5. Zufallsvariablen

Bei Zufallsvariablen geht es darum, ein Experiment durchzuführen und dem entstandenen Ergebnis eine Zahl zuzuordnen. Das ist nicht immer von vorn herein der Fall. Man denke nur an statistische Erhebungen, bei denen nach einem nicht numerischen Merkmal gefragt wird, z.B. der Augenfarbe oder der Partei, die man bei der letzten Bundestagswahl gewählt hat. Die Bedeutung der *Zufallsvariable* liegt darin, dass durch sie die Verbindung zwischen dem Resultat eines Zufallsexperiments und einem numerischen Wert hergestellt wird.
Der Begriff „Zufallsvariable“ ist historisch bedingt und eigentlich eine schlechte Wahl, da der Begriff in die Irre führt. Tatsächlich ist eine Zufallsvariable eine Funktion. Sie ordnet jedem Element ω aus der Ergebnismenge Ω einen Zahlwert zu.
Üblich für die Bezeichnung der Zufallsvariable sind *X*, *Y*, *Z*.
Symbolisch würde man also für die Zufallsvariable *X* schreiben:

$$X:\begin{cases}\Omega \to \mathbb{R} \\ \omega \mapsto X(\omega)\end{cases}$$

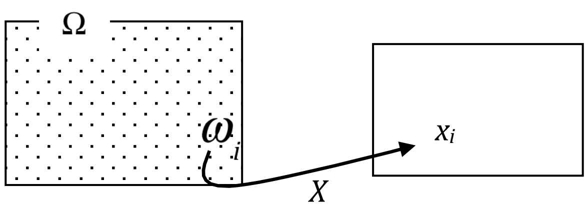
Als erstes Beispiel ziehen wir den *zweifachen Würfelwurf* heran:
Es wird z.B. geworfen: (①,③). Das ist zunächst ein Paar von Augenzahlen. Sehr oft ordnet man diesem Ergebnis die Augensumme zu. (Das eigentliche Experiment „zweifacher Würfelwurf“ wird sehr häufig damit verwechselt.) Ist also *X* die dementsprechende Zufallsvariable, so können wir schreiben: *X*(①,③) = 4.

Als weiteres Beispiel schauen wir uns den *5-fachen Münzwurf* an. Es ist ein Laplace-Experiment, d.h. alle Ergebnisse sind gleichberechtigt:
Als Beispiel nehmen wir an, dass geworfen wird: (①, Ⓐ, Ⓐ, ①, ①). Dieses Ergebnis ist keine Zahl, sondern eine Folge aus fünf Symbolen. Wir können aber jedem Ergebnis eine Zahl zuordnen, indem wir die Anzahl der ① zuordnen. In unserem Beispiel wird also dem Ergebnis (①, Ⓐ, Ⓐ, ①, ①) eine 3 zugeordnet. Bei der Betrachtung der geworfenen Symbole sind insgesamt $2^5=32$ Ergebnisse möglich. Durch die Zufallsvariable *X* werden nun aber nur noch die Ergebnisse 0,1,2,3,4,5 unterschieden. Es findet also eine Vergröberung der Ergebnismenge statt und man muss auch beachten, dass die entsprechenden Elementarereignisse nicht mehr gleichwahrscheinlich sind.

Das *Warten auf Erfolg* ist ein ebenso bekanntes Beispiel. Wir betrachten dabei das Würfeln mit einem Würfel und definieren (wie so oft) die ⑥ als Erfolg. Nun werfen wir so lange, bis eine auftrifft. Diesem Ergebnis ordnen wir die Anzahl der Fehlversuche zu. Die Anzahl der Fehlversuche kann prinzipiell beliebig groß werden. Damit hat die Zufallsvariable unendlich viele Ergebnisse.

<u>Berechnung von W’ für die Elementarereignisse einer Zufallsgröße</u>

Wir betrachten folgende Situation: Ein Zufallsexperiment hat zunächst die unmittelbare Ergebnismenge Ω. Durch die Zufallsvariable X wird jedem Ergebnis ω_i eine Zahl x_i zugeordnet:



Kennt man nun die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse von Ω, so ergeben sich daraus die Wahrscheinlichkeiten für die Elementarereignisse von X auf folgende Weise: Unter $P(X = x_i)$ versteht man die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable den Wert x_i annimmt. Das ist immer dann der Fall, wenn ein Ergebnis aus Ω eintritt, das durch X den Zahlwert x_i zugeordnet wird.
$P(X = x_i) = P(\{\omega_a\}) + P(\{\omega_b\}) + \ldots + P(\{\omega_z\})$ wobei gilt: $X(\omega_a) = x_i, \ldots, X(\omega_z) = x_i$.

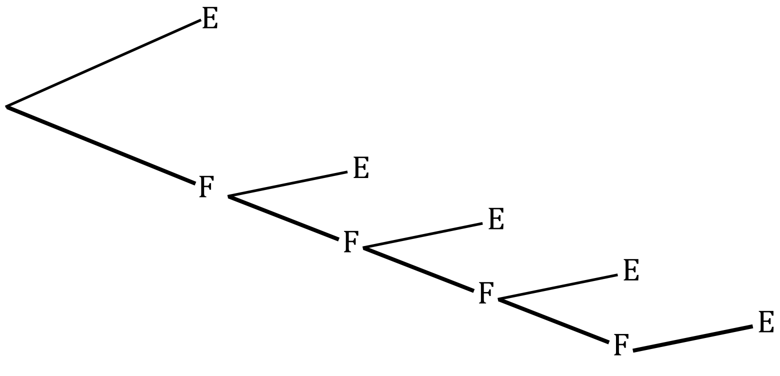
Dazu greifen wir noch einmal das Beispiel von oben auf:
(5-facher Münzwurf mit einer 1-Euro-Münze)
X: jedem Wurf wird die Anzahl der „1“en zugeordnet. Jetzt stellt sich die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, dass X=3 ist (also dass die Anzahl der „1“en gleich 3 ist):

$$P(X = 3) = P(111AA) + P(11A1A) + P(11AA1) + \ldots + P(AA111) = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \ldots + \frac{1}{32}$$

Anzahl der Permutationen von 1,1,1,A,A ist: $\frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

Daraus ergibt sich abschließend: $P(X = 3) = 10 \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{16}$

2. Beispiel: Warten auf eine ⑥ beim Würfeln
Wir definieren als Zufallsvariable
X: Anzahl der Fehlversuche
Dann ist die Frage, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass nach genau 4 Fehlversuchen eine ⑥ auftaucht, die Frage nach $P(X = 4)$. In der direkten Ergebnismenge Ω wird nur der Würfelkette FFFFE (F – Fehlwurf, E – Erfolg) die Zahl 4 zugeordnet.
Die Würfelkette ist in dem zugehörigen Baum ein einziger Zweig.



Jeder Fehlwurf hat die Wahrscheinlichkeit von $\frac{5}{6}$, der Erfolg $\frac{1}{6}$. Also gilt:

$$P(X = 4) = P(FFFFE) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{625}{7776}$$

Die Zuordnung von Zahlen zu Zufallsergebnissen hat den Vorteil, dass man das Zufalls-experiment in wenigen Kenngrößen zusammenfassen kann.

Der **Median** ist der mittlere Wert in der nach der Größe geordneten Anordnung aller Werte. Ein einfaches Beispiel: $\{1,2,5,6, \underbrace{8}_{\text{Median}} ,10,10,10,13\}$.

Für den Fall, dass eine ungerade Anzahl von Werten durch die Zufallsvariable zugeordnet wird, ist also der Median eindeutig definiert.
Anders verhält es sich bei einer geraden Anzahl von Elementen. Beispiel: $\{1,2,4,6,7,9\}$.
Hier gibt es kein mittleres Element. Eine mögliche Definition ist dann , den Mittelwert aus den beiden mittleren Elementen zu bilden. Das wäre hier $\frac{4+6}{2}=5$. Dieses Vorgehen hat aber den Nachteil, dass der Median dann nicht Element der Menge sein muss.
Daher weicht man dann auf den Wert an der Stelle $\frac{n}{2}$ aus, wenn in der Menge n Elemente sind, n gerade.

Eine weitere, wichtige Kenngröße ist der **Erwartungswert**.

$E(X)=\sum_i x_i \cdot P(X=x_i)$ oder in Worten ausgedrückt:
E(X) = Summe über Zahl · W' für das Auftreten der Zahl

Als Beispiel dazu wieder den 5-fachen Münzwurf:

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{32}+1\cdot\frac{5}{32}+2\cdot\frac{10}{32}+3\cdot\frac{10}{32}+4\cdot\frac{5}{32}+5\cdot\frac{1}{32}=\frac{1}{32}(0+5+20+30+20+5)=\frac{80}{32}=\frac{10}{4}=2{,}5$$

Sind die Elementarereignisse von X gleichwahrscheinlich, so ist der Erwartungswert der (arithmetische) Mittelwert. Auch das soll an einem Beispiel erläutert werden, dem einfachen Würfeln:

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X)=(1+2+3+4+5+6)\cdot\frac{1}{6}=3{,}5$$

Median und Erwartungswert geben beide die „Mitte“ der Zahlen an, die durch eine Zufallsgröße als Werte auftauchen. Neben dieser mittleren Lage ist bei einer Verteilung charakteristisch, wie weit die Werte um diesen mittleren Wert streuen. Hierzu ein einführendes **Beispiel**:

Bei einer Tischler-Abschlussprüfung sollen die Kandidaten eine Dachlatte mit einer Länge von 1 m messen. Hierbei wurden folgende Ergebnisse notiert:

Kandidat 1:	100,1cm	100,2cm	99,7cm	99,9cm	100,1cm
Kandidat 2:	100,2cm	100,4cm	100,5cm	99,5cm	99,4cm

Gemäß den Arbeiten von C.F. Gauß misst man nicht die Absolute Abweichung vom Erwartungswert, sondern das Quadrat dieser Abweichung. Das sich so ergebende Maß für die Streuung ist die Varianz V(X).
Im obigen Beispiel ist der Erwartungswert (= Mittelwert) genau 1 m. Die Summe der quadratischen Abweichungen ist dann:
Kandidat 1: $0{,}1^2+0{,}2^2+(-0{,}3)^2+(-0{,}1)^2+0{,}1^2 = 0{,}01+0{,}04+0{,}09+0{,}01+0{,}01 = 0{,}16$
Kandidat 2: $0{,}2^2+0{,}4^2+0{,}5^2+(-0{,}5)^2+(-0{,}6)^2 = 1{,}06$
Die Varianz ist also beim zweiten Kandidaten deutlich größer.

Die exakte Varianz rechnet sich folgendermaßen:

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-E(x)\right)^2\cdot P(X=x_i)$$

Das Aufsummieren und die Multiplikation ist wieder das Berechnen eines Erwartungswertes, nun allerdings der der quadratischen Abweichungen vom Erwartungswert:

$$V(X)=E\left(\left(x-E(x)\right)^2\right)$$

Auch hierzu ein einfaches **Beispiel**:
Gegeben ist die Zufallsvariable X durch folgende Tabelle.

x_i	1	3	4	6
P(X=x_i)	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$
$\left(x_i-E(x)\right)^2$	4	0	1	9

Zur Berechnung der Varianz muss man zunächst den Erwartungswert ausrechnen:

$$E(x)=1\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{5}{12}+4\cdot\frac{1}{4}+6\cdot\frac{1}{12}=3$$

Zur Berechnung der Varianz haben wir eine dritte Zeile angefügt, in der die Quadrate der Abweichungen vom Erwartungswert $E(X)$ notiert sind. Damit lässt sich sehr einfach die Varianz ausrechnen:

$$V(X)=4\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{5}{12}+1\cdot\frac{1}{4}+9\cdot\frac{1}{12}\;=\;1+0+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\;=\;2$$

Es gibt außerdem noch eine alternative Formel zur Berechnung der Varianz. Diese ist besonders dann vorteilhaft, wenn der Erwartungswert keine „glatte“ Zahl ist. Durch Umformung erreichen wir:

$$V(X)=E\left(\left(X-E(X)\right)^2\right)$$

$$\begin{aligned}V(X)&=E\left(X^2-2\cdot x\cdot E(X)+E(X)^2\right)\\&=E(X^2)-E\left(2\cdot X\cdot E(X)\right)+E\left(E(X)^2\right)\\&=E(X^2)-2\cdot E(X)\cdot E(X)+E(X)^2\\&=E(X^2)-2\cdot E(X)^2+E(X)^2\end{aligned}$$

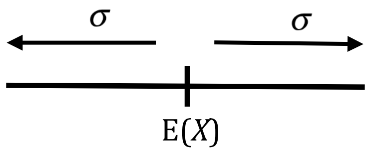
$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$$

Auch diese Formel wollen wir auf unser obiges Beispiel anwenden:

$$V(X) = 1\cdot\frac{1}{4} + 9\cdot\frac{5}{12} + 16\cdot\frac{1}{4} + 36\cdot\frac{1}{12} - 3^2$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{15}{4} + 4 + 3 - 9 = 2$$

Da man die Varianz aber schlecht interpretieren kann, benutzt man als weiteres Maß die sogenannte **Standardabweichung**. Die Standardabweichung wird mit σ (Sigma) bezeichnet und hat die Formel: $\sigma = \sqrt{V(X)}$.

In unserem Beispiel beträgt die Standardabweichung also $\sigma = \sqrt{2} \approx 1{,}4$.
Die Standardabweichung bekommt durch die Betrachtung der Sigma-Umgebung um den Erwartungswert eine große Bedeutung. Dabei betrachtet man um den Erwartungswert ein Intervall, dass durch $E(X)-\sigma$ als unterer und $E(X)+\sigma$ als obere Grenze gegeben ist. Grafisch sieht das so aus:



Im obigen Beispiel ergibt sich konkret für die σ-Umgebung um $E(X)$:
$E(X) = 3$, $\sigma = \sqrt{2} \approx 1{,}4$ Also ist $E(X)-\sigma \approx 3-1{,}4 = 1{,}6$ und $E(X)+\sigma \approx 3+1{,}4 = 4{,}4$.
Also ist die σ-Umgebung um $E(X)$ das Intervall [1,6 ; 4,4].