1. Grundlagen

1.1 Zufallsexperimente, Ergebnisse

Grundlage für alle Betrachtungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung sind Zufallsexperimente. Ein Zufallsexperiment ist ein Vorgang, der
- mehrere mögliche Ergebnisse haben kann
- ein spezielles Ergebnis ist nicht vorhersagbar oder gezielt erreichbar.
- der Vorgang kann (zumindest prinzipiell) unverändert wiederholt werden.

Beispiele: Das Werfen eines Würfels hat die Ergebnisse 1, 2, 3, 4, 5 oder 6. Das Drehen eines Glücksrades, das Ziehen eines Loses aus einer Lostrommel erzeugen bewusst verschiedene Ergebnisse. Beim Flug eines Flugzeuges kann man protokollieren, ob es störungsfrei oder nicht geflogen ist. Das wiederholte Würfeln kann man aber auch unter dem Aspekt betrachten, wie lange man werfen muss, bis eine „Sechs“ fällt.

1.2 Ergebnismenge, Ereignis, σ-Algebra, Ereignisraum

Die Menge der Ergebnisse, die man betrachten und unterscheiden will, muss man oft zum Zufallsexperiment mit angeben. Sie muss sich nicht automatisch aus der Beschreibung des Experiments ergeben. Die Menge der Ergebnisse benennt man üblicherweise mit Ω. Ist die Menge endlich (so wie in den meisten Beispielen in dieser Vorlesung), so zählt man Ω auf. Wirft man zum Beispiel zwei Würfel gleichzeitig, so kann man die Würfel einzeln berücksichtigen. Dann ist
$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,2), (2,3), ..., (6,6)\}$
Man kann aber auch die beiden Augenzahlen zusammenzählen. Dann ist
$\Omega = \{2, 3, 4, 5, ... , 12\}$
Bei abstrakten Betrachtungen bezeichnet man die Elemente von Ω oftmals mit
$\omega_i, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Oftmals interessieren einen die einzelnen Ergebnisse nicht, sondern eher Zusammenfassungen von mehreren Ergebnissen. Das sind also Teilmengen von Ω und man bezeichnet sie als Ereignisse. So interessiert einen z.B. bei einer Tombola, ob man eine Niete gezogen hat oder einen Gewinn. Das Ereignis „Gewinn“ umfasst aber mehrere Gewinnmöglichkeiten, vom Kleingewinn bis zum Hauptgewinn.
Nehmen wir das Beispiel des doppelten Münzwurfs (s.o.) mit
$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,2), (2,3), ..., (6,6)\}$. Dann ist „Pasch“ ein Ereignis mit $P = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$.
Enthält ein Ereignis E nur ein Ergebnis, also nur ein Element ω aus Ω, $E = \{\omega\}$, so nennt man E ein Elementarereignis.

Die Menge aller betrachteten Ereignisse fasst man wiederum zu einer Menge zusammen, die Ereignismenge. Für das weitere, sinnvolle Arbeiten mit Wahrscheinlichkeiten ist es aber sinnvoll, nicht jede beliebige Menge von Ereignissen zu betrachten, sondern bestimmte Struktureigenschaften zu betrachten.

Definition (σ-Algebra)
Es sein Ω eine Menge von Ergebnissen. Dann heißt eine Menge $\mathcal{A}$ von Teilmengen von eine σ-Algebra, wenn $\mathcal{A}$ folgende Eigenschaften erfüllt:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$ d.h. Ω muss immer zu $\mathcal{A}$ gehören

2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$ d.h. mit jeder Menge aus $\mathcal{A}$ gehört auch die Komplementmenge zu $\mathcal{A}$

3. $A,B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$ d.h. mit zwei Mengen aus $\mathcal{A}$ gehört auch deren Vereinigung zu $\mathcal{A}$

Das Paar $(\Omega, \mathcal{A})$ aus beiden Mengen heißt dann ein Ereignisraum.
Zu einer gegebenen Ergebnismenge Ω ist die einfachste σ-Algebra $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$.
Ist die Ergebnismenge Ω endlich, also $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, so ist die Potenzmenge[1] $\wp(\Omega)$ die umfangreichste σ-Algebra und umfasst 2^n Elemente.

1.3 Wahrscheinlichkeit, Messen der Wahrscheinlichkeit

Bei einem Zufallsexperiment sind prinzipiell mehrere Ergebnisse möglich. Beschränken wir uns auf endlich viele, so kann man nach sehr häufiger Wiederholung des Experiments zu jedem Ergebnis , also jedem Elementarereignis, feststellen, mit welcher relativen Häufigkeit es vorgekommen ist. Diese relative Häufigkeit ist eine Zahl zwischen 0 und 1. Oftmals wird sie in Prozent angegeben, also eine Zahl zwischen 0% und 100%. Rein theoretisch kann man jedem Ereignis eines Ereignisraums $(\Omega, \mathcal{A})$ eine Zahl zwischen 0 und 1 zuordnen.
Damit diese Zuordnung tatsächlich eine Wahrscheinlichkeit ist, müssen zwei Eigenschaften erfüllt sein.

Definition (Wahrscheinlichkeit, Kolmogorov 1933)
Gegeben ist ein Ereignisraum $(\Omega, \mathcal{A})$ und eine Funktion P von $\mathcal{A}$ nach [0,1] mit folgenden Eigenschaften:
1. $P(\Omega) = 1$ (Normiertheit)
2. Für A, B $\in \mathcal{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (Additivität)

Was kann man mit diesem Wahrscheinlichkeitsbegriff anfangen?
Die hier angegebene Wahrscheinlichkeitsdefinition ist rein theoretisch. Sie lässt zu, dass die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses im Wesentlichen willkürlich ist und fordert für diese Zuordnung nur minimale Struktureigenschaften. Es sind gleichzeitig Grundregeln, wie man dann mit der Wahrscheinlichkeit rechnen kann.
Diese Wahrscheinlichkeitsdefinition macht überhaupt keine Aussage darüber, wie Wahrscheinlichkeiten in der realen Welt ermittelt werden können.
Die Situation ist vergleichbar mit der Flächenberechnung aus gegebenen Längen. Wir haben gelernt, dass die Fläche eines Rechtecks das Produkt aus Länge mal Breite ist. Hat ein rechteckiger Tisch die Länge 1,80 m und die Breite 0,80 m, so ist seine Fläche 1,80 m · 0,80 m = 1,44 m². Das ist eine rein theoretische Aussage, die sich in keinster Weise darum kümmert, ob es in der Realität einen solchen Tisch wirklich gibt oder wie ich die Maße eines realen Tisches bestimme. Und wenn ich einen Tisch ausgemessen habe, bleibt die Frage, wie genau und verlässlich meine Messung ist und ob die Tischfläche wirklich ein Rechteck bildet.
Genau so verhält es sich mit der Wahrscheinlichkeit. Spricht man von einem Würfel und ordnet jedem Elementarereignis von 1 bis 6 die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ zu, so ist das eine rein theoretische Festlegung, die sich in keinster Weise darum kümmert, ob es einen

[1] Siehe Anhang A1.4

solchen Würfel tatsächlich gibt oder wie ich die Wahrscheinlichkeit für die einzelnen Elementarereignisse bestimme. Auch wenn die Verbindung zur Realität fehlt, lässt sich mit diesen Wahrscheinlichkeiten hervorragend rechnen und man kann weitergehende Betrachtungen anstellen.
Das ist für viele Fragestellungen zu abgehoben, zu theoretisch. Die (angewandte) Stochastik ist ähnlich wie eine Naturwissenschaft, sie möchte auf der Basis realitäts-bezogener Daten Aussagen über die Realität machen. Diese Verbindung herzustellen ist schwierig und fehleranfällig[2].
Das Messen von (Basis-)Wahrscheinlichkeiten bei realen Zufallsexperimenten verläuft immer über eine häufige Wiederholung und die Ermittlung der relativen Häufigkeit. Dabei gibt es genaue oder eher ungenaue Messungen. Genau so, wie man die Länge eines Tisches mehr oder weniger genau und verlässlich messen kann. In beiden Fällen hängt das Ergebnis vom Messgerät ab und vom Menschen, der dieses Messgerät benutzt.

Für die Nützlichkeit der Wahrscheinlichkeitsdefinition nach Kolmogorov sind hier einige Gesetzmäßigkeiten genannt, die sich aus der Definition beweisen lassen:

Folgerungen:
1. $P(\varnothing) = 0$ (das unmögliche Ereignis)
2. Für alle $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ gilt: $P(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - P(\mathrm{A})$ (Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses)
3. Sind $\mathrm{A}_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, und die A_i paarweise disjunkt, so gilt:
$$P(\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \ldots \cup \mathrm{A}_n) = \sum_{i=1}^{n} P(\mathrm{A}_i)$$
4. $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \Rightarrow P(\mathrm{A}) \le P(\mathrm{B})$ (Monotonie)

Eine ganz wichtige Folgerung ist die Wahrscheinlichkeitsbetrachtung nach Laplace. Gegeben ist eine Ergebnismenge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ und die σ-Algebra $\mathcal{A}$ enthält alle Elementarereignisse $\mathrm{E}_i = \{\omega_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Weiterhin wird allen Elementarereignissen die gleiche Wahrscheinlichkeit zugeordnet, also $P(\mathrm{E}_1) = P(\mathrm{E}_2) = \ldots = P(\mathrm{E}_n)$. Dann folgen aus diesen (theoretischen) Vorgaben und der Definition nach Kolmogorov:
$$\begin{aligned} P(\mathrm{E}_1 \cup \mathrm{E}_2 \cup \mathrm{E}_3 \cup \ldots \cup \mathrm{E}_n) &= \sum_{i=1}^{n} P(\mathrm{E}_i) = nP(\mathrm{E}_1) \\ &= P(\Omega) = 1 \end{aligned}$$
folglich ist $P(\mathrm{E}_1) = \frac{1}{n}$ und damit auch alle anderen Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse.
Betrachtet man ein beliebiges Ereignis A, so ist dieses eine Teilmenge von Ω, also die Vereinigung einer Auswahl von Elementarereignissen.
$\mathrm{A} = \bigcup_{k \in I} \mathrm{E}_k$, $I \subseteq \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ und $|\mathrm{A}| = |I|$

[2] „Insofern sich die Gesetze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher; insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit.“ (Albert Einstein)

Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit von A: $P(\mathrm{A}) = P\left(\bigcup_{k\in I} \mathrm{E}_k\right) = \sum_{k\in I} P(\mathrm{E}_k) = |\mathrm{A}|\cdot\frac{1}{n} = \frac{|\mathrm{A}|}{|\Omega|}$.

Der letzte Bruch ist der Quotient aus den beiden Mächtigkeiten von A und Ω. Das ist aber die Anzahl der (für A) günstigen Fälle durch die Anzahl aller möglichen Fälle.

Beispiel
Beim Roulette wird ein Glücksrad mit den Sektoren 0, 1, 2, ... , 36 gedreht. Nimmt man an, dass alle Zahlen gleichberechtigt sind (was in der Realität eine hohe Anforderung ist, die selten eingehalten wird), so entfällt auf jedes Elementarereignis $\mathrm{E}_i = \{i\}$, i = 0, 1, 2, ... , 36, die Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{37}$. Für das Ereignis „pair“ (gerade Zahl) kommen alle geraden Zahlen ohne die Null in Frage, also 18 Zahlen. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit für „pair“:
$P(\text{pair}) = \frac{18}{37}$.

1.4 Zusammenfassung: Wahrscheinlichkeitsraum

Die drei wesentlichen Beschreibungen für ein Zufallsexperiment, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, fasst man zu einem Wahrscheinlichkeitsraum zusammen.

Die Ergebnismenge Ω:	Sie gibt an, welche Ergebnisse auftauchen können, wenn man den Versuch durchführt. Ist Ω endlich, werden häufig alle Ergebnisse aufgezählt. Im allgemeinen Fall schreibt man oft $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$.
Die σ-Algebra $\mathcal{A}$:	Sie gibt an, welche Ereignisse im Zusammenhang mit dem Zufallsexperiment betrachtet werden. Für ein endliches Ω ist $\mathcal{A}$ oft die Potenzmenge $\wp(\Omega)$ von Ω.
Die Wahrscheinlichkeit P:	Das ist eine Funktion, die jedem Ereignis aus $\mathcal{A}$ eine Zahl zwischen 0 und 1 als Wahrscheinlichkeit zuordnet. Ist Ω endlich mit $\lvert\Omega\rvert = n$, ist eine häufig auftauchende Wahrscheinlichkeitsfunktion die, die jedem Elementarereignis die gleiche Wahrscheinlichkeit zuordnet, nämlich $\frac{1}{n}$ (Laplace-Experiment).

Übungsaufgaben zu Kapitel 1

Ü1 Entscheiden Sie für jeden Satz, ob er richtig oder falsch ist.
- i. Ein Ereignis ist eine Menge von Ergebnissen.
- ii. Ein Ereignis ist ein Element von Ω.
- iii. Die σ-Algebra $\mathcal{A}$ ist eine Teilmenge von Ω.
- iv. Ω ist eine Teilmenge der σ-Algebra $\mathcal{A}$.
- v. Ω selbst ist ein Ereignis.
- vi. Ω selbst ist ein Ergebnis.

Ü2 Geben Sie für die folgenden Situationen jeweils einen möglichst einfachen Ergebnismenge Ω an.
- a. Eine Münze wird zwei Mal geworfen, jede Münze kann Bild oder Zahl anzeigen.
- b. Eine Spielmarke mit den Zahlen 1 und 3 und ein Würfel werden geworfen.

c. Eine Münze wird geworfen, bis „Zahl“ erscheint. Man achtet auf die Anzahl der notwendigen Würfe.
d. Eine Karte wird aus einem Stapel Spielkarten gezogen. Dabei interessiert einen nur
   i. die „Farbe“ Kreuz, Pik, ...
   ii. ob es ein Ass ist oder nicht.
   iii. ob es Kreuz Bube ist oder nicht.

Ü3 Notieren Sie die Ergebnisse zu folgenden Ereignissen. Die Ergebnismengen sollen jeweils die aus Aufgabe 1 sein:
a. (1.a) Die beiden Münzen zeigen gleiche Ergebnisse.
b. (1.b) Die Summe beider Zahlen ist eine Primzahl.
c. (1.b) Das Produkt beider Zahlen ist mindestens 9.
d. (1.c) Man muss höchstens zwei Mal werfen.

Ü4 Ergebnismengen beschreiben
a. In einer Urne liegen 2 schwarze, 1 weiße und 3 blaue Kugeln. Es werden drei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Geben Sie Ω als Menge von 3-Tupeln an.
   Zählen Sie die Ergebnisse auf, die zum Ereignis „wenigstens zwei Kugeln haben die gleiche Farbe“ gehören.
b. Das Geschlecht der Kinder in Familien mit bis zu drei Kindern wird protokolliert in der Reihenfolge ihres Alters. Geben Sie Ω vollständig an.

Ü5 Gegeben ist $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$. In einer Ereignisalgebra ***A*** über Ω sind die beiden Mengen $A_1 = \{1,2,3\}$ und $A_2 = \{2,3,6\}$ enthalten. Welche Mengen müssen noch in ***A*** enthalten sein ohne dass ***A*** die Potenzmenge von Ω ist? *Anleitung: Erweitern Sie ausgehend von A_1, A_2 die σ-Algebra so, dass die drei Eigenschaften einer σ-Algebra erfüllt sind. Gehen Sie für die neu dazugekommenen Mengen analog vor, bis Sie keine neuen Mengen mehr in die σ-Algebra aufnehmen müssen.*

Ü6 Gegeben ist $\Omega = \{a,b,c,d,e\}$ und die beiden Ereignisse $E_1 = \{a\}$ und $E_2 = \{c\}$.
a. Erweitern Sie die Menge der Ereignisse so, dass sie eine Ereignisalgebra (σ-Algebra) ***A*** darstellt. Vermeiden Sie, die vollständige Potenzmenge von Ω zu nehmen.
b. Es sei $P(E_1) = 0{,}2$ und $P(E_2) = 0{,}4$ die den Ereignisse E_1 und E_2 zugeordnete Wahrscheinlichkeit. Bestimmen Sie für alle in a. hinzugenommenen Ereignisse die Wahrscheinlichkeiten.

Ü7 Gegeben ist Ω = {1, 2, 3, 4, 5, ... , 10} und eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ über Ω.
Man weiß, dass $A = \{2, 4, 6\}$ und $B = \{2, 6, 9\}$ zu $\mathcal{A}$ gehört.
a. Zeigen Sie, dass dann auch $A \cap B = \{2,6\}$ zu $\mathcal{A}$ gehört.
b. Zeigen Sie, dass E = {1} nicht unbedingt zu $\mathcal{A}$ gehören muss.

Ü8 Wahrscheinlichkeitsaussagen interpretieren
Erläutern Sie über relative Häufigkeiten die Aussage. Macht diese Aussage wirklich Sinn?
a. Wenn Sie beim Roulettspiel auf eine einzelne Zahl setzen, gewinnen Sie mit der Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{37}$.

b. Jedes Los gewinnt mit einer W’ von 50%.
c. „Die Gefährdung des Präsidenten ist hoch. Die W’ für ein Attentat beträgt zur Zeit 30%.“

Ü9 Laplace-Experimente
Welche Zufallsexperimente sind Laplace-Experimente, bei denen also die Elementarereignisse die gleiche Wahrscheinlich haben?
a. Werfen mit einer Münze (Zahl, Adler) und einem Würfel: Die Ergebnisse sind die Paare (Münzergebnis, Würfelzahl).
b. Geschlecht von Kindern bei der Geburt: Die Ergebnisse sind „Junge“ oder „Mädchen“.
c. Lottospiel: Die Ergebnisse sind „Sechser“ oder „kein Sechser“.
d. Lottospiel: Die Ergebnisse sind alle Gewinnmöglichkeiten: kein Gewinn, 3er, 3er m Z, 4er, 4er m Z, 5er, 5er m Z, 6er
e. Werfen mit zwei Würfeln: Die Ergebnisse sind die Augensummen 2 bis 12.

Ü10 Eine Gruppe aus 15 Frauen und 7 Männern lost 6 Mitglieder als Vertreter aus. Dazu werden die 22 Namen der Personen als Lose in eine Lostrommel gelegt und dann 6 Lose ohne Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die W’, dass es 4 Frauen und 2 Männer sind?

Ü11 Drei Freundinnen bewerben sich für die Abschlussprüfungen in einer Gruppe von insgesamt 24 Prüflingen um die Prüfer A, B und C. Jeder Prüfer übernimmt zufällig 8 Prüflinge. Wie groß ist die W’, dass alle drei Freundinnen den von ihnen bevorzugten „C“ als Prüfer bekommen?

Ü12 Ist die Mächtigkeit einer Menge Ω gleich n, so ist die Mächtigkeit der Potenzmenge $\wp(\Omega)$ gleich 2^n .
a. Begründen Sie dieses durch kombinatorische Argumentation.
b. Beweisen Sie diese Aussage durch vollständige Induktion.