PRÄSENZÜBUNGEN

1.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2-2x_i\overline{x}+\overline{x}^2\right)$$

Quadrat mit Binomischer Formel auflösen. Die Summe auf die einzelnen Summanden verteilen.

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}2x_i\overline{x}+\sum_{i=1}^{n}\overline{x}^2$$

In der zweiten und dritten Summe die konstanten Faktoren vor die Summe ziehen.

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\overline{x}\sum_{i=1}^{n}x_i+\overline{x}^2\sum_{i=1}^{n}1$$

In der zweiten Summe den Mittelwert einführen Die dritte Summe ist n Mal der Summand 1, also n

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\overline{x}\cdot n\overline{x}+\overline{x}^2\cdot n$$

Die hinteren beiden Summanden zusammenfassen.

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2$$

2. a. Wegen der Formeln

$$m=\frac{S_{xy}}{S_{xx}} \text{ mit}$$

$$S_{xy}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\cdot\overline{x}\cdot\overline{y} \text{ und } S_{xx}=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\cdot\overline{x}^2$$

$$b=\overline{y}-m\overline{x}$$

muss man die folgenden Summen berechnen: Summe

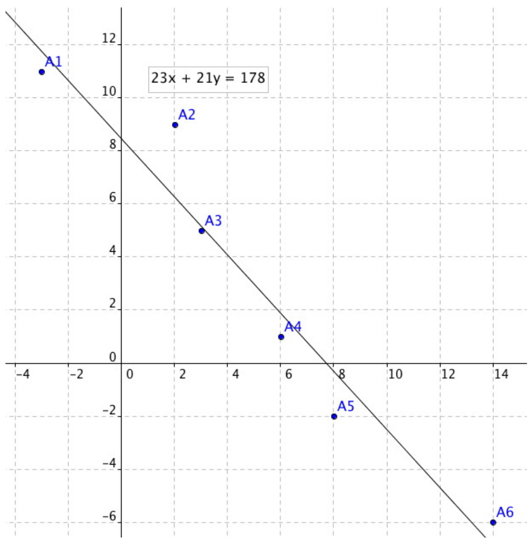
							Summe
x	-3	2	3	6	8	14	30
y	11	9	5	1	-2	-6	18
x^2	9	4	9	36	64	196	318
xy	-33	18	15	6	-16	-84	-94

mit n = 6 ergibt sich $\overline{x}=5$ und $\overline{y}=3$

$S_{xx}=318-6\cdot5^2=168$, $S_{xy}=-94-6\cdot5\cdot3=-184$

Also erhält man für die Parameter für die Ausgleichsgerade

$$m=\frac{-184}{168}\approx-1{,}1 \quad b=3-\frac{-184}{168}\cdot5\approx8{,}5$$



b. In der Abbildung gibt GeoGebra die Gleichung 23x + 21y = 178 an.
-23 : 21 ≈ -1,1 , 178 : 21 ≈ 8,5 womit die in a berechneten Werte bestätigt werden.
Außerdem kann man die Steigung von ca. -1 und den y-Achsenabschnitt bei ca. 8,5 gut in der Zeichnung ablesen.

HAUSÜBUNGEN

3. a. $\mu_1 = 60 \cdot 0{,}3 = 18 \quad \mu_2 = 60 \cdot \frac{1}{3} = 20$ (1 Punkt)

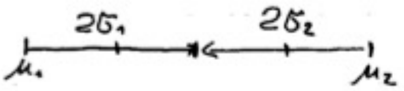
b. i. Man entscheidet sich für die kleinere W' bei $k \le 18$. Folglich macht man bei $n = 60$ und $p = p_2 = \frac{1}{3}$ einen Fehler mit der W' $P(k \le 18) \approx 0{,}3457$, also mit gut 34%.

(1 Punkt)

ii. Man entscheidet sich für die größere W' bei $k \ge 19$. Folglich macht man bei $n = 60$ und $p = p_1 = 0{,}3$ einen Fehler mit der W' $P(k \ge 19) = 1 - P(k \le 18) \approx 1 - 0{,}5632 = 0{,}4368$, also deutlich über 40%. (1 Punkt)

c.

n berechnen



1

Ansatz $\mu_1 + 2\sigma_1 = \mu_2 - 2\sigma_2$

$$np_1 + 2\sqrt{np_1q_1} = np_2 - 2\sqrt{np_2q_2} \quad | \ :\sqrt{n}$$

$$\sqrt{n}p_1 + 2\sqrt{p_1q_1} = \sqrt{n}p_2 - 2\sqrt{p_2q_2} \quad | \text{ ordnen nach } \sqrt{n}$$

$$\sqrt{n}(p_1 - p_2) = -2\sqrt{p_1q_1} - 2\sqrt{p_2q_2} \quad | \ \cdot(-1)$$

$$\sqrt{n}(p_2 - p_1) = 2\sqrt{p_1q_1} + 2\sqrt{p_2q_2} \quad | \ :(p_2 - p_1)$$

(2 Punkte)

$$\sqrt{n} = \frac{2\left(\sqrt{p_1q_1} + \sqrt{p_2q_2}\right)}{p_2 - p_1} \quad | \text{ quadrieren}$$

$$n = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{p_1q_1} + \sqrt{p_2q_2}}{p_2 - p_1}\right)^2$$

Man sieht an dieser Herleitung, dass bei einer 2σ-Umgebung n vier Mal so groß sein muss gegenüber der Rechnung mit einer σ-Umgebung.

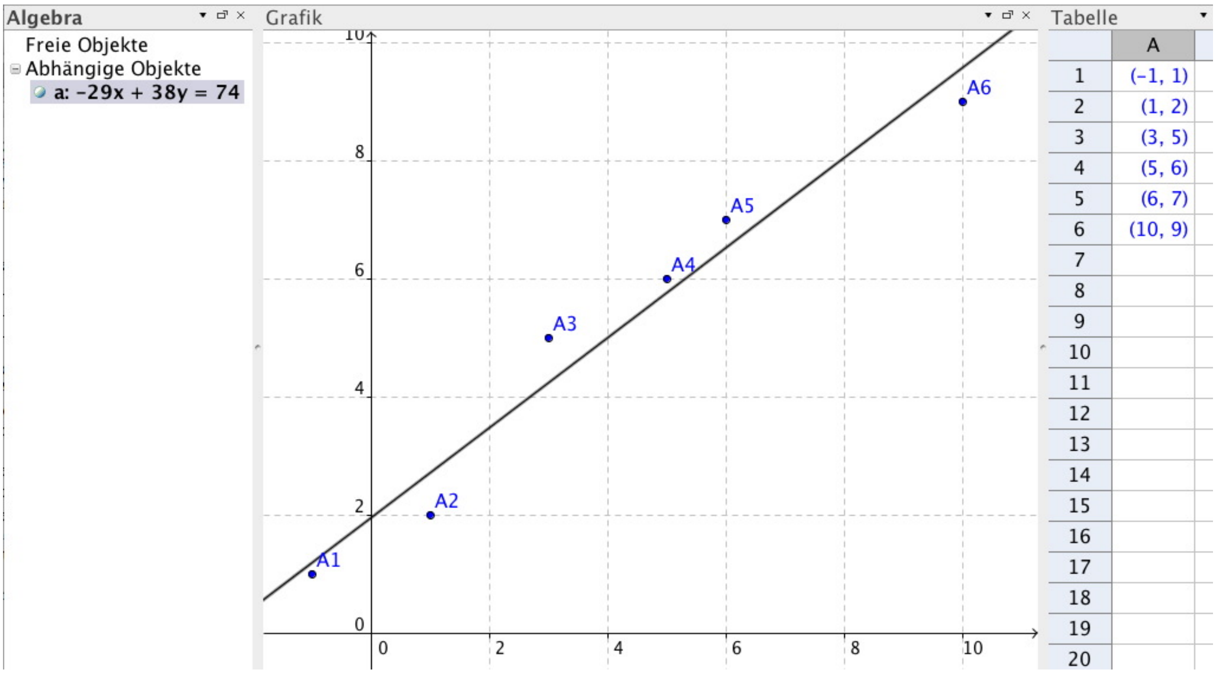
Einsetzen der gegebenen Werte $p_1 = 0{,}3$ und $p_2 = \frac{1}{3}$:

$$n = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{0{,}3 \cdot 0{,}7} + \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}}{\frac{1}{3} - 0{,}3}\right)^2 \approx 4 \cdot \left(\frac{0{,}9297}{0{,}0333}\right)^2 \approx 3111{,}4$$

Man muss also gut 3100 Versuche machen, um diese dicht beieinander liegenden W' deutlich zu trennen. (1 Punkt)

d. Bei $n = 3112$ sind die Erwartungswerte $\mu_1 = 933{,}6$ und $\mu_2 \approx 1037{,}3$. Der Mittelwert beider Erwartungswerte ist 985,5. Also wählt man als Entscheidungsregel:
Ist bei 3112 Versuchen die Trefferzahl 985 oder weniger, so entscheidet man sich für p_1, bei 986 oder mehr Treffern für p_2. (1 Punkt)

4.



Die Geradengleichung nach y auflösen: $y = \frac{29}{38}x + \frac{74}{38} \approx 0{,}76x + 1{,}95$ (1 Punkt)

							Summe
x	-1	1	3	5	6	10	24
y	1	2	5	6	7	9	30
x^2	1	1	9	25	36	100	172
xy	-1	2	15	30	42	90	178

mit n = 6 ergibt sich $\bar{x} = 4$ und $\bar{y} = 5$ (1 Punkt)

$S_{xx} = 172 - 6 \cdot 4^2 = 76$, $S_{xy} = 178 - 6 \cdot 4 \cdot 5 = 58$

$m = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{58}{76} = \frac{29}{38}$ $b = 5 - \frac{29}{38} \cdot 4 = \frac{74}{38}$

Die Werte für die händische Rechnung stimmen mit dem Computerergebnis genau überein. (1 Punkt)

5. a. Die W', dass die 35 Plätze nicht ausreichen, ist die W', dass 36 oder mehr Studierende kommen. Für n = 180 und p = 0,185 ist $P(X \geq 36)$ zu berechnen.
$P(X \geq 36) = 1 - P(X \leq 35) \approx 1 - 0{,}6696 = 0{,}3304$. Mit einer W' von etwa 33% reichen die Plätze nicht aus. (1 Punkt)

b. Man muss k so bestimmen, dass $P(X \leq k) \geq 0{,}95$ ist. Das ist laut Tabelle gerade für k = 42 erreicht. (1 Punkt)

6. a. Die Summe aller W' muss 1 sein.

$$\sum_{k=1}^{30} P(X=k) = \sum_{k=1}^{30} \frac{k^2}{C} = \frac{1}{C}\sum_{k=1}^{30} k^2 = \frac{1}{C}\cdot\frac{1}{6}\cdot 30\cdot 31\cdot 61 = \frac{9455}{C}$$ Also muss C = 9455 sein.

(1 Punkt)

b. $$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k\cdot P(X=k) = \sum_{k=1}^{30} k\cdot\frac{k^2}{9455} = \frac{1}{9455}\cdot\sum_{k=1}^{30} k^3 = \frac{1}{9455}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot 30\cdot 31\right]^2 \approx 22{,}9$$

(1 Punkt)

c. $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$ und $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2\cdot P(X=k) = \sum_{k=1}^{30} k^2\cdot\frac{k^2}{9455} = \frac{1}{9455}\cdot\sum_{k=1}^{30} k^4$$
$$= \frac{1}{9455}\cdot\frac{1}{30}\cdot 30\cdot 31\cdot\left(6\cdot 30^3 + 9\cdot 30^2 + 30 - 1\right)$$
$$= 557{,}8$$

Dann ist $V(X) \approx 557{,}8 - 22{,}9^2 = 33{,}39$ und $\sigma_X = \sqrt{V(X)} \approx 5{,}78$ (1 Punkt)