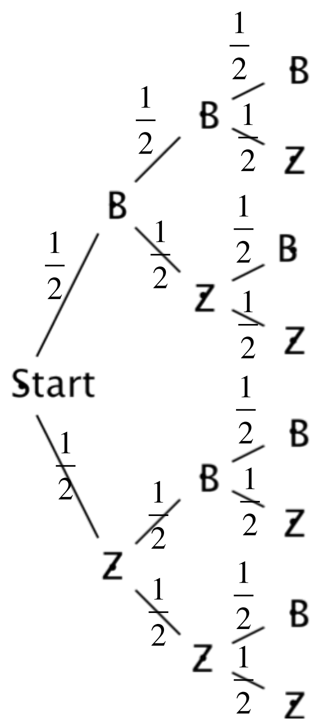
2. Mehrstufige Zufallsversuche und Baumdiagramme

Entsprechend der Anmerkung in 1.3 wollen wir nun auf der Basis von „bekannten“ Wahrscheinlichkeiten weitere Schlüsse ziehen. Dabei gehen wir immer von einem gegebenen Wahrscheinlichkeitsraum aus, d.h. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ist bekannt.

2.1 Ein Versuch wird mehrfach wiederholt

Dabei nehmen wir an, dass eine nachfolgende Durchführung des Experiments nicht vom Ausgang des vorhergehenden abhängt. Das ist typischerweise gegeben, wenn ein Gegenstand geworfen wird (Münze, Würfel o.ä.), ein Glücksrad gedreht wird oder ein Gegenstand aus einer Lostrommel gezogen wird und für die nächste Ziehung zurückgelegt wird (Ziehen mit Zurücklegen).



Beispiel: Dreifaches Werfen einer Münze
Für den einfachen Münzwurf kennen wir:
$\Omega = \{B, Z\}$ für Bild oder Zahl, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{B\}, \{Z\}, \Omega\}$ und $P(B) = P(Z) = \frac{1}{2}$.

Für eine übersichtliche Darstellung wählt man in solch einem Fall häufig ein Baumdiagramm:
Der Ausgangspunkt ist immer ein neutraler Punkt, hier mit „Start“ bezeichnet. Von dort zeichnet man so viele Zweige, wie Ω Elemente hat, hier 2; einen für „Bild B“, einen für „Zahl Z“. Da sich das Experiment während der Durchführung nicht ändert, sehen alle Verzweigungen gleich aus.

An die Zweige schreibt man jeweils die Wahrscheinlichkeit, die für dieses Ereignis gilt.

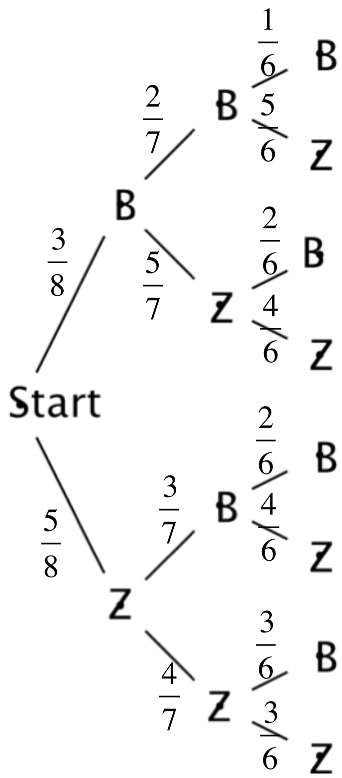
Die Ergebnisse des dreistufigen Experiments sind 3-Tupel, z.B. (B, Z, B).
Für die Wahrscheinlichkeit der entsprechenden Elementarereignisse multipliziert man die Wahrscheinlichkeiten, die entlang des betreffenden Pfades im Baumdiagramm liegen. (Pfadregel)

D.h. wenn die Wahrscheinlichkeit für Bild oder Zahl jeweils $\frac{1}{2}$ ist, so ist die Wahrscheinlichkeit für {(B, Z, B)} $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Betrachtet man ein Ereignis, das sich aus mehreren Elementarereignissen zusammensetzt, so gilt die bereits bekannte Additionsregel.
Betrachten wir im Beispiel das Ereignis D = „zwei Zahlen“ = {(Z, Z, B), (Z, B, Z), (B, Z, Z)}, so hat man die einzelnen Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Pfade zu addieren.
P(„zwei Zahlen“) = $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.

2.2 Mehrere Versuche werden nacheinander ausgeführt

Hier lassen wir nun zu, dass die Versuche, die ausgeführt werden, verschieden sind oder dass die Bedingungen für die weitere Versuchsdurchführung vom vorhergehenden Ergebnis abhängig sind.
Beispiele: Es werden verschiedene Gegenstände geworfen, z.B. eine Münze und ein Würfel. Es wird gewürfelt um danach zu entscheiden, aus welcher Lostrommel man ziehen darf.
Beim Ziehen von Losen oder Kugeln werden die gezogenen Gegenstände nicht wieder zurückgelegt, so dass sich der Inhalt der Lostrommel von Zug zu Zug (ggfs. nur leicht) verändert.
Bearbeitet man das Problem mit einem Baumdiagramm, so ist das Vorgehen im fertigen Baumdiagramm genau so wie oben beschrieben. Allerdings ist beim Aufstellen des Diagramms besondere Sorgfalt aufzuwenden.
Beispiel: In einer Urne liegen 3 Kugeln mit einem Buchstaben (B) und 5 Kugeln mit einer Zahl (Z). Man zieht aus der Urne drei Kugeln ohne Zurücklegen. Das Baumdiagramm hat dieselbe Struktur wie im oberen Fall. Allerdings sind die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Zweige zu modifizieren. Die Ergebnisse für die Wahrscheinlichkeiten für die Elementarereignisse erhält man weiterhin durch die Pfadregel:



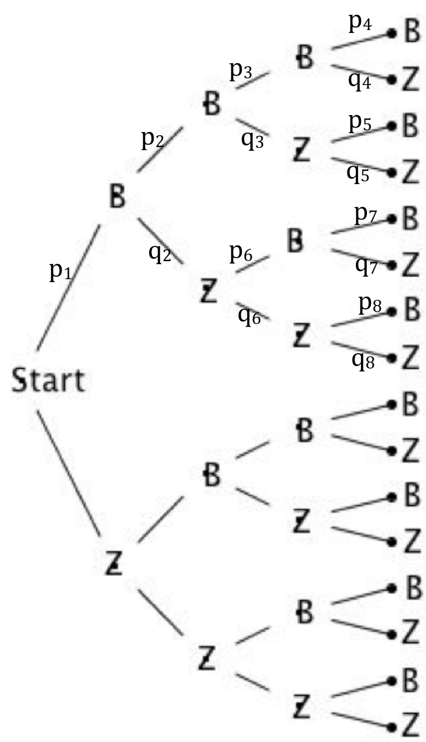
$$P(\mathrm{B,Z,B}) = \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{6} = \frac{5}{56} \approx 0{,}09$$

Die Wahrscheinlichkeit zusammengesetzter Ereignisse erhält man auch wieder über die Summenregel. Hier muss man allerdings die zugehörigen Einzelwahrscheinlichkeiten getrennt berechnen.

$$P(\text{"zwei Zahlen"}) = P(\mathrm{Z,Z,B}) + P(\mathrm{Z,B,Z}) + P(\mathrm{B,Z,Z})$$
$$= \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} + \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6} + \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}$$
$$= \frac{5}{28} + \frac{5}{28} + \frac{5}{28} = \frac{15}{28} \approx 0{,}536$$

2.3 Verkürzte Baumdiagramme

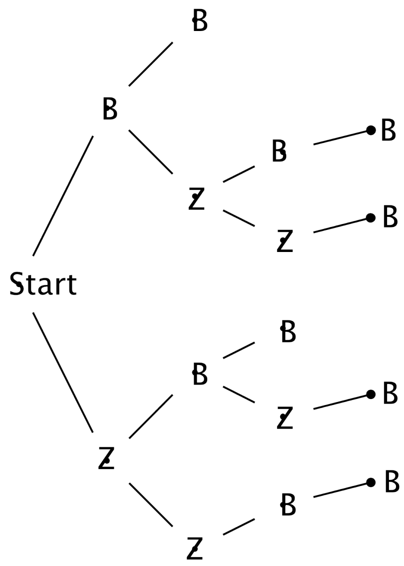
Bei manchen Aufgabenstellungen kommt es vor, dass ein Ereignis frühzeitig erfüllt ist und die weiteren Teilausgänge des mehrstufigen Versuchs daran nichts mehr ändern. Nehmen wir die obigen Beispiele, bei der man immer auf jeder Stufe B oder Z erzielen kann. Nun betrachten wir vier Stufen und fragen nach der Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens zwei Mal B erzielt wird.
Das vollständige Baumdiagramm sähe dann wie dargestellt aus.
Dabei seien die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Zweige nicht festgelegt. Im oberen Bereich haben wir allgemeine Bezeichnungen eingeführt, wobei gilt:
$p_i + q_i = 1, \quad i = 1,..,8$.



Zum Ereignis „wenigstens zwei B“ gehören dann unter anderen die Elementarereignisse {BBBB}, {BBBZ}, {BBZB} und {BBZZ}. Berechnet man für diesen Teil die Wahrscheinlichkeit, erhält man:

$$p_1p_2p_3p_4 + p_1p_2p_3q_4 + p_1p_2q_3p_5 + p_1p_2q_3q_5$$
$$= p_1p_2\left(p_3p_4 + p_3q_4 + q_3p_5 + q_3q_5\right)$$
$$= p_1p_2\left(p_3\left(p_4 + q_4\right) + q_3\left(p_5 + q_5\right)\right)$$
$$= p_1p_2\left(p_3 \cdot 1 + q_3 \cdot 1\right)$$
$$= p_1p_2$$

Diese Rechnung bestätigt die Überlegung, dass man nach zwei Mal „B“ den Versuch abbrechen kann, da nun mit Sicherheit das Ereignis „wenigstens zwei B“ eintreten wird. Dementsprechend kann auch der Baum verkürzt werden und es müssen nicht mehr die nachfolgenden Zweige gezeichnet werden. Lässt man auch noch die Zweige weg, die nicht zum Ereignis „wenigstens zwei B“ gehören, so kann der Baum wie dargestellt verkürzt werden.



Übungsaufgaben zum Kapitel 2

Ü1 In einem Abwasserrohr werden zwei Filter eingebaut, durch die das Wasser nacheinander läuft und die das Wasser reinigen. Der erste Filter beseitigt 40% des Schmutzes, der zweite Filter 50%. Wie viel Schmutz ist aus dem Abwasser beseitigt, nachdem es durch beide Filter gelaufen ist?

Ü2 Wettervorhersage
An einem Fantasieort entwickelt sich das Wetter nach folgendem Muster von Tag zu Tag (wir unterscheiden nur die beiden Wetterergebnisse „trocken“ und „regnerisch“): ist es trocken, so bleibt es mit einer W’ von 30% trocken, ist es regnerisch, so bleibt es mit einer W’ von 70% regnerisch. Heute ist es regnerisch. Wie groß ist die W’, dass es übermorgen trocken ist?

Ü3 In einer Schachtel liegen 4 Paar (= 8 einzelne) Socken, 1 Paar ist blau, die anderen 3 Paar sind grau. Ich ziehe nacheinander einzelne Socken heraus (da ich in die Schachtel nicht hineinsehen kann). Ich möchte gerne das Paar blaue Socken erwischen.
Wie groß ist die W’,
a. dass ich sehr schnell das Paar blaue Socken erwische?
b. dass dieses Ziehen besonders lange dauert?
c. (Verallgemeinerung zu b.) In einer Urne liegen s schwarze und w weiße Kugeln. Wie groß ist die W’, dass ich erst im s+1-ten Zug die erste weiße Kugel ziehe?
(*Hinweis: Hier helfen kombinatorische Überlegungen wohl eher als ein Baumdiagramm.*)

Ü4 Bei einem Turnier soll so lange gespielt werden, bis eine Mannschaft 5 Siege errungen hat. Der Verlierer trägt die Kosten des Turniers von 4000 Euro. Beim Stand von 2 Siegen für A und 3 Siegen für B muss das Turnier abgebrochen werden. Die Mannschaften einigen sich darauf, dass die Kosten aufgeteilt werden sollen entsprechend der Chance, das Turnier zu gewinnen/verlieren.

a. Dabei wird für die nicht gespielten Spiele für die Mannschaften eine 50:50 Chance angenommen. Wie viel Euro müssen A bzw. B bezahlen?

b. Für die nicht gespielten Spiele wird nach dem aktuellen Turnierstand angenommen, dass A mit einer W’ von 0,4 und B mit einer W’ von 0,6 gewinnt. Wie viel Euro müssen A bzw. B in diesem Fall bezahlen?

(Solche Aufteilungsprobleme bei abgebrochenen Spielen spielten in der Geschichte der W’rechnung eine große Rolle.)

Ü5 In einer Urne liegen 12 Kugeln, 5 weiße und 7 schwarze. Die Spieler A, B und C ziehen nacheinander eine Kugel ohne Zurücklegen. Dabei beginnt A, dann zieht B, dann C und dann wieder A u.s.w. Sieger ist, wer als erster eine weiße Kugel zieht.
Berechnen Sie die W’, mit der A, B oder C gewinnen.

Ü6 In einer Urne liegen 2 schwarze, 2 weiße und 2 blaue Kugeln. Es wird vier Mal ohne Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die W’, dass

a. 1 blaue, 1 weiße und 2 schwarze Kugeln gezogen werden?

b. 1 blaue und 3 nicht blaue Kugeln gezogen werden?

c. 2 blaue und 2 schwarze Kugeln gezogen werden?

d. 2 blaue und zwei nicht blaue Kugeln gezogen werden?

Ü7

LOTTO Spieleinsatz : 62.942.211,00 €

Gewinnklasse		Anzahl der Gewinner	Quote
Gewinnklasse 1	(6 Richtige + Superzahl)	Unbesetzt	19.235.976,10 €
Gewinnklasse 2	(6 Richtige)	3	839.229,40 €
Gewinnklasse 3	(5 Richtige + Zusatzzahl)	25	62.942,20 €
Gewinnklasse 4	(5 Richtige)	1.220	3.353,40 €
Gewinnklasse 5	(4 Richtige + Zusatzzahl)	3.751	167,80 €
Gewinnklasse 6	(4 Richtige)	76.251	41,20 €
Gewinnklasse 7	(3 Richtige + Zusatzzahl)	107.750	23,30 €
Gewinnklasse 8	(3 Richtige)	1.500.184	9,20 €

Jackpot Gewinnklasse 1 der nächsten Ziehung: 21.000.000,00 EUR

Beim Lotto gibt es insgesamt $\binom{49}{6}$ verschiedene Tipps. Die Tabelle zeigt die Daten der Ausspielung von Samstag, den 26.3.11.

a. Berechnen Sie $\binom{49}{6}$ exakt.

b. Angenommen, wir hätten einen kompletten Tipp abgegeben, d.h. Lottoscheine, auf denen jeder der $\binom{49}{6}$ möglichen Tipps genau einmal vorkommt. Ein Tipp kostet 0,75 €. Wie viel investieren wir in diesen kompletten Tipp?

c. Berechnen Sie für die Gewinnklassen 2 bis 8, wie viele Tipps jeweils in welche Gewinnklasse fallen.

Beispielansatz für Klasse 5, 4 Richtige mit Zusatzzahl: $\binom{6}{4}\cdot\binom{1}{1}\cdot\binom{42}{1}$, denn aus den 6 Gewinnzahlen werden 4 ausgewählt, aus der einen Zusatzzahl eine und aus den 42 „Nieten“ eine.
Berechnen Sie nun, wie viel Geld wir mit dem kompletten Tipp an diesem Wochenende gewonnen hätten.

d. Berechnen Sie noch, wie viele unserer Tipps nur zwei Richtige, eine Richtige und gar keine Richtige haben und bilden Sie die Summe mit den Gewinntipps aus c. Alle zusammen sollten die Gesamtzahl der Tipps von $\binom{49}{6}$ ergeben.

Ü8 In einer Urne liegen sechs Kugeln, die mit den Zahlen 1 bis 6 beschriftet sind und zwei Kugeln ohne Aufschrift. Man zieht insgesamt drei Mal. Zieht man eine Kugel mit einer Zahl, behält man sie. Zieht man eine Kugel ohne Zahl, so legt man sie zurück.

a. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der gezogenen Kugeln 4 oder mehr beträgt. Arbeiten Sie mit einem verkürzten Baum.

b. In einer Modifikation der Spielregeln müssen Sie auch die gezogenen Zahlkugeln wieder zurücklegen. Erhöht das Ihre Chancen, mit den gezogenen Kugeln in der Summe 4 oder mehr zu erreichen? Schätzen Sie, bevor Sie rechnen.

c. In einer weiteren Modifikation der Spielregeln können Sie vor dem Ziehen eine Grenze festlegen für das Zurücklegen. Kugeln unter dieser Grenze müssen nicht zurückgelegt werden, Kugeln über der Grenze dürfen zurückgelegt werden. Legen Sie die Grenze auf 3,5 und berechnen Sie nun die Wahrscheinlichkeit, in der Summe 4 oder mehr zu erzielen.