PRÄSENZÜBUNGEN

1. a.

$$\mu = n \cdot p = 3 \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \frac{3}{2}$$

$$np(1-p) = \frac{9}{4}$$

$$3(1-p) = \frac{9}{4} \quad |:3$$

$$1-p = \frac{3}{4} \Rightarrow \underline{p = \frac{1}{4}}$$

$$\mu = n \cdot \frac{1}{4} = 3 \Rightarrow \underline{\underline{n = 12}}$$

b. In der Tabelle sucht man den größten Wert für die W' und findet P(X=12) = 0,1278. Die Werte für 12 und 11 sind aber fast gleich, ebenso 13 und 10. Also ist der Erwartungswert ungefähr 11,5. $\mu = n \cdot p \approx 11{,}5$.

Nun addieren wir symmetrisch zu 11,5 die W' auf, bis man bis ca. 70% kommt.

Werte für k	11, 12	10, 13	9, 14	8, 15
P(X=k)	0,1252+0,1278	0,1102+0,1180	0,0864+0,0990	0,0598+0,0759
Gesamtsumme	0,2530	0,4812	0,6666	0,8023

Hieraus schätzen wir, dass $\mu + \sigma$ etwa bei 14,1 liegt, also $\sigma \approx 2{,}6$.

Dann ist $\sigma^2 \approx 6{,}76 = n \cdot p \cdot (1-p) \approx 11{,}5 \cdot (1-p)$ damit $1-p \approx 6{,}76 : 11{,}5 \approx 0{,}588$. Dann folgt $p \approx 0{,}412$ und $n \approx 11{,}5 : 0{,}412 \approx 28$

Man kann eine Probe machen, z.B. für k = 12:

$P(X=12) = \binom{28}{12} \cdot 0{,}412^{12} \cdot 0{,}588^{16} \approx 0{,}1486$, was keine sehr gute Bestätigung des Tabellenwertes ist.

(*tatsächlich wurde die Tabelle mit n = 60 und p = 0,2 erstellt*)

c. Wir nennen den Abstand zwischen zwei waagerechten Linien d. Summiert man alle Balkenlängen auf, so kommt man auf ca. 50d. Da alle W' zusammen 1 ergeben sollen, ist 50d = 1, also d = 0,02, was in das 1-2-5-Schema passt.

Da Maximum des „Berges" liegt bei 50, also ist $n \cdot p \approx 50$. Addiert man wieder wie in b. symmetrisch zu k = 50 die W' auf, bis man 70% erreicht hat, so kommt man auf die Grenzen 44 bis 56. $P(44 \leq X \leq 56) \approx 0{,}72$. Damit schätzen wir $\sigma \approx 5{,}5$.

Dann ergibt eine analoge Rechnung wie in a. und b. $p \approx 0{,}395$ und $n \approx 127$

(*Tatsächlich wurde das Diagramm mit p = 0,333 und n = 150 erzeugt*)

2. Die Formel $E(X) = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot P(X = k_i)$ für den Erwartungswert ist die allgemeine Definition, die für alle Verteilungen gilt. Die Formel $E(X) = n \cdot p$ erhält man, wenn man die allgemeine Formel auf die Binomialverteilung mit gegebenen n und p anwendet. Die ist natürlich erheblich einfacher als wenn man die Summation der allgemeinen Formel ausführen würde.

HAUSÜBUNGEN

3. a.

i) Entscheidungsregel:
„Sind von den 25 getesteten Teilen 2 oder weniger defekt, so ist die Qualität gut, sind 3 oder mehr defekt, so ist die Qualität regulär." (1)

ii) $p_1 = 5\% = 0{,}05 \quad n = 25 \Rightarrow \mu_1 = 1{,}25$

$p_2 = 15\% = 0{,}15 \quad \Rightarrow \mu_2 = 3{,}75$

Der Mittelwert von μ_1 und μ_2 liegt bei 2,5.
Unter dem Mittelwert → gute Qualität
über dem " → reguläre Qualität (1)

iii) erste Fehlermöglichkeit

Es ist $p = 0{,}05$ und man hat 3 oder mehr defekte Teile

$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 1 - 0{,}8729 = 0{,}1271$ (1)

zweite Fehlermöglichkeit

Es ist $p = 0{,}15$ und man hat 2 oder weniger defekte Teile (1)

$P(X \leq 2) \approx 0{,}2537$ (Zahlen mit Computertabelle)

b.

$n = 55$

Erwartungswerte $\mu_1 = n \cdot p_1 = 55 \cdot 0{,}05 = 2{,}75$

$\mu_2 = n \cdot p_2 = 55 \cdot 0{,}15 = 8{,}25$

Mittelwert 5,5 (1)

Entscheidungsregel.

„Sind von den 55 getesteten Teilen 5 oder weniger defekt, ist die Qualität gut ($p_1 = 0{,}05$), sind 6 oder mehr defekt, so ist die Qualität regulär ($p_2 = 0{,}15$)." ①

Fehler:

$p_1 = 0{,}05$, dennoch 6 oder mehr defekt

$P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) \approx 1 - 0{,}944 = \underline{\underline{0{,}056}}$ ①

$p_2 = 0{,}15$, dennoch nur 5 oder weniger defekt

$P(X \leq 5) \approx \underline{\underline{0{,}1479}}$ ①

c.

25 Teile testen

Testkosten 50 €

Erwartungswert für Schaden für Fehler

$E(\text{Schaden}) = 600\,€ \cdot 0{,}1271 + 500\,€ \cdot 0{,}2537$

$\approx 203{,}11\,€$

zusammen: $\underline{\underline{253{,}11\,€}}$ ①

55 Teile testen

Testkosten 110 €

$E(\text{Schaden}) = 600\,€ \cdot 0{,}056 + 500\,€ \cdot 0{,}1479$

$\approx 107{,}55\,€$

zusammen: $\underline{\underline{217{,}55\,€}}$

Das Testen von 55 Teilen bringt einen kleinen Vorteil. (1 Punkt)
(*Durch Experimentieren in einem Rechenblatt kann man die optimale Zahl der Tests ermitteln.*)

4. a.

$$\mu = n\cdot p = 10 \qquad \sigma = \sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)} = 2{,}5$$
$$\sigma^2 = n\cdot p\cdot(1-p) = 6{,}25$$
$$10\cdot(1-p) = 6{,}25$$

Also 1 – p = 0,625, p = 0,375
Dann gilt für n: $n = 10 : 0{,}375 \approx 26{,}67$. Für einen realistischen Wert gilt dann n = 27.
Dann gelten die Werte für μ und σ allerdings nicht mehr exakt. (1 Punkt)

b. $\sigma^2 = np(1-p) = \mu(1-p)$ Auflösen nach p: $1-p = \frac{\sigma^2}{\mu}$, also $p = 1-\frac{\sigma^2}{\mu}$.

Da p als W' aus dem Intervall [0;1] sein muss, gilt: $p = 1-\frac{\sigma^2}{\mu} \geq 0$. Damit muss $\frac{\sigma^2}{\mu} \leq 1$ gelten, also $\sigma^2 \leq \mu$.
Schließt man den wenig sinnvollen Fall p = 0 aus, kommt man auf die Forderung
$\sigma^2 < \mu$ (2 Punkte)

5. a.

Argumentation über die Erwartungswerte: sehr guter Kand. $\mu_2 = n\cdot p_2 = 30\cdot 0{,}95 = 28{,}5$

schwacher Kandidat:
$\mu_1 = n\cdot p_1 = 30\cdot 0{,}6 = 18$

Mittelwert → 23,25

Also wird man 24 oder mehr richtige Antworten fordern, also maximal 6 Fehler bei den 30 Fragen. (1 Punkt)

b. Guter Kandidat, also p = 0,95. n = 30
P(richtige Antworten ≥ 24) = 1 - P(richtige Antworten ≤ 23) ≈ 1 – 0,0006 = 0,9994
Der gute Kandidat besteht bei dieser Regelung mit einer W' von über 99%. (1 Punkt)

c. Schlechter Kandidat, also p = 0,6. n = 30
P(richtige Antworten ≤ 23) = 0,9828
Der schwache Kandidat fällt bei dieser Regelung mit einer W' von 98% durch. (1 Punkt)

d. Man erstellt eine Tabelle für n = 30. Wenn man mit einer W' von 50% gerade noch bestehen will, so muss die W' für 23 oder weniger richtige Antworten kleiner als 0,5 sein. Man muss also auf die kumulierte W' für k = 23 achten (markiertes Feld) und p so lange erhöhen, bis die W' unter 0,5 sinkt.
Ergebnis: Die Sicherheit für die einzelnen Fragen muss bei gut 78% liegen. (1 Punkt)

n = 30

p = 0.781

8	6	0	0
9	7	0	0
10	8	0	0
11	9	0	0
12	10	0	0
13	11	0	0
14	12	0	0
15	13	0	0
16	14	0.0001	0.0002
17	15	0.0005	0.0007
18	16	0.0016	0.0023
19	17	0.0048	0.0071
20	18	0.0123	0.0194
21	19	0.0277	0.0471
22	20	0.0544	0.1014
23	21	0.0923	0.1937
24	22	0.1347	0.3284
25	23	0.167	0.4954
26	24	0.1737	0.6692
27	25	0.1487	0.8179
28	26	0.102	0.9199
29	27	0.0539	0.9737
30	28	0.0206	0.9943

6. a. Aus dem Text kann man die W' einer Jungengeburt entnehmen mit p = 0,513. Das Krankenhaus meldet 100 Mädchen- und 109 Jungengeburten. Also ist n = 209.
Dann ist für die Anzahl X der Jungengeburten:
$E(X) = n \cdot p = 209 \cdot 0{,}513 \approx 107{,}2$ und
die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{209 \cdot 0{,}513 \cdot 0{,}487} \approx 7{,}23$
Damit ist die Abweichung des Wertes 109 vom Erwartungswert $1{,}8 \approx 0{,}25\sigma$ und damit in keinster Weise signifikant. (2 Punkte)

b. Laut Text gilt n = 150, p = 0,1
Dann ist $\mu = 15$ und $\sigma \approx 3{,}67$. Der Meßwert 11 weicht um 4 ≈ $1{,}1\sigma$ vom Erwartungswert ab. Das ist nur schwach signifikant auf einem Signifikanzniveau von ca. 15%. (1 Punkt)