668 mal
16	741 mal	12	674 mal
49	741 mal	15	674 mal
41	737 mal	21	687 mal
33	731 mal	29	690 mal
43	730 mal	24	693 mal
3	727 mal	5	693 mal

## 7.1 Alternativtest

Es gibt Situationen, bei denen zwei Wahrscheinlichkeiten für ein einfaches Bernoulli-Experiment zur Auswahl stehen. Es könnte z.B. sein, dass man für das Würfeln mit zwei Würfeln über ein Experiment entscheiden möchte, ob dabei die Reihenfolge zu unterscheiden ist oder nicht. Die beiden unterschiedlichen Annahmen führen auf zwei unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten. Z.B. ist für die Augensumme 4 bei der (falschen) Annahme, dass die Reihenfolge nicht beachtet werden muss, die Trefferwahrscheinlichkeit

$\frac{2}{21}$ . Beachtet man die Reihenfolge, so ist die Wahrscheinlichkeit  $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ . Die Alternative mit oder ohne Zurücklegen führt also zu den beiden alternativen Wahrscheinlichkeiten. Ein Experiment könnte nun klären, welche der beiden Annahmen richtig ist.

Da die beiden Wahrscheinlichkeiten  $\frac{2}{21}$  und  $\frac{1}{12}$  in einem Experiment schwer zu unterscheiden sind, konstruieren wir ein Beispiel, in dem die alternativen Wahrscheinlichkeiten stärker voneinander abweichen. So lassen sich die nachfolgenden Effekte leichter zeigen. Dieses konstruierte Beispiel wollen wir nun sehr genau analysieren.

### Beispiel:

Ein Spielgerätebetreiber wirbt für einen Spielautomaten, dass er mit einer Gewinnwahrscheinlichkeit von  $p_2 = \frac{1}{4} = 0,25$  funktioniere. Ein Spieler behauptet nun, dass er genau

Buch geführt habe und herausgefunden hat, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit nur

$p_1 = \frac{1}{5} = 0,2$  betrage. Sie sind Gutachter, haben den fraglichen Automaten zur Verfügung

und sollen nun entscheiden, welche Behauptung richtig ist.

Sie beschließen, auf dem Gerät genau  $n = 60$  Versuche zu machen und die Anzahl der Gewinne zu protokollieren. Für die Entscheidung zwischen  $p_1 = 0,2$  und  $p_2 = 0,25$  überlegen Sie sich folgendes:

Bei  $p_1 = 0,2$  ist der Erwartungswert  $\mu_1 = 60 \cdot 0,2 = 12$ , bei  $p_2 = 0,25$  ist  $\mu_2 = 60 \cdot 0,25 = 15$ . Der Mittelwert zwischen beiden Erwartungswerten ist 13,5, so dass Sie festlegen:

Erhalten Sie bei den  $n = 60$  Versuchen 13 oder weniger Gewinne, so entscheiden Sie sich für die geringere Gewinnwahrscheinlichkeit  $p_1 = 0,2$ . Ist dagegen die Zahl der Gewinne 14 oder mehr, so nehmen Sie  $p_2 = 0,25$  an.

Für beide Wahrscheinlichkeiten kann die Maschine zufällig alle Werte zwischen 0 und 60 Treffern liefern. D.h. das Ergebnis kann zufällig richtig oder falsch sein.

Nennen wir die Anzahl der Treffer  $X$ , so ergeben sich vier Möglichkeiten:

$n = 60$

Die tatsächliche Wahrscheinlichkeit ist $p_1 = 0,2$	
$P(X \leq 13) \approx 0,6944$ Sie entscheiden sich mit einer $W'$ von ca. 70% für die tatsächliche Wahrsch. $p_1 = 0,2$	$P(X \geq 14) \approx 0,3056$ Sie entscheiden sich mit einer $W'$ von ca. 30% für die falsche Wahrsch. $p_2 = 0,25$
Die tatsächliche Wahrscheinlichkeit ist $p_2 = 0,25$	
$P(X \leq 13) \approx 0,3349$ Sie entscheiden sich mit einer $W'$ von ca. 33% für die falsche Wahrsch. $p_1 = 0,2$	$P(X \geq 14) \approx 0,6651$ Sie entscheiden sich mit einer $W'$ von ca. 67% für die tatsächliche Wahrsch. $p_2 = 0,25$

Sie sehen, dass in beiden Fällen ihr Urteil reichlich unsicher ist.

Diese Unsicherheit erkennt man auch an der grafischen Darstellung zu beiden Binomialverteilungen, die sich recht weit überlappen.

Die in der obigen Tabelle dargestellten Wahrscheinlichkeiten für Fehlentscheidungen legen nahe, dass offenbar 60 Versuche nicht ausreichen, sondern die Anzahl der Versuche erhöht werden muss.

Nehmen wir recht willkürlich  $n = 180$ . Zur neuen Versuchsanzahl müssen Sie zunächst die Grenze neu berechnen, nach denen Sie sich jeweils für die eine oder andere Wahrscheinlichkeit entscheiden. Sie bestimmen sie wieder über die Erwartungswerte.

Bei  $p_1 = 0,2$  ist der Erwartungswert  $\mu_1 = 180 \cdot 0,2 = 36$ , bei  $p_2 = 0,25$  ist  $\mu_2 = 180 \cdot 0,25 = 45$ .

Der Mittelwert zwischen beiden Erwartungswerten ist 40,5, so dass Sie festlegen:

Erhalten Sie bei den  $n = 180$  Versuchen 40 oder weniger Gewinne, so entscheiden Sie sich für die geringere Gewinnwahrscheinlichkeit  $p_1 = 0,2$ . Ist dagegen die Zahl der Gewinne 41

oder mehr, so nehmen Sie  $p_2 = 0,25$  an.

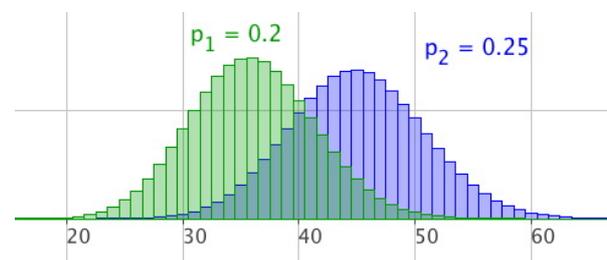
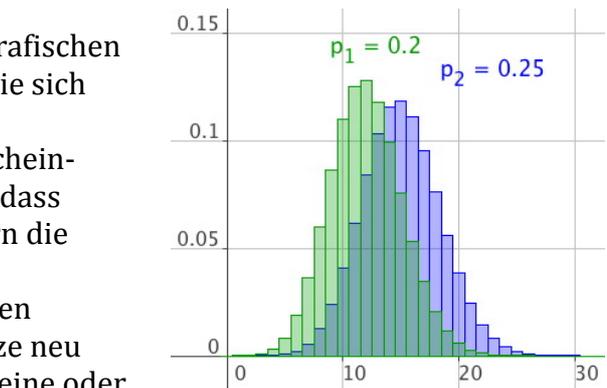
Wir können nun die gleiche Tabelle wie oben aufstellen.

$n = 180$

Die tatsächliche Wahrscheinlichkeit ist $p_1 = 0,2$	
$P(X \leq 40) \approx 0,8007$ Sie entscheiden sich mit einer $W'$ von ca. 80% für die tatsächliche Wahrsch. $p_1 = 0,2$	$P(X \geq 41) \approx 0,1993$ Sie entscheiden sich mit einer $W'$ von ca. 20% für die falsche Wahrsch. $p_2 = 0,25$
Die tatsächliche Wahrscheinlichkeit ist $p_2 = 0,25$	
$P(X \leq 40) \approx 0,2210$ Sie entscheiden sich mit einer $W'$ von ca. 22% für die falsche Wahrsch. $p_1 = 0,2$	$P(X \geq 41) \approx 0,7790$ Sie entscheiden sich mit einer $W'$ von ca. 78% für die tatsächliche Wahrsch. $p_2 = 0,25$

Durch die Erhöhung der Versuchszahl ist Ihnen tatsächlich gelungen, die Sicherheit des Urteils zu steigern, ca. 20% Unsicherheit sind aber immer noch recht groß.

Die Verbesserung der Aussagekraft kann man auch im Diagramm erkennen. Die beiden „Berge“ für  $n = 180$  sind bereits deutlicher zu unterscheiden als im Fall  $n = 60$ .



Bevor wir beispielbezogen neue Überlegungen anstellen, wollen wir die bisherigen Betrachtungen allgemein zusammenfassen.

Gegeben ist ein Bernoulli-Experiment mit zwei alternativen Wahrscheinlichkeiten  $p_1 < p_2$  für den Treffer. Durch ein Experiment, in dem das Bernoulli-Experiment  $n$  Mal wiederholt wird, soll entschieden werden, welche der beiden Trefferwahrscheinlichkeiten zutrifft. Für diese Entscheidung muss man eine Entscheidungsregel formulieren. Das bedeutet, dass man eine Grenze  $G$  findet oder definiert, mit der man zwei Intervalle bestimmen kann,

$I_1 = [0; G)$  und  $I_2 = [G; n]$ . Liegt die Trefferzahl  $X$  im unteren Intervall  $I_1$ , so entscheidet man sich für die geringere Wahrscheinlichkeit  $p_1$ , liegt die Trefferzahl  $X$  im oberen Intervall  $I_2$ , so entscheidet man sich für die höhere Wahrscheinlichkeit  $p_2$ .

Bei beiden Wahrscheinlichkeiten kann das Urteil zufällig korrekt oder falsch sein. Über die Binomialverteilung lässt sich in allen vier Fällen die Wahrscheinlichkeit berechnen.

Die Anzahl  $n$  der Versuche ist gegeben

Die tatsächliche Wahrscheinlichkeit ist $p_1$ , die kleinere der beiden Wahrscheinlichkeiten	
$P(X < G)$ über die Binomialverteilung berechnen, Parameter $n$ und $p_1$ . Mit dieser Wahrscheinlichkeit treffen Sie ein <b>korrektes</b> Urteil	$P(X \geq G)$ über die Binomialverteilung berechnen, Parameter $n$ und $p_1$ . Mit dieser Wahrscheinlichkeit treffen Sie ein <b>falsches</b> Urteil
Die tatsächliche Wahrscheinlichkeit ist $p_2$ , die größere der beiden Wahrscheinlichkeiten	
$P(X < G)$ über die Binomialverteilung berechnen, Parameter $n$ und $p_2$ . Mit dieser Wahrscheinlichkeit treffen Sie ein <b>falsches</b> Urteil	$P(X \geq G)$ über die Binomialverteilung berechnen, Parameter $n$ und $p_2$ . Mit dieser Wahrscheinlichkeit treffen Sie ein <b>korrektes</b> Urteil

Hier soll noch einmal betont werden, dass die Grenze  $G$  festgelegt wird, wobei auch außermathematische Gründe eine Rolle spielen können. Es gibt keinen Algorithmus, der die Grenze in eindeutiger Weise bestimmt. Allerdings ist die oben verwandte Methode des Mittelwertes der beiden Erwartungswerte der Problematik sehr gut angemessen.

Kehren wir zum Beispiel des Glücksautomaten zurück. Nehmen wir an, dass die Irrtumswahrscheinlichkeit von ca 20% vom Gericht nicht toleriert wird, dass aber andererseits nicht noch mehr Versuche als  $n = 180$  gemacht werden sollen (z.B. aus finanziellen Gründen). In der westeuropäischen Gerichtsbarkeit gilt der Grundsatz „in dubio pro reo“ („im Zweifel für den Angeklagten“).

Die Grenze  $G$ , die Sie aus vernünftigen Gründen auf den Mittelwert 40,5 der beiden Erwartungswerte gesetzt hatten, kann auch anders gewählt werden, um dem juristischen Prinzip gerecht zu werden. Das bedeutet hier, dass wir annehmen, dass der angeklagte Spielbetreiber Recht hat, dass also  $p_2$  die korrekte Wahrscheinlichkeit ist. Für diesen Fall wollen wir die Irrtumswahrscheinlichkeit, also  $P(X < G)$ , auf 5% senken. Dazu lassen wir uns vom Computer die Verteilung anzeigen und lesen die passende Grenze  $G$  ab (in der Tabelle für  $n = 180$ ,  $p = 0,25$ , Spalte für die kumulierte Wahrscheinlichkeit 5% suchen). Sie liegt zwischen 35 und 36, also z.B.  $G = 35,5$ .

Ist  $p_2 = 0,25$  richtig, so treffen wir mit einer Wahrscheinlichkeit von  $P(X \leq 35) \approx 0,0482$ , also weniger als 5% ein Fehlurteil.

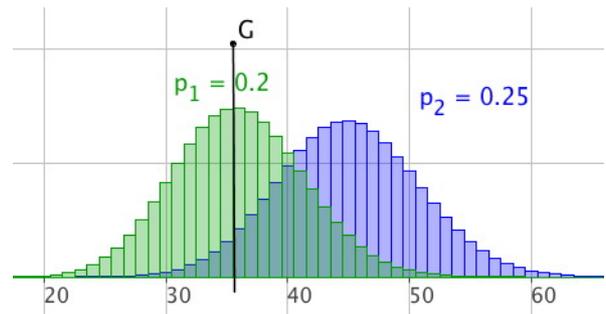
Schauen wir uns für diese Festlegung der Grenze den anderen Fehler

an. Der passiert, wenn tatsächlich  $p_1 = 0,2$  richtig ist, zufällig aber der Fall  $X \geq 36$  eintritt.

Mit dem Computer ermitteln wir  $P(X \geq 36) \approx 0,5297$ . Dieser Fehler bedeutet, dass der Spielgerätebetreiber zwar schuldig ist, sein Spielgerät nicht die versprochene Gewinnwahrscheinlichkeit erfüllt, er aber dennoch freigesprochen wird. Dieser unberechtigte Freispruch kann mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 53% eintreten.

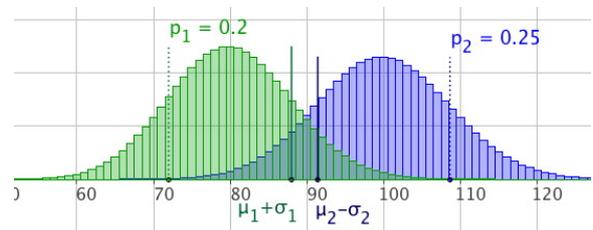
28	0.0007	0.0015
29	0.0012	0.0027
30	0.0021	0.0048
31	0.0034	0.0082
32	0.0052	0.0134
33	0.0078	0.0212
34	0.0113	0.0325
35	0.0157	0.0482
36	0.021	0.0692
37	0.0273	0.0965
38	0.0342	0.1307
39	0.0415	0.1722
40	0.0488	0.221
41	0.0555	0.2766
42	0.0613	0.3378
43	0.0655	0.4034
44	0.068	0.4714
45	0.0685	0.5399

Wir erkennen: Das Verringern des einen Fehlers (der Angeklagte wird verurteilt, obwohl er schuldig ist) führt zu einer deutlichen Erhöhung des anderen Fehlers (der Angeklagte wird freigesprochen, obwohl er schuldig ist). Das kann man auch recht gut im Diagramm für die Verteilungen sehen. Die Grenze liegt zwischen 35 und 36. Für den rechten „Berg“ ist der Fehlerbereich links von  $G$ , für den linken „Berg“ ( $p_1 = 0,2$ ) liegt der Fehlerbereich rechts von  $G$ . Das Verschieben der Grenze nach links hat zwar den Fehlerbereich für den rechten „Berg“ verringert, dafür aber den Fehlerbereich für den linken „Berg“ deutlich vergrößert.

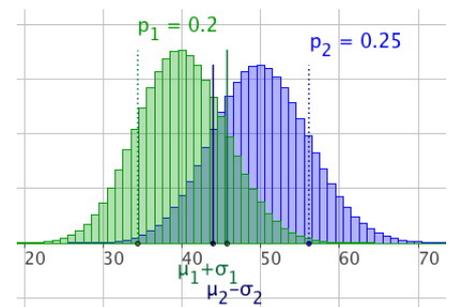


Alle die bisherigen unbefriedigenden Versuche werfen die Frage auf, was denn nun eine ausreichend gute Versuchszahl  $n$  ist. Dazu definieren wir ein Trennungskriterium, das uns in die Lage versetzt, die notwendige Versuchszahl auszurechnen.

In unserem Beispiel mit  $p_1 = 0,2$  und  $p_2 = 0,25$  schauen wir uns die grafische Darstellung an, in der zusätzlich die  $\sigma$ -Umgebungen für beide Verteilungen eingezeichnet sind (Punkte auf der waagerechten Achse).



Die obere Darstellung zeigt den Fall  $n = 400$ . Die „inneren“ Grenzen sind zusätzlich mit senkrechten Striche markiert und am unteren Rand beschriftet. Wir erkennen hier, dass beide  $\sigma$ -Umgebungen getrennt voneinander sind, sich nicht überlappen. Diese Eigenschaft können wir mathematisch formulieren:



$$\mu_1 + \sigma_1 < \mu_2 - \sigma_2.$$

Verringern wir die Anzahl  $n$  der Versuche, so können sich die beiden  $\sigma$ -Umgebungen überlappen. Die untere

Darstellung zeigt den Fall  $n = 200$ . Hier liegt die untere Grenze  $\mu_2 - \sigma_2$  der rechten  $\sigma$ -Umgebung links von der oberen Grenze  $\mu_1 + \sigma_1$  der linken  $\sigma$ -Umgebung. Also

$\mu_1 + \sigma_1 > \mu_2 - \sigma_2$  Es gibt also eine Versuchszahl  $n$ , bei der die beiden  $\sigma$ -Umgebungen gerade nebeneinander liegen. Diese Bedingung ist durch  $\mu_1 + \sigma_1 = \mu_2 - \sigma_2$  gegeben und sie dient dazu, die für diesen Fall notwendige Versuchszahl  $n$  auszurechnen.

$$\mu_1 + \sigma_1 = \mu_2 - \sigma_2$$

$$np_1 + \sqrt{np_1q_1} = np_2 - \sqrt{np_2q_2} \quad p_1, q_1, p_2, q_2 \text{ sind bekannte Größen, } n \text{ ist die gesuchte Unbekannte}$$

Wir dividieren die Gleichung durch  $\sqrt{n}$  und erhalten

$$\sqrt{np_1} + \sqrt{p_1q_1} = \sqrt{np_2} - \sqrt{p_2q_2} \quad \text{Nun werden die Terme mit } n \text{ nach links geordnet}$$

$$\sqrt{n}(p_1 - p_2) = -\sqrt{p_1q_1} - \sqrt{p_2q_2} \quad \text{Division durch } (p_1 - p_2) = -(p_2 - p_1)$$

$$\sqrt{n} = \frac{\sqrt{p_1q_1} + \sqrt{p_2q_2}}{p_2 - p_1} \quad \text{Nun muss zum Abschluss quadriert werden}$$

$$n = \left( \frac{\sqrt{p_1 q_1} + \sqrt{p_2 q_2}}{p_2 - p_1} \right)^2$$

Wird  $n$  so gewählt, so gilt gerade  $\mu_1 + \sigma_1 = \mu_2 - \sigma_2$ , was wir (etwas willkürlich) als „gut getrennte“ Verteilungen ansehen.

Wir wollen diesen Fall am Beispiel  $p_1 = 0,2$  und  $p_2 = 0,25$  durchrechnen.

$$n = \left( \frac{\sqrt{0,2 \cdot 0,8} + \sqrt{0,25 \cdot 0,75}}{0,25 - 0,2} \right)^2 \approx 277,5 \quad \text{Also muss die Versuchszahl } n = 278 \text{ oder größer}$$

sein, damit die beiden  $\sigma$ -Umgebungen getrennt sind.

Die Grenze zwischen den beiden Bereichen für die Entscheidung für die eine oder andere Wahrscheinlichkeit berechnen wir wieder über den Mittelwert der Erwartungswerte:

Bei  $p_1 = 0,2$  ist der Erwartungswert  $\mu_1 = 278 \cdot 0,2 = 55,6$ ,

bei  $p_2 = 0,25$  ist  $\mu_2 = 278 \cdot 0,25 = 69,5$ . Der Mittelwert zwischen beiden Erwartungswerten ist  $62,55$ , so dass Sie festlegen:

Erhalten Sie bei den  $n = 278$  Versuchen 62 oder weniger Gewinne, so entscheiden Sie sich für die geringere Gewinnwahrscheinlichkeit  $p_1 = 0,2$ . Ist dagegen die Zahl der Gewinne 63 oder mehr, so nehmen Sie  $p_2 = 0,25$  an.

Wir können nun die übliche Tabelle aufstellen.

$n = 278$

Die tatsächliche Wahrscheinlichkeit ist $p_1 = 0,2$	
$P(X \leq 62) \approx 0,8494$ Sie entscheiden sich mit einer $W'$ von ca. 85% für die tatsächliche Wahrsch. $p_1 = 0,2$	$P(X \geq 63) \approx 0,1506$ Sie entscheiden sich mit einer $W'$ von ca. 15% für die falsche Wahrsch. $p_2 = 0,25$
Die tatsächliche Wahrscheinlichkeit ist $p_2 = 0,25$	
$P(X \leq 62) \approx 0,1663$ Sie entscheiden sich mit einer $W'$ von ca. 17% für die falsche Wahrsch. $p_1 = 0,2$	$P(X \geq 63) \approx 0,8337$ Sie entscheiden sich mit einer $W'$ von ca. 83% für die tatsächliche Wahrsch. $p_2 = 0,25$

(Diese Werte passen recht gut zur „Faustformel“, dass die Treffer mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 70% in der  $\sigma$ -Umgebung von  $\mu$  liegen, folglich mit etwa 15% symmetrisch ober- bzw. unterhalb der Umgebung liegen. Siehe oben zu Beginn des Kapitels 7)

Natürlich lassen sich ähnliche Berechnungen durchführen, wenn man fordert, dass die beiden  $1,6 \sigma$ -Umgebungen oder  $2 \sigma$ -Umgebungen gerade getrennt nebeneinander liegen sollen.