

Stochastik

0. Einführende Beispiele

Diese Beispiele sind keine systematische Einführung, sondern sollen schlaglichtartig einige Eigenarten und Probleme der Stochastik beleuchten

0.1 Münzwurf ausdenken

Sie haben die Aufgabe, eine Münze 100 Mal hintereinander zu werfen. Sie möchten sich die Aufgabe sparen und denken sich einfach 100 Ergebnisse aus. In der Regel machen dann Menschen, die nicht näher stochastisch geschult sind, den Fehler, dass sie zu oft zwischen Kopf und Zahl wechseln. Während man beim tatsächlichen Münzwurf schnell einmal 5 oder 6 gleiche Ergebnisse hintereinander erhält, „traut“ sich ein Mensch beim Ausdenken dieser 100 Münzwürfe viel zu selten, so etwas hinzuschreiben. Ein Mensch, wenn er intuitiv handelt, wechselt zu schnell, zu häufig zwischen Kopf und Zahl. Es liegt die Vermutung nahe, dass der Mensch „zufällig“ mit „gut gemischt“ verwechselt. Die Münze soll gleichmäßig sein, also weder Kopf noch Zahl auf lange Sicht häufiger anzeigen als das andere. Das zeigt sich daran, dass bei Stichproben etwa die eine Hälfte der Würfe Kopf zeigt und etwa die andere Hälfte Zahl. Bei dem Versuch, eine Münze 100 Mal zu werfen, erwarten wir ca. 50 Mal Kopf und 50 Mal Zahl. Sicher würden wir auch noch 60 zu 40 tolerieren, aber 90 zu 10 würde uns schon mutmaßen lassen, dass die Münze eben nicht gleichmäßig fällt. Aber wie klein darf die Stichprobe sein? Dürfen bei 10 Würfeln drei Mal Kopf und sieben Mal Zahl fallen?

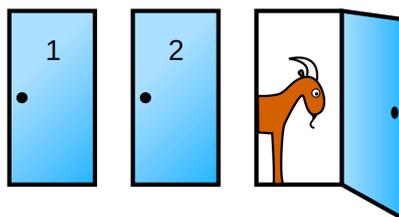
Beim Aufschreiben der Kopf-Zahl-Folge nach Gutdünken stellt sich das Problem in der Form, wie groß die Stichproben sein dürfen, die extrem schlecht gemischt sind. Darf eine Stichprobe von 6 Würfeln tatsächlich aus nur den gleichen Ergebnissen Kopf oder Zahl bestehen? Der Mensch, der an „gut gemischt“ denkt, wird das zulassen, doch nur sehr selten. Tatsächlich sagt die Theorie des Zufalls, dass etwa jede 30. Sechserstichprobe aus sechs gleichen Ergebnissen bestehen sollte.

Einem ähnlichen Irrtum unterliegt der Roulettespieler, der meint, dass nach vier Mal Schwarz nun aber Rot „dran sei“. Unter dem Aspekt von „gut gemischt“ hätte er Recht. Die Ergebnisse sind aber zufällig, deshalb ist solch ein Denken falsch.

„zufällig“ ist nicht „gut gemischt“

0.2 Das Ziegenproblem

Dieses Problem wurde in den USA heftig diskutiert.



Nehmen Sie an, Sie wären in einer Spielshow und hätten die Wahl zwischen drei Toren. Hinter einem der Tore ist ein Auto, hinter den anderen sind Ziegen. Sie wählen ein Tor, sagen wir, Tor Nummer 1, und der Showmaster, der weiß, was hinter den Toren ist, öffnet

ein anderes Tor, sagen wir, Nummer 3, hinter dem eine Ziege steht. Er fragt Sie nun: 'Möchten Sie das Tor Nummer Zwei?' Ist es von Vorteil, die Wahl des Tores zu ändern? Man kann die Situation nun so interpretieren, dass man vor zwei Türen steht, von denen eine zum Auto, die andere zu einer Ziege führt. Entscheidet man sich für eine, ist die Wahrscheinlichkeit für das Auto 0,5. Tatsächlich sind die Wahrscheinlichkeiten aber nicht gleich (darum ging es in der Diskussion von 1990).

Wir betrachten das Ziegenproblem nun mit zwei Personen, dem „Starrkopf“ (der grundsätzlich bei seiner ersten Wahl bleibt) und dem „Flexkopf“ (dieser wechselt grundsätzlich).

	1. getroffene Wahl		
Starrkopf	A	führt zu	A
	Z	führt zu	Z
	Z	führt zu	Z
Flexkopf	A	führt zu	Z
	Z	führt zu	A
	Z	führt zu	A

Für beide legt ihre Strategie, auf jeden Fall die erste Wahl beizubehalten bzw. zu wechseln, den weiteren Verlauf und auch das Endergebnis in eindeutiger Weise fest. Insbesondere gilt für den „Flexkopf“, dass er genau dann das Auto bekommt, wenn seine erste Wahl zufällig auf eine Ziegentür fiel. Da die Wahrscheinlichkeit bei $\frac{2}{3}$ liegt, hat der Flexkopf eine höhere Chance auf das Auto.

0.3 Qualitätstest (Bedingte Wahrscheinlichkeit)

Dieses Beispiel soll zeigen, dass man für die korrekte Anwendung von statistischen Daten Fachkenntnis braucht, um vor Überraschungen und Fehlentscheidungen sicher zu sein. Ein Abteilungsleiter hat in seinem Büro zwei Sekretärinnen sitzen. Die Geschäfte laufen schlecht, so dass eine gehen muss. Doch welche ist die Bessere? Der Abteilungsleiter führt heimlich eine Strichliste für die Fehler, die den beiden Sekretärinnen unterlaufen. Am Ende stellt er fest, dass Frau A. 12 Fehler gemacht hat, Frau B. aber nur 10. Also schlägt er der Personalabteilung Frau A. vor, dass sie sein Sekretariat verlassen soll.

Die Personalabteilung ist über den Vorschlag höchst verwundert, da sie nach der Qualitätserhebung durch die Personalstelle eindeutig die bessere von beiden ist. Frau A. ist fleißiger als Frau B. - sie erledigt 60% der anfallenden Arbeiten, Frau B. nur 40% - und sie arbeitet genauer - Frau A. macht bei 8% der Arbeiten Fehler, Frau B. aber bei 10%.

Wie kommen diese beiden entgegengesetzten Urteile zustande? Hatte Frau A. Pech, zufällig eine schlechte Woche? Oder steckt der Fehler im System?

Übungsaufgaben zu Kapitel 0

Ü1 Testen Sie ihre in der Vorlesung ausgedachte 01-Reihe auf Zahlenpaare. Welche Zahlenpaare können vorkommen? Wie häufig sind in Ihrer Reihe die verschiedenen Paare? Woran zeigt sich hier die „Menschlichkeit“ der ausgedachten Reihe?

Ü2 Das Ziegenproblem mit vier Türen

Das Ziegenproblem wird modifiziert: Es sind nun vier Türen. Hinter einer ist wieder ein Auto, hinter den anderen drei sind Ziegen. Nach der Wahl einer Tür öffnet der Spielleiter **zwei** Türen mit Ziegen. Lohnt es sich wieder, zu wechseln? Wie groß ist nun die Gewinnchance für den Wechsler gegenüber dem „Starrkopf“?

Ü3 Zahlenexperimente zum empirischen Gesetz der großen Zahl

Ein Würfel hat bei 30 Würfungen nur 3 Sechsen gezeigt, also weniger als ein Sechstel. In den nächsten Würfungen ist der Würfel „ideal“, d.h. er zeigt bei genau 6 Würfungen eine Sechs.

- a. Verfolgen Sie nun in einer Tabelle, wie sich numerisch die relative Häufigkeit für das Ereignis „6“ weiter entwickelt. Gehen Sie dazu praktischerweise in Sechsschritten bei der Anzahl der Versuche vor.
- b. Wie viele Würfe bei idealem Verhalten des Würfels muss man nun nach den 30 „missglückten“ Würfungen machen, damit im Gesamtexperiment die relative Häufigkeit für das Ereignis „6“ 0,16 gerade überschreitet?