6. Wahrscheinlichkeitsverteilungen

In diesem kurzen Kapitel wollen wir die bisherigen Betrachtungen in einen Begriff kondensieren, der Wahrscheinlichkeitsverteilung, und dazu einige wichtige Beispiele angeben. Dabei ist die Auflistung nur eine kleine Auswahl.

Gegeben ist ein Zufallsexperiment mit der Ergebnismenge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n\}$.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung gibt zu jedem Elementarereignis die zugehörige Wahrscheinlichkeit an. Das wird (meist) als Tabelle betrachtet:

Elementarereignis	$\{\omega_1\}$	···	$\{\omega_i\}$	···	$\{\omega_n\}$
Wahrscheinlichkeit	$P(\omega_1)$	···	$P(\omega_i)$	···	$P(\omega_n)$

Solch eine Auflistung ist also eine übersichtliche Art, alle wesentlichen Informationen zu einem Zufallsexperiment anzugeben.
Bei Zufallsvariablen bietet es sich an, für die Wahrscheinlichkeit eine Formel in Abhängigkeit von der zugeordneten Zahl k anzugeben.

Zum Beispiel: $P(X=k) = \frac{C}{k^2}$, wobei C eine Konstante ist.

<u>Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen</u>

a) Gleichverteilung

Experiment: Gegeben ist eine Urne mit den Kugeln 1,2,...,n. Es wird eine Kugel gezogen.
X ist die gezogene Zahl k. Dann gilt:

$$P(X=k) = \frac{1}{n}, \quad E(X) = \frac{n+1}{2}, \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

b) Geometrische Verteilung/Wartezeitverteilung

Wir betrachten zunächst ein Grundexperiment, bei dem lediglich Treffer (W' von p) und Nichttreffer (W' 1-p) unterschieden wird. Solch ein einfaches Experiment wird Bernoulli-Experiment genannt
Experiment: Ein Bernoulli-Experiment wird so lange wiederholt, bis der erste Treffer eintritt.
X ist die Anzahl k der Versuche, die insgesamt gemacht wird. D.h. man macht zunächst k -1 Fehlversuche, um dann den einen Treffer zu machen. Hierbei gilt:

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p, \quad E(X) = \frac{1}{p}, \quad V(X) = \frac{1}{p^2} \cdot (1-p)$$

c) Hypergeometrische Verteilung

Experiment: Man hat eine Urne mit a weißen und b schwarzen Kugeln. Es werden $n \le a$ Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Das Ergebnis wird ohne Berücksichtigung der Reihenfolge betrachtet.

X ist die Anzahl k der weißen Kugeln unter den n gezogenen. Hier gilt:

$$P(X=k)=\frac{\binom{a}{k}\cdot\binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}},\quad E(X)=n\cdot\frac{a}{a+b},\quad V(X)=n\cdot\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a+b-n}{a+b-1}$$

Übungsaufgaben zu Kapitel 6

1. Beim Würfelspiel „Differenz trifft“ wird mit zwei Würfeln gewürfelt und die Differenz „höhere Augenzahl minus niedrigere Augenzahl“ errechnet. Es sei X die erzielte Differenz. Geben Sie für X die W'verteilung in einer Tabelle an und berechnen Sie $E(X)$, $V(X)$ und σ. Mit welcher W' fällt X in die σ –Umgebung von $E(X)$?

2. In einer Urne liegen 10 weiße und 30 schwarze Kugeln. Sie ziehen 5 Kugeln ohne zurücklegen. Es sei X die Anzahl der gezogenen weißen Kugeln.
   a. Geben Sie für X die W'verteilung in einer Tabelle an.
   b. Berechnen Sie aus der Tabelle unter a. $E(X)$, $V(X)$ und σ “zu Fuß“.
   c. Berechnen Sie $E(X)$, $V(X)$ mit den in der Vorlesung angegebenen Formeln. Vergleichen Sie mit b.
   d. Mit welcher W' fällt X in die σ –Umgebung von $E(X)$?

3. In einer Urne liegen die Kugeln mit den Nummern von 1 bis 9. Es wird eine Kugel gezogen. X ist die gezogene Zahl.
   a. Sehen Sie im Skript nach, wie Sie in diesem Fall mit vorgefertigten Formeln E(X) und V(X) berechnen können und tun Sie das für dieses Experiment.
   b. Berechnen Sie V(X) „zu Fuß“, indem Sie die betreffende Summe berechnen.
   c. Berechnen Sie aus V(X) σ und berechnen Sie dann die W', mit der X in die σ – Umgebung von E(X) fällt.